“10000个科学难题”征集活动领导小组名单

组　长　赵沁平　刘燕华　李静海　朱道本

副组长　倪维斗

成　员（以姓氏拼音为序）

冯记春　韩　宇　何鸣鸿　马　扬　王伟中　谢焕忠

杨玉良　叶玉江

“10000个科学难题”征集活动领导小组办公室名单

主　任　陈盈晖

成　员（以姓氏拼音为序）

马晋并　吴晓东　鄢德平　朱蔚彤　朱小萍

“10000个科学难题”征集活动专家指导委员会名单

主　任　倪维斗

副主任　李家洋　赵忠贤　孙鸿烈

委　员（以姓氏拼音为序）

白以龙　陈洪渊　陈佳洱　程国栋　崔尔杰　冯守华　冯宗炜

符淙斌　葛墨林　郝吉明　贺福初　贺贤土　黄荣辉　金鉴明

李　灿　李培根　林国强　林其谁　刘嘉麒　马宗晋　欧阳自远

强伯勤　田中群　汪品先　王　浩　王静康　王占国　王众托

吴常信　吴良镛　夏建白　项海帆　徐建中　杨　乐　张继平

张亚平　张　泽　郑南宁　郑树森　钟　掘　周炳琨　周秀骥

朱作言　左铁镛

“10000个科学难题”数学编委会名单

“十一五”国家重点图书出版规划项目

10000个科学难题

10000 Selected Problems in Sciences

数学卷

Mathematics

“10000个科学难题”数学编委会

科学出版社

北京

内 容 简 介

《10000个科学难题·数学卷》是教育部、科学技术部、中国科学院和国家自然科学基金委员会联合组织开展的“10000个科学难题”征集活动的重要成果，书中的题目均由国内国际知名的数学专家撰写. 书中收集了有关数学很多分支学科及数学的应用等方面的大量问题，以及当今一些重要的数学问题.

该书可供高等院校和科研单位数学领域的研究生、科研人员阅读参考，也可供对数学感兴趣的其他读者阅读. 有兴趣的读者可以在此基础上就其中的某一问题进行深入探索和研究，一些研究生也可以在导师的指导下选择其中的某一问题作为自己的研究课题.

图书在版编目(CIP)数据

10000个科学难题·数学卷/“10000个科学难题”数学编委会. —北京: 科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-024267-9

Ⅰ. 1… Ⅱ. 1… Ⅲ. ①自然科学-普及读物 ②数学-普及读物

Ⅳ. N49 O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第038323号

责任编辑: 范庆奎 / 责任校对: 赵桂芬
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年5月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2009年5月第一次印刷 印张: 35 3/4
印数: 1—3 000 字数: 695 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

《10000 个科学难题》序

爱因斯坦曾经说过 “提出一个问题往往比解决一个问题更为重要”. 在许多科学家眼里, 科学难题正是科学进步的阶梯. 1900 年 8 月德国著名数学家希尔伯特在巴黎召开的国际数学家大会上提出了 23 个数学难题. 在过去的 100 多年里, 希尔伯特的 23 个问题激发了众多数学家的热情, 引导了数学研究的方向, 对数学发展产生的影响难以估量.

其后, 许多自然科学领域的科学家们陆续提出了各自学科的科学难题. 2000 年初, 美国克雷数学研究所选定了 7 个 “千禧年大奖问题”, 并设立基金, 推动解决这几个对数学发展具有重大意义的难题. 几年前, 中国科学院编辑出版了《21 世纪 100 个交叉科学难题》, 在宇宙起源、物质结构、生命起源和智力起源四大探索方向上提出和整理了 100 个科学难题, 吸引了不少人的关注.

科学发展的动力来自两个方面, 一是社会发展的需求, 另一个就是人类探索未知世界的激情. 随着一个又一个科学难题的解决, 科学技术不断登上新的台阶, 人类社会发展也源源不断获得新的动力. 与此同时, 新的科学难题也如沐雨春笋, 不断从新的土壤破土而出. 一个公认的科学难题本身就是科学研究的结果, 同时也是开启新未知大门的密码.

《国家中长期科学和技术发展规划纲要》提出建设创新型国家的战略目标, 加强基础研究, 鼓励原始创新是必由之路. 为了引导科学家们从源头上解决科学问题, 激励青年才俊立志基础科学研究, 教育部、科学技术部、中国科学院和国家自然科学基金委员会决定联合开展 “10000 个科学难题” 征集活动, 系统归纳、整理和汇集目前尚未解决的科学难题. 根据活动的总体安排, 首先在数学、物理学和化学三个学科试行.

征集活动成立了领导小组、领导小组办公室, 以及由国内著名专家组成的专家指导委员会和编辑委员会. 领导小组办公室公开面向高等学校、科研院所、学术机构以及全社会征集科学难题；编辑委员会认真讨论、组织提出和撰写骨干问题, 并对征集到的科学问题严格遴选；领导小组和专家指导委员会最后进行审核并出版《10000 个科学难题》系列丛书. 这些难题汇集了科学家们的知识和智慧, 凝聚了参与编写的科技工作者的心血, 也体现了他们的学术风尚和科学责任.

开展 “10000 个科学难题” 征集活动首先是一次大规模的科学问题梳理工作, 把尚未解决的科学难题分学科整理汇集起来, 有利于加强对基础科学研究的引导. 其次, 这么多科学难题呈现在人们面前, 有利于激发我国科技人员, 特别是广大博

士、硕士研究生探索未知、摘取科学明珠的激情, 而这正是我国目前基础科学研究所需要的. 此外, 深入浅出地宣传这些科学难题的由来和已有过的解决尝试, 也是一种科学普及活动, 有利于引导我国青少年从小树立献身科学、做出重大科学贡献的理想.

分学科大规模开展 "10000 个科学难题" 征集活动在我国还是第一次, 难免存在疏漏和不足, 希望广大科技工作者和社会各界继续支持这项工作, 更希望我国专家学者, 特别是青年科研人员持之以恒地解决这些科学难题, 开启未知的大门, 将这些科学明珠摘取到我国科学家手中.

赵沁平

2008 年 12 月

前　言

数学是一门在相当广泛的意义下研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学. 数学发展的根本原动力, 它的最初的根源, 不是来自它的内部, 而是来自它的外部, 来自客观实际的需要. 而一旦形成了基本的概念和方法, 单凭解决数学内部矛盾这一需求的推动, 单凭抽象的数学思维, 数学也可以大踏步地向前推进, 而且得到的结论还往往可以成功地接受后来实践的检验, 充分显示出数学的威力. 因此, 外部世界的驱动和内部矛盾的驱动是数学发展的两大动力, 是相得益彰、互相促进的.

这两方面的驱动常常是以问题的形式表现出来的. 整个的数学发展史, 可以说就是人们不断在数学上发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的历史. 古代的三大初等几何作图问题 (均已被证明为不可能!) 等不去说了, 在媒体上频频亮相的“费马大定理”、“庞加莱猜想” 以及 “哥德巴赫猜想” 等也不去说了, 单说德国数学家大卫　希尔伯特于世纪之交的 1900 年, 在巴黎召开的国际数学家大会报告中所提出的 23 个问题及其对 20 世纪数学发展所起的巨大影响, 就一直是数学家们津津乐道的话题. 在跨入 21 世纪之际, 由于数学的迅猛发展, 一百年前由希尔伯特一人独揽全局的局面已不能再现, 一批国际顶尖数学家于是被组织起来分别就新世纪数学的发展作出预测、提出问题, 并出版了相应的专集; 而美国的克雷 (Clay) 数学研究所更是以每个 100 万美元的悬赏, 提出了七个千禧年数学难题. 这些自然都是属于数学界的大事, 和大部分人似乎相距甚远, 然而, 每个数学工作者的学术生涯, 又有哪一个不是和尝试解决一些数学问题联系在一起的呢? ！可以毫不犹豫地说, 发现或提出一个有意义的数学问题并下决心为解决这一问题贡献自己的聪明才智, 是迅速走上数学科学的前沿、在数学上作出创新性成果的契机与保证, 也是对一个人在数学方面的品味与判断力的检验和标志. 从这个意义上说, 教育部、科学技术部、中国科学院及国家自然科学基金委员会从培养创新性人才、建设创新型国家的战略目标出发, 联合组织 “10000 个科学难题” 的征集活动, 将会是一件影响深远的举措, 其重要意义自不待言.

然而, 对我们这些被召集来从事具体撰写、收集、整理及编辑工作的人来说, 想想四部委如此高的期望值, 强烈感觉到的却是一种力不胜任的重负, 对目前编辑这一套丛书能否达到预想效果等问题的回答也因而颇费踌躇. 但看到在少数一些学校中指导教师要研究生研究的, 有不少还是已过时或无意义的问题, 对研究生创新精神与能力的培养实际上成了一句空话, 我们也感到, 我们所做的这一项工作, 虽

然决不可能望希尔伯特等数学大师的项背, 但对于改善这种令人痛心的情况, 在一定的程度上推动我国数学的发展, 应该还会起到一些积极的作用. 这使我们鼓起勇气, 坚定信心, 义无反顾地投入了工作.

衷心地感谢广大编委与众多数学家、征集活动办公室、教育部科学技术委员会秘书处以及科学出版社的领导和同志们, 感谢他们的大力支持和辛勤劳动, 经过近一年的努力, 我们终于有了一个阶段性的成果, 丛书的数学卷即将问世. 从这本书里, 通过展示有关数学很多分支学科及数学的应用等方面的大量问题, 对当今一些重要的数学问题大体可以见到一个全貌, 有兴趣的读者还可以在此基础上就其中提到的某一个或某一类问题进行深入探索和研究, 一些研究生也可以在导师的指导下选择其中的某一问题作为自己的研究课题, 这些都是我们希望看到的. 但是, 由于水平、能力和时间的限制, 这一卷所收集的数学问题在各个数学分支学科之间的分布难以做到较好的平衡, 个别学科或分支甚至未能得到充分的反映, 特别在数学与其他学科的交叉及有关外部世界对数学所提出的要求等方面显得更为欠缺, 希望以后能有机会加以补充与完善. 此外, 所提出的这些问题, 科学上的意义及重要性各不相同, 对今后数学发展的作用各有千秋, 难度系数的大小千差万别, 叙述的繁简程度也颇不一致, 均无法一一加以评述, 亦望读者注意并谅解.

李大潜

2008 年 10 月

目　　录

奥特 (Vaught) 猜想与拓扑奥特猜想

Vaught's Conjecture and The Topological Vaught Conjecture

奥特 (Vaught) 猜想既是模型论的中心问题之一也是描述集合论的中心问题之一. 它起源于由奥特在文献 [1] 中所提出的一个问题. 很快在逻辑领域这个问题就变成了一种猜想. 奥特猜想是一个关于一种一阶完备理论的可数模型同构分类个数的双歧命题.

奥特猜想 对于可数一阶语言的一个完备理论 T 而言, T 的全体可数模型或者可以被分成可数多个同构等价类, 或者存在个数和实数个数一样多的同构等价类.

伯吉斯 (Burgess) 在文献 [2] 中证明了一种准三歧性：对于可数一阶语言的一个完备理论 T 而言, 它的全体可数模型的同构等价类的个数或者为可数, 或者为第一个不可数基数, 或者为与整个实数轴等势的基数. 无论是前述问题, 还是这一定理, 关键在于相对于连续统的势的取值的无关性. 奥特猜想只是连续统假设的一个非常平凡的推论. 所以, 奥特猜想的一个比较自然而中肯的表达式就是将其中的短语“和实数的个数一样多”换成一种拓扑等势度量“完备多个”. 这就是由贝克 (Becker) 与珂克尔斯 (Kechris) 于 20 世纪 90 年代早期所提出的拓扑奥特猜想：

拓扑奥特猜想 设 X 是一个完备可分距离空间. 设 G 是一个连续作用在 X 上的带有一个完备可分距离的拓扑群. 那么, 在 G 的作用下或者 X 由可数个轨道所瓜分, 或者存在 X 的一个满足不同元素必据不同轨道之要求的完备子集 Y.

这里的第二种可能性就是通常所讲的“完备多个”轨道. 将一个可数一阶语言的一个完备理论 T 的可数模型的标准表示空间与自然数集合上的无限置换群 S_∞, 经过“逻辑作用”的一种特定作用形式联结起来, 奥特猜想即成为拓扑奥特猜想的一种特殊情形. 人们也常常称由 S_∞ 所定的拓扑奥特猜想的特殊形式为 $L_{\omega_1\omega}$ 奥特猜想.

无论是奥特猜想还是拓扑奥特猜想, 都在模型论领域和描述集合论领域得到相当的关注和研究. 许多数学家, 诸如 Shelah, Lascar, Harrington, Makkai, Buechler, Steel, Becker, Kechris 以及 Hjorth 等, 都在这一方面做出了大量的研究和探索. 比如, 如果只考虑 ω- 稳定理论, 奥特猜想被 Shelah, Harrington 和 Makkai 在文献 [4] 中所证明; 如果所考虑的作用群还带有完备的左不变距离, 那么相应的拓扑奥特猜想也成立[5]. 有关这两个问题研究进展的一篇很好的综述文章目前应当是文献 [3].

参 考 文 献

[1] Vaught R L. Denumerable models of complete theories // Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, PWN, Warsaw, 1961, 303-321

[2] Burgess J P. Equivalence generated by families of Borel sets // Proceedings of the American Mathematical Society, 1978, 69: 323-326

[3] Becker H, Kechris A S. The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions. Cambridge: Cambridge University Press, 1996

[4] Shelah S, Harrington L A, Makkai M. A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories. Isreal Journal of Mathematics, 1984, 49: 259-280

[5] Becker H. Polish group actions：dichotomies and generalized elementary embeddings. Journal of the American Mathematical Society, 1998, 11(2): 397-449

撰稿人：高 速
美国北德克萨斯大学

超紧基数典型内模型问题

The Problem of Canonical Inner Models of Supercompact Cardinals

集合论的内模型 M, 是在集合论体系下确切定义出来的一个含有全部序数的传递类, 并且集合论公理体系 ZF 中的每一条公理 σ 相对于 M 的解释 σ^M, 都是一条 ZF 中的定理.

为了解决一般连续统假设和选择公理的相对和谐性, 戈德尔 (Gödel) 于 1938 年[3,4] 定义了第一个 ZF 的内模型 L, 由全体可构造集组成的类. 戈德尔证明了选择公理和一般连续统假设在 L 中的解释成立, 从而证明了选择公理和一般连续统假设同集合论体系 ZF 的相对和谐性或者相对无矛盾性.

戈德尔的内模型有很多良好的性质, 可以被用来解决许多问题的解的相对和谐性. 但是, 因为 L 是一个最基本的内模型, 它容纳不了高阶大基数的存在. 斯科特 (Scott) 于 1961 年[8] 证明了如果存在一个可测基数, 那么该基数上的非平凡规范测度都不在 L 之中. 索洛韦 (Solovay)[9] 因此定义了由相对于一个非平凡规范测度 U 的可构造集组成的内模型 $L[U]$. 在这个内模型中, 存在一个非平凡规范测度 $U^* = U \cap L[U]$, 并且 $L[U^*] = L[U]$. 后来人们发现 $L[U]$ 中有很多类似于 L 的性质 (见文献 [9]), 比如有很好的整体秩序 (从而导出选择公理), 一般连续统假设成立, 等等.

在探索可能的高阶无穷存在性原理的过程中, 索洛韦[10] 引入了可测基数的一个非常自然的强化性定义延拓：称一个不可数正则基数 κ 是一个超紧基数当且仅当对于任何一个大于等于 κ 的基数 λ, 都存在一个满足如下条件的实质嵌入映射 $j : V \to M$:

(1) M 是一个内模型; (2) κ 是第一个满足不等式 $\lambda < j(x)$ 的序数解; (3) 如果 f 是一个从 λ 到 M 的映射, 那么 $f \in M$.

题目中所陈述的超紧基数典型内模型问题可以表述成如下目标规划：

超紧基数典型内模型目标规划　构造一个容纳一个超紧基数并能够在其中进行精细结构分析的典型内模型.

这一目标规划据说是由索洛韦和 Mitchell 等人于大约 35 年前提出的 (参见文献 [2]). 在这一目标规划的驱动之下, 过去 30 多年里, 经过 Mitchell[6,7], Dodd 和 Jensen[1]、Martin[5]、Steel[5,7,11]、Neeman、以及 Woodin 等人的不懈努力, 大基数

内模型研究过程取得很好的发展. 但是, 据目前的情形来看, 离这一目标规划的完全实现似乎还有很长的路要走.

参 考 文 献

[1] Dodd A J, Jensen R B. The core model. Ann Math Logic, 1981, 20: 43-75

[2] Foreman, Matthew, Menachem Magidor and Saharon Shelah. Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular unltrafilters. Part I, Annals of Mathematics, 1988, 127: 1-47

[3] Gödel Kurt F. The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis // Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1938, 24: 556-557

[4] Gödel Kurt F. Consistency-proof of the Generalized Continuum-Hypothesis // Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1939, 25: 220-224

[5] Martin D A, Steel J R. Iteration trees. Journal of American Math Soc, 1994, 7: 1-73

[6] Mitchell W J. Hypermeasurable cardinals. Logic Colloquium'78(Boffa M et al, eds) Stud. Logic Foundations Math. 97 North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979, 303-316

[7] Mitchell W J, Steel J R. Fine Structure and Iteration Trees. Berlin: Springer-Verlag, 1994

[8] Scott D S. Measurable cardinals and constructible sets. Bull Acad Polon Sci Sér Sci Math Astronom Phy, 1961, 9: 521-524

[9] Silver J H. The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal. Axiomatic Set Theory, Proc Sympos Pure Math Vol XIII, Amer Math Soc, Providence, R I, 1971, 391-395

[10] Solovay R M. Strongly compact cardinals and the GCH. Proceedings of the Tarski Symposium(Henkin L et al, eds). Proc Sympos Pure Math Vol XXV, Amer Math Soc, Providence, R I, 1974, 365-372

[11] Steel J R. The Core Model Iterability Problem. Berlin: Springer-Verlag, 1996

撰稿人：冯　琦

中国科学院数学与系统科学研究院

递归可枚举度中的格嵌入问题和双量词理论可判定性问题

Lattice Embedding Problem and The Decidability Problem of H_2-Theory in Recursively Enumerable Degrees

递归可枚举度的格嵌入问题的历史可以追溯到 20 世纪 60 年代, 从那时起, 很多递归论学家都在该问题上花过心血, 但至今仍未完全解决. 研究格嵌入问题的动机之一是揭示度结构的复杂程度. 此外已知的关于格的不可判定性结果, 通过嵌入可以引入到递归可枚举度当中. 问题叙述很简单：

格嵌入问题 一个格能被嵌入递归可枚举度的充分必要条件是什么?

我们简单回顾格嵌入问题的历史, 由于篇幅关系我们略去文献出处及术语的定义, 读者可以参考文献 [1]、[2]. 1966 年 Lachlan 和 Yates 独立地证明了极小对的存在, 从而推出钻石格可以嵌入. 这是格嵌入的第一个结果. 此后, Lerman 和 Thomason 证明了所有可数分配格都可以嵌入, Lachlan 1970 年证明了非分配格 M_3 和 N_5 可以嵌入, 1980 年, Lachlan 和 Soare 举出了第一个不可嵌入格的例子 S_8. 80 年代末, 人们一度分离出所谓非嵌入性条件, 并猜想所有不满足该条件的格都可以嵌入. 但 Lempp 和 Lerman 1997 年找到一个他们称为 L_{20} 的格并不满足该条件但也不能嵌入.

显然格嵌入问题的解决会使人们对递归可枚举度本身的代数结构有更清晰的了解, 但它的意义并不局限于此, 人们普遍认为格嵌入问题的解决会为递归可枚举度片断可判定性问题扫清技术障碍.

从逻辑角度来看, 关于一个数学结构的最重要问题之一是其理论是否可以判定, 也就是说是否有一个算法能够判断任意语句在该结构中是否成立. 1982 年 Harrington 和 Shelah 证明了递归可枚举度的理论是不可判定的. 从那以后, 问题转化成到底在哪一个片段上该理论是不可判定的. 1998 年 Lempp, Nies 和 Slaman 证明了三量词理论是不可判定的. 由于在 50 年代末人们已知单量词理论是可以判定的, 所以唯一留下的问题是：

双量词理论可判定性问题 递归可枚举度的双量词理论是不是可以判定的?

由于格嵌入问题是双量词理论可判定性问题的一个有代表性的子问题, 人们普遍认为应该从格嵌入问题入手, 解决格嵌入问题的思想或许能应用到后一问题上.

参 考 文 献

[1] Lempp S, Lerman M and Solomon R. Embedding finite lattices into the computably enumerable degrees-a status survey // Chatzidakis Z, Keopke P and Pohlers W. Logic Colloquium'02, Lecture Notes in Logic, 27, ASL, Wellesley, MA, 2006

[2] Lerman M. Embeddings into the computably enumerable degrees // Cholak P, Lempp S, Lerman M and Shore R A, eds. Computability theory and its applications(Boulder, CO, 1999), Contemp Math, 257: 191-205. AMS, Providence, RI, 2000

撰稿人：杨　跃
新加坡国立大学

高层有限波雷尔 (Borel) 等价关系中的两个问题

Two Problems Related to Hyperfinite Borel Equivalence Relations

高层有限等价关系的研究源自测度理论中的遍历理论, 后来演变成描述集合论关于等价关系研究的中心概念之一. 而描述集合论关于等价关系的研究又对数学中的分类问题的复杂性比较提供很好的应用, 相应的综述可见 Hjorth 的专著[1].

一个完备可分距离空间 X 上的一个等价关系 E 是一个有限等价关系当且仅当 E 的每一个等价类都是一个有限集合. 而称 E 为高层有限等价关系当且仅当它是一系列逐步粗化起来的有限波雷尔等价关系的极限, 准确地讲, 当且仅当存在一个满足下述三个要求的 X 上的等价关系的序列 $\langle E_n | 1 \leqslant n < \infty\rangle$：

(1) 每一个 E_n 都是 X 上的一个有限的波雷尔等价关系;

(2) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$;

(3) $E = \cup_{1 \leqslant n < \infty} E_n$.

Dougherty, Jackson 和 Kechris 在文献 [2] 中提出了一种有关高层有限波雷尔等价关系结构的抽象理论. 但是下述单增极限问题还是一个悬而未决的问题：

单增极限问题 是否一个给定的完备可分距离空间 X 上的任何一系列逐步粗化的高层有限等价关系的极限一定是高层有限的? 也就是说, 如果 X 是一个完备可分距离空间, $\langle E_n | 1 \leqslant n < \infty\rangle$ 是 X 上的一个高层有限等价关系的序列, 而且满足 $E_n \subset E_{n+1}$, E 是 X 上的一个等价关系而且是这个序列的极限, $E = \bigcup_{1<n<\infty} E_n$, 那么, 是否 E 一定也是一个高层有限的?

这里实际上涉及的是一个层次问题. 如果将这样的极限操作继续下去, 我们是否一定得到一般来讲更为复杂的等价关系呢? 与高层有限等价关系相关的一个问题是下面的单纯 (amenable) 等价关系问题：

单纯等价关系问题 是否每一个单纯等价关系都是一个高层有限的等价关系?

这两个问题首先由 Weiss 提出 (参见文献 [2]), 看起来好像单增极限问题和单纯等价关系问题并没有相互导出的可能. 已经知道如果所述空间上有一个波雷尔概率测度, 那么, 几乎处处都是肯定答案. 但一般性问题的求解十五年来似乎进展不大. 现在仅仅知道如果一个单纯等价关系是由一个可数交换单纯群的作用而导出, 那么它是一个高层有限等价关系[3].

参 考 文 献

[1] Hjorth G. Classfication and Orbit Equivalence Relations. American Mathematical Society, RI, 2000

[2] Dougherty R, Jackson S and Kechris A S. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. Transactions of the American Mathematical Society, 1994, 341: 193-225

[3] Gao S, Jackson S. Countable Abelian group actions and hyperfinite equivalence relations. Preprint, 2007

撰稿人：高　速
美国北德克萨斯大学

极小塔问题

The Minimal Tower Problem

极小塔问题是基数不变理论中 (集合论研究领域之一) 的核心问题之一. 这个问题最早出现在 Rothberger 20 世纪 40 年代的工作中, 参见文献 [3]. 问题涉及两个连续统基数不变量 p 与 t 是否在 ZFC 下可证明是相等的, 其中 p 为伪交数, t 为塔数, 定义为：

$p = \min\{|A| : A \subseteq P(\omega)$, 其中 A 具有强有限交性质, 但不存在自然数集 ω 的无穷之集 a, 使得 $\forall x \in A(|a - x| < \omega)\}$,

$t = \min\{|T| : T = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ 满足式 $\alpha < \beta$ 则有 $|x_\beta - x_\alpha| < \omega$ 但不存在 ω 的无穷之集 a, 使得 $\forall_\alpha < \lambda(|\alpha - x_\alpha| < \omega)\}$.

此问题是基数不变量理论中的历史最悠久的公开问题, 它的解决将对力迫理论的发展起到巨大的推动作用. 此问题难度巨大, 众多研究人员对其展开过深入研究, 但至今仍未解决.

参 考 文 献

[1] Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum // Foreman M, Kanamori A and Magidor M. Handbook of set Theory, to appear

[2] van Douwen E K. The integers and topology // Kunen K and Vaughan J, Handbook of set Theoretic Topology. North-Holland, Amsterdam, 1984, 111-167

[3] Rothberger F. On some problems of Hausdoff and of sierpinski. Fund Math, 1948, 35: 29-46

撰稿人：张树果
四川大学

$r = r_\omega$? 及 $s = s_\omega$?

$r = r_\omega$? and $s = s_\omega$?

在 ZFC 下是否有 $r = r_\omega$? 其中

$$r = \min\{|R| : R \subseteq [\omega]^\omega, \forall x \subseteq \omega, \exists y \in R(|y - x| < \omega \text{ 或 } |y \cap x| < \omega)\},$$

$$r_\omega = \min\{|R| : R \subseteq [\omega]^\omega, \forall x_n(x_n \subseteq \omega : n \in \omega), \exists y \in R, \forall n(|y - x_n| < \omega \text{ 或 } |y \cap x_n| < \omega)\}.$$

不难证明 r_ω 是满足下列性质的集族的最小基数：$R \subseteq [\omega]^\omega$ 使得对每个有界实数序列 $(x_n)_{n\in\omega}$, 存在 $A \in R$ 使得 $(x_n)_{n\in A}$ 为收敛子列. 若 $(x_n)_{n\in\omega} \in 2^\omega$, 则上面最小基数为 r. 故此问题在实数收敛理论中有重要意义. 这个问题最早由 Vojtas 在文献 [3] 中提出. 文献 [1] 中证明了要得到 $r < r_\omega$ 的模型需要新的力迫技巧.

另外此问题的对偶问题 $s = s_\omega$? 也是未解决的公开问题, 其中

$$s = \min\{|A| : A \subseteq [\omega]^\omega,\ \forall x \in [\omega]^\omega,\ \exists a \in A(|x - a| = |x \cap a| = \omega)\},$$

$$s_\omega = \min\{|A| : A \subseteq [\omega]^\omega,\ \forall B \in [[\omega]^\omega]^\omega,\ \exists a \in A,\ \forall b \in B(|b - a| = |b \cap a| = \omega)\}.$$

这个问题最初由 Malyhin 提出, 参见文献 [4]、[5].

参 考 文 献

[1] Brendle J, Just W, Laflamme C. On the refinement and countable refinement number. Questions and Answers in General Topology, 2000, 18: 123-128

[2] Vaughan J. Small uncountable cardinals and topology // Van Mill J, Reed G M. Open problems in Topology. North-Holland, 1990, 196-218

[3] Vojtas P. More on set-theoretic characteristics of summability of regular (Toeplitz). Comment Math Univ Carolinae, 1998, 39: 269-279

[4] Kamburelis A, Weglorz B. Splitting. Archive for mathematical Logic, 1996, 35: 265-277

[5] Brendle J. Around Splitting and reaping. Comment Math Univ Carolinas, 1998, 39: 269-279

撰稿人：张树果
四川大学

连续统势确定问题

The Problem of The Cardinality of The Continuum

连续统势确定问题 实数集合中到底含有多少个实数? 也就是问, 实数集合的势到底是多大?

连续统势确定问题是集合论中最古老最基本最自然的一个问题.

对于 (无穷) 集合来讲, 两个集合等势的充分必要条件是它们之间存在一个一一对应或者双射. 众所周知, 自然数可以被用来作为有限集合所含元素个数的多少的一种度量: 两个有限集合等势的充分必要条件是它们含有相同个数的元素. 因此, 每一个有限集合的势都唯一地由一个自然数来确定. 类似的, 无限集合的势也都唯一地由一个基数 $\aleph_\alpha$ 来确定 (我们假定选择公理). 最小的无穷基数是 $\aleph_0$, 它代表着全体自然数所组成的集合的势. $\aleph_0$ 之后的第一个基数是 $\aleph_1$, 再其后的第一个基数是 $\aleph_2$, 然后是 $\aleph_3$, 等等. 一般来说, 紧接着基数 $\aleph_\alpha$ 之后的基数是 $\aleph_{\alpha+1}$; 两个基数 $\aleph_\alpha$ 和 $\aleph_\beta$ 的大小之比较由它们的下标 (序数 α 和 β) 的长短来唯一确定. 每一个自然数 n 都是一个比 $\aleph_0$ 小的基数. 对于无限基数来说, $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$, 等等.

Cantor 于 1873 年 12 月证明了由全体实数所组成的集合 (即连续统) 的势至少是 $\aleph_1$. 现在问题出来了: **到底哪一个基数 $\aleph_\alpha$ 是连续统的势呢? 是 $\aleph_1$? 是 $\aleph_2$, $\aleph_3$, 还是别的一个什么 $\aleph_\alpha$?** Cantor 当年曾经猜想: **连续统的势是第一个不可数的基数 $\aleph_1$.** 这就是 Cantor 连续统假设. 这也是希尔伯特 (Hilbert)1900 年提出的 23 个问题中的第一问题.

戈德尔 (Gödel)1938 年[3,4] 用内模型 (可构造集) 方法证明了连续统假设和集合论公理系统的和谐性; Cohen 1963 年[1,2] 用外模型 (力迫) 方法证明了连续统假设之否定和集合论公理系统的和谐性. 从而, 连续统假设是一个同集合论公理系统独立的命题. 所以, 要想得到关于连续统势的确定基数值, 集合论公理系统中必须引进新的公理. 现在的问题是: **什么样的命题可以作为被广泛接受的自然的不证自明的新的公理并可以用来确定连续统势的基数值**?

近年来, 人们利用从大基数或者高阶无穷假设之下得到的一些存在性原理[5] 计算出连续统的势为 $\aleph_2$. 近年来 Woodin 发展了一种新的逻辑, Ω- 逻辑, 意图来解决这一问题. Ω- 逻辑中一个中心的问题是 Woodin 提出的 Ω- 猜想, 这一猜想的真假与否同大基数的内模型的存在性休戚相关. 详细内容请见文献 [6].

参 考 文 献

[1] Cohen Paul J. The independence of the Continuum Hypothesis I. Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1963, 50: 1143-1148

[2] Cohen Paul J. The independence of the Continuum Hypothesis II. Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1964, 51: 105-110

[3] Gödel Kurt F. The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1938, 24: 556-557

[4] Gödel Kurt F. Consistency-proof of the Generalized Continuum-Hypothesis. Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 1939, 25: 220-224

[5] Foreman, Matthew, Menachem Magidor and Saharon Shelah. Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular unltrafilters. Part I, Annals of Mathematics, 1988, 127: 1-47

[6] Woodin Hugh W. The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal. Berlin: Walter de Gruyter, 1999

撰稿人：冯 琦
中国科学院数学与系统科学研究院

奇异基数问题

The Singular Cardinals Problem

比连续统势确定问题更一般的问题是无穷集合之幂集的势确定问题. Cantor 1873 年证明了任何一个集合的幂集的势一定严格大于那一集合的势. 那么, 给定一个无穷集合 X, 假设 X 的势为 $\aleph_\alpha$, X 的幂集 $P(X)$ 的势是哪一个 $\aleph_\beta$ 呢? Cantor 告诉我们 $\beta \geqslant \alpha+1$. 戈德尔告诉我们假定 $\beta=\alpha+1$, 也就是一般连续统假设, 不会导致任何矛盾.

这里出现了一种刚开始令人不可思议的局面. 按照定义, 无穷基数被分为两类: 一类是正则基数, 另一类是奇异基数 (它们是某一组单调递增的比较小的正则基数的短序列的极限, 以一个奇异基数为极限的所有这样的序列中最短序列的长度被称为该奇异基数的梯度).

在 Cohen 1963 年的工作之后, Easton[2] 用类力迫方法证明了现有集合论公理体系对于正则基数的幂集的势能够说的就只有那早已众所周知的三个不等式. Eastom 的工作留给人们一个问题: 那么奇异基数的幂集之势又将如何呢? 也就是说, 奇异基数的幂集的势都有什么样的可能性呢? 于此问题直接相关的一个重要假设如下:

奇异基数假设 如果一个奇异基数 $\aleph_\alpha$ 的梯度 κ 的幂集的势小于 $\aleph_\alpha$, 那么所有从 κ 到 $\aleph_\alpha$ 的函数的全体所成之集的势为 $\aleph_{\alpha+1}$.

在奇异基数假设之下, 任何一个奇异基数的幂集的势则完全由比它小的正则基数的幂集之势的上确界唯一确定.

Silver[7] 证明了任何一个具有不可数梯度的奇异基数都不会是一般连续统假设的第一个反例. 紧接着, Jensen 证明极其深刻的覆盖引理[1], 从而将奇异基数假设的真假与否同大基数的存在性紧密地联系起来. Magidor[5] 第一个从大基数出发, 证明了最小的奇异基数可以成为一般连续统假设的第一个反例的可能性. 这些结果表明奇异基数的幂集的势的确定问题同正则基数的幂集的势的确定问题有着本质的差异. 后来, 同样从大基数出发, Foreman 和 Woodin[3] 合作证明了一般连续统假设可以处处不成立. 于是, 我们看到了有关幂函数之势的两种完全极端的局面.

迄今为止, 最根本的悬而未决问题依旧是: 幂函数的势到底怎样取值? 到底该如何计算? 将这一问题限定到奇异基数之上便有如下的奇异基数问题:

找到一组完全刻画奇异基数的幂集之势的取值范围的性质或者一套完备的有

关奇异基数的幂集之势取值的计算规则.

一个比较具体的问题就是：假设对于每一个自然数 n 都有 $\aleph_n$ 的幂集之势为 $\aleph_{n+1}$, 那么第一个奇异基数 $\aleph_\omega$ 的幂集之势是否一定严格小于 $\aleph_{\omega_1}$(第 ω_1 个基数)?

在前述 Silver 的工作[7] 之后, Galvin 和 Hajnal[4] 首先对一类奇异基数的幂集之势给出了上界计算公式. 接下来, Shelah 在这个问题上完成了非常突出的工作. 他的 pcf 理论给出了关于一类奇异基数的幂集之势的很好的上界. 比如, 关于上述具体问题, Shelah 证明了在相应 (实际上稍弱) 假设条件下, $\aleph_\omega$ 的幂集之势小于 $\aleph_{\omega_4}$. 在 Shelah 的 pcf 理论中也有一个悬而未决的关键问题：给定一个满足不等式 $|a| < \min(a)$ 的正则基数的一个集合 a, 是否一定有等式 $|pcf(a)| = |a|$? 欲知详情请见文献 [6].

参 考 文 献

[1] Devlin K J, Jensen R B. Marginalia to a Theorem of Silver. Berlin: Springer-Verlag, 1975, 115-142

[2] Easton W B. Powers of regular cardinals. Annals of Mathematical Logic, 1970, 1: 139-178

[3] Foreman M, Hugh Woodin W. The generalized continuum hypothesis can fail everywhere. Annals of Mathematics, 1991, 133(2): 1-35

[4] Galvin F, Hajnal A. Inequalities for cardinal powers. Annals of Mathematics, 1975, 101(2): 491-498

[5] Magidor M. On the singular cardinal problem. II, Annals of Mathematics, 1977, 106(2): 514-547

[6] Shelah S. Cardinal Arithmetic. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1994

[7] Silver J H. On the singular cardinal problem // Vancouer B C. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1974, Vol 1, Canad Math Congress, Montreal, Que, 1975, 265-268

撰稿人：冯 琦

中国科学院数学与系统科学研究院

萨克斯 (Sacks) 关于波斯特 (Post) 问题的度不变解问题和马丁 (Martin) 猜想

Sacks' Problem on Degree Invariant Solution of Post Problem and Martin's Conjecture

在递归论的早期研究中, 所有不可判定的可公理化的问题都是完全的, 也就是说与停机问题相同的图灵度 $0'$. 那么有没有不完全的不可判定的问题呢, 或者说有没有非递归的不完全的递归可枚举度? 这就是美国数学家波斯特于 1944 年提出的波斯特问题. 虽然波斯特问题本身早已被美国数学家弗里德伯格 (Friedberg) 和前苏联数学家穆契尼克 (Muchnik) 在 50 年代给出了肯定的回答, 由它引申出来的各种问题对递归论的发展起了不可估量的推动作用, 其中对自然的不完全的不可判定问题的寻找直至今天仍在继续.

弗里德伯格和穆契尼克的解答用的是构造方法, 被公认为是不自然的. 虽然逻辑界对自然没有精确定义, 但对波斯特问题来说, 通常认为, 自然的一个必要条件是能被一个与代表元无关的度上的算子定义. 这就引出了萨克斯 (Sacks) 关于波斯特问题有没有度不变解的问题. 其精确叙述如下：

问题 有没有一个度不变的递归可枚举算子 $W: 2^\omega \to 2^\omega$ 使得对任何自然数子集 $A, A <_T W(A) <_T A'$, 其中算子 W 被称为递归可枚举的, 如果存在自然数 e 使得对任意 $A, W(A) = W_e^A; W$ 被称为度不变的如果对所有的 A 和 B, $A \equiv_T B$ 蕴含 $W(A) \equiv_T W(B)$.

如果我们把决定性公理 (AD) 引进到对图灵度上的算子研究中, 下面的马丁 (Martin) 猜想给出了关于度上自然算子的全部刻画. 所有自然算子某种意义上讲都是跃迁算子, 这是马丁猜想的意义所在.

马丁猜想 假定 $ZF + AD + DC$, 那么

(1) 如果 $f: 2^\omega \to 2^\omega$ 是度不变的, 那么或者 f 在一个锥上是度递增的, 或者在一个锥上是常数 (就度而言);

(2) 在度不变的函数上定义如下 $\leqslant$ 关系：$f \leqslant g$ 当且仅当在一个锥上 $f(x) \leqslant_T g(x)$, 则 $\leqslant$ 是一个前良序, 其中任何 f 的后继是由图灵跃迁算子导出的 f', 其定义为 $f'(A) = (f(A))'$.

如果马丁猜想中 (2) 是对的, 基于可定义集合的性质只需要决定性公理对可定义集成立的常理, 和决定性公理对波雷尔 (Borel) 集成立的事实, 几乎可以肯定萨

克斯问题里的递归可枚举算子是不存在的; 不仅没有递归可枚举算子, 连那样的波雷尔算子都没有. 目前关于萨克斯问题的部分结果有：Lachlan 1975 年证明了如果要求归约的一致性, 那么萨克斯问题的解是不存在的. Downey 和 Shore 1997 年证明了不存在度不变的半跃迁算子. 如果把一致性条件加上度不变算子上, 马丁猜想也已被 Steel(1982), Slaman 和 Steel(1988) 及 Becker(1988) 完全解决.

参 考 文 献

[1] Becker H. A characterization of jump operators. Journal of Symbolic Logic, 1988, 53: 708-728

[2] Downey R, Shore R A. There is no degree invariant half-jump. Proc Am Math Soc, 1997, 125: 3033-3037

[3] Friedberg R M. Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability. Proc Nat Ac Sci, 1957, 43: 236-238

[4] Lachlan A H. Uniform enumeration operators. Journal of Symbolic Logic, 1975, 40: 401-409

[5] Martin D A. The axiom of determinacy and reduction principles in the analytic hierarchy. Bull Am Math Soc, 1968, 74: 687-689

[6] Muchnik A A. On the unsolvability of the problem of reducibility in the theory of algorithms. Dokl Akad Nauk SSSR N S 1956, 108: 29-32

[7] Post E L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull Am Math Soc, 1944, 50: 84-316

[8] Sacks G E. Degrees of Unsolvability. Princeton: Princeton University Press, NJ 1963; 2nd ed. 1966

[9] Slaman T, Steel J R. Definable functions on degrees. in Cabal Seminar 81-85, Kechris A S, Martin D A and Steel eds J R., LNMS 1333. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 37-55

[10] Steel J R. A classification of jump operators. Journal of Symbolic Logic, 1982, 47: 347-358

撰稿人：杨　跃
新加坡国立大学

图灵 (Turing) 等价问题

The Turing Equivalence Problem

这是一个位于可计算性理论和描述集合论两大领域边界上的问题. 我们知道可计算理论中的图灵机很自然地诱导出自然数集合之间的一种等价关系：两个自然数的子集合 x 和 y 被称为图灵等价, 记成 $x \equiv_T y$, 当且仅当 x 和 y 具有相同的图灵度.

图灵等价问题 在所有可数波雷尔 (Borel) 等价关系中, 图灵等价关系 $\equiv_T$ 是否具有通用性?

设 X 为一个完备可分距离空间, X 上的一个等价关系 E 是一个波雷尔 (Borel) 等价关系当且仅当 E 是乘积空间 $X \times X$ 的一个波雷尔子集. 当它的每一个等价类都是一个可数集合时, 又称此等价关系为可数等价关系. 现设 X 和 Y 为两个完备可分距离空间, 并设 E 和 F 分别为 X 和 Y 上的等价关系. 我们说 E 可以波雷尔归约为 F, 记成 $E \leqslant_B F$, 当且仅当 E 可以由一个从 X 到 Y 的波雷尔映射 $f : X \to Y$ 经过 F 如下表示出来：

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 E x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) F f(x_2).$$

这种波雷尔归约实际上给出了等价关系之间的一种准偏序, 在一定意义上, 给出了它们之间的一种复杂性的比较. 已经知道在所有可数波雷尔等价关系中, 存在一个波雷尔归约下最大的可数波雷尔等价关系[1]. 这一等价关系被认为是一种含有通用性的可数波雷尔等价关系：任何一个可数波雷尔等价关系都可以波雷尔归约到这一等价关系上来. 一个通用可数波雷尔等价关系的例子可以这样得到：考虑由两个生成元生成的自由群 $\mathbb{F}_2$, 由它所决定的乘积空间 $2^{\mathbb{F}_2}$, 以及由移位所导致的群作用. 这样产生的等价关系就是一个通用可数波雷尔等价关系. 前面所述的图灵等价关系是一个可数波雷尔等价关系. 人们自然很关心这一等价关系, 以及它同别的波雷尔等价关系的由波雷尔归约所产生的可能联系. 比如, Slaman 和 Steel 在文献 [2] 中实际上证明了图灵等价关系不会是高层有限 (hyperfinite) 等价关系. 于是, Kechris 在文献 [3] 中提出了上述问题, 他也注意到上述问题的肯定解答会否定 Martin 猜想.

参 考 文 献

[1] Dougherty R, Jackson S and Kechris A S. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. Transactions of the American Mathematical Society, 1994, 341: 193-225

[2] Slaman T, Steel J R. Definable functions on degrees // Cabal Seminar 81-85, Lecture Notes in Math, 1333, Berlin: Springer-Verlag, 1988, 37-55

[3] Kechris A S. Amenable equivalence relations and Turing degrees. Journal of Symbolic Logic, 1991, 56(1): 182-194

撰稿人：高　速
美国北德克萨斯大学

图灵 (Turing) 度的自同构问题

The Rigidity Problem in Turing Degrees

1936 年英国数学家图灵 (Turing) 提出了图灵机的概念, 从而给出了可计算性的精确定义. 图灵机的产生是递归论的最重要的源头之一, 也为日后计算机科学的诞生有重大影响. 图灵还提出了相对可计算性的概念. 如果我们把彼此互相计算的自然数子集等同起来, 其等价类被称为图灵度. 让我们用 $\mathcal{D}$ 表示所有的图灵度, $\mathcal{D}$ 按照相对计算性自然形成一个偏序结构. 对 $\mathcal{D}$ 结构的研究是递归论里最中心的部分, 而本问题可以说是关于图灵度整体结构最重要的问题.

自同构问题有多种表述, 例如有整体的, 即关于 $\mathcal{D}$ 本身的; 也有局部的, 如关于递归可枚举度的. 它们彼此之间是相互关联的. 由于篇幅关系我们只讨论整体部分. 这里最经典的叙述如下 (见文献 [1]):

自同构问题 $\mathcal{D}$ 上有没有非平凡的自同构?

这里自同构是指保持偏序的双射. 近年来, Slaman 和 Woodin 在自同构问题的研究上取得了重大进展, 他们将问题表述成如下形式:

互释猜想[4] $\mathcal{D}$ 和二阶算术是互释的, 换句话说, 下列关于 $\vec{p}$ 和 d 的关系 "$\vec{p}$ 是一个标准算术模型和实数 X 的编码, 并且 X 的图灵度是 d" 是在图灵度 $\mathcal{D}$ 里可定义的.

可以证明互释猜想成立当且仅当 $\mathcal{D}$ 上没有非平凡自同构.

自同构问题的解决对递归论的研究会产生深远影响. 如果互释猜想是对的, 那么所有关于图灵度 $\mathcal{D}$ 的逻辑问题都可以转化成关于二阶算术的问题, 图灵度 $\mathcal{D}$ 只不过是二阶算术的不同表现. 如果互释猜想是不对的, 那么在图灵度的局部结构与整体结构上存在本质性的不同, 因为 Slaman 和 Woodin 证明了任何图灵度的自同构在 $0''$ 以上是恒同函数.

目前在自同构问题上最好的成果是 Slaman 和 Woodin 的工作, 他们利用集合论和递归论的工具对图灵度上的自同构作了精细的分析, 得出了一系列深刻的结果. 例如, 从他们的分析中可以得出存在一个图灵度 g, 使得所有自同构都被其在 g 上的像所决定, 而且至多有可数多个自同构.

参 考 文 献

[1] Rogers H Jr. Some problems of definability in recursive function theory // J N Crossley,

ed. Sets, Model and Recursion Theory. Amsterdam: North-Holland, 1967, 183-201

[2] Slaman T A. Global Properties of the Turing Degrees and the Turing Jump // Proceedings of Singapore Workshop Website: http: // math. berkerkey.edu/~slaman/papers /IMS_slaman.pdf

[3] Slaman T A, Woodin W H. Definability in the Turing degrees. Illinois J Math, 1986, 30(2): 320-334

[4] Slaman T A, Woodin W H. Definability in degree structures. preprint Website: http: // math. berkerkey. edu/~slaman/talks/sw.pdf

撰稿人：杨 跃
新加坡国立大学

是否存在一个稳定的一阶完全理论，它有大于一的有穷多个可数模型

Does Exist A Stable First Order Theory with Finitely Many (but more than one) Countable Models?

这是一个数理逻辑学家努力了几十年仍尚未解决的模型论中的主要问题之一, 先看一看这个问题的由来.

1970 年 Morley 证明了 $\aleph_1$- 范畴的理论最多有 $\aleph_0$ 个可数模型.

1971 年 Baldwin 和 Lachlan 证明了 $\aleph_1$- 范畴的理论只可能有一个或 $\aleph_0$ 个可数模型.

1973 年 Lachlan 证明了超稳定的理论只可能有一个或无穷多个可数模型. 另外, Vaught 证明了任何完全理论都不可能恰好有两个可数模型.

这样, 人们已经证明了不存在 $\aleph_1$- 范畴的理论, ω- 稳定的理论, 或是超稳定的理论具有多于一的有穷多个可数模型. 另一方面, 人们也发现或构造了一些具有有穷多个可数模型的理论, 但它们都是不稳定的理论, 而且均是从结构 $(Q, <, 0, 1)$ 变形而来, 它们可数模型的个数是 3 个, 6 个, 7 个或 9 个, 等等. 正是由于在这些结构中存在序关系 $<$, 从而它们的理论就是不稳定的.

1988 年 E.Hrushovski 巧妙地构造了一个模型, 它的理论是稳定的, 但不是 ω-稳定的理论. 但这个理论的所有可数模型都是同构的, 也就是说在同构意义上, 它只有一个可数模型. Hrushovski 用这个理论否定了下述 Lachlan 猜想:

T 是 $\aleph_0$- 范畴的和稳定的, 则它是 ω- 稳定的.

综上所述, 人们仍然不知道是否存在着一个稳定的理论, 它有多于一的有穷多个可数模型.

本人猜想很可能这个问题的答案是否定的.

参 考 文 献

[1] Baldwin J. Fundamentals of Stability Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 8–9

[2] Morley M. The number of countable models. The Journal of Symbolic Logic, 1970, 35: 14-18

[3] Baldwin J, Lachlan A. On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, 1971, 36: 79-96

[4] Vaught R L. Denumerable models of complete theories // Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, PWN, Warsaw: Infinitistic Methods, 1961, 303-321

[5] Peretjat'kin M. On complete theories with a finite number of denumerable models. Algebra and Logic, 1973, 12: 310-326

[6] Pillay A. Number of countable models. The Journal of Symbolic Logic, 1978, 43: 492-496

撰稿人：史念东
East Sroudsburg University of Pennsylvania, USA

Cherlin-Zilber 猜想

Cherlin-Zilber Conjecture

这是一个由 G.Cherlin[1] 和 Boris Zilber[2] 于 30 年前提出的有关无限单群分类的一个猜想. 这个猜想是模型论研究与代数群研究结合部的一个非常重要的问题. Cherlin-Zilber 猜想断言：一个 Morley 秩为有限的 $\omega-$ 稳定单群一定是某个代数封闭域上的一个代数群.

30 年来, 围绕这一猜想所展开的关于 $\omega-$ 稳定群的研究工作取得了非常突出的进展. 这种研究不仅应用模型论的许多新的思想和方法, 而且也用到来自有限群理论研究领域, 特别是有关有限单群分类工作中的许多想法. 有关这一猜想研究进展的一个非常好的综合报告便是 Borovik 和 Nesin 合著的专著[3]. 有兴趣的读者一定会从这本书中找到有用的材料. 尽管这一猜想目前依然没有被解决, 与此相似的关于 o– 极小结构的 Cherlin 猜想则被 Peterzil, Pillay 和 Starchenko[4] 三人所证明.

参 考 文 献

[1] Cherlin G. Groups of small Morley rank. Ann Math Logic, 1979, 17: 1-28

[2] Zilber B I. Groups and rings whose theory is categorical. Fundam Math, 1977, 95: 173-188

[3] Borovik A V, Nesin A. Groups of Finite Morley Rank. New York: Oxford University Press, 1994

[4] Peterzil Ya'acov, Pillay Anand, Starchenko Sergei. Simple groups definable in o-minimal structures. Logic Colloquium'96 (San Sebastia'n). Berlin: Springer-Verlag, 1998, 211-218

撰稿人：庞炜恩
美国加州州立大学

带指数函数的实数理论的可判定性问题

Decidability of The Theory of Reals with Exponentiation

Tarski 在文献 [2] 中证明了实数域理论是可判定的 (也就是说有一个计算方法来有效地判定实数域理论中的任何一个命题是否为一个定理), 从而证明了初等平面几何理论是可以判定的 (当然, Tarski 的算法是一个计算复杂性很高的通用算法, 不具有很大的实用性. 应当看到, 吴文俊提出的关于某一部分几何命题进行有效的计算机机械证明的判定方法是与 Tarski 这一可判定性工作紧密相关的.). Tarski 关于这一可判定性定理的模型论证明依赖于对实数封闭域实施量词消去方法. Tarski 问他的这一个结果能否被扩展到包括指数函数. 也就是说, 将原来实数域上的语言 $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ 扩展到一个新的语言：$\mathcal{L}_{\exp} = \{+, \cdot, 0, 1, \exp\}$. Tarski 的定理是关于在语言 $\mathcal{L}$ 下实数域一阶理论的可判定性. 他问实数在新的语言 $\mathcal{L}_{\exp}$ 下一阶理论是否也可判定. 迄今为止, 这一问题仍然没有答案.

朝着解决这一问题的目标, 在这一领域中工作的数学家们取得了一系列显赫的进展. Wilkie 于 1991 完成了第一个突破性工作：在文献 [4] 中, 他证明了, 尽管它不具备量词消去条件, 实数的这一理论 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$ 是模型完全的 (一种比具备量词消去条件稍弱的性质). 由这一结果加上 Khovanski 的一个定理, 就能够导出这一新的结构 $\mathbb{R}_{\exp}$ 具有 o– 极小特性. 此后, MacIntyre 和 Wilkie[3] 合作证明了如果 Shanuel 猜想成立, 那么实数结构 $\mathbb{R}_{\exp}$ 的一阶理论是可判定的. 他们还给出了实数理论 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$ 的公理描述, 只不过他们的公理描述过于复杂. 实际上, 因为 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$ 是模型完全的, 这一理论应当有一个表达式量词结构形如 $\forall\exists(\Pi_2)$ 的公理描述. 但是, 迄今为此, 没有人知道这样形式的公理描述是个什么样子. 欲知详情, 有兴趣的读者可参见文献 [1].

参 考 文 献

[1] Marker D. Model theory and exponentiation. Notices Amer Math Soc, 1996, 43(7): 753-759

[2] Tarski A. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. RAND Corporation, Santa Monica, Calif, 1948

[3] Macintyre A, Wilkie A J. On the decidability of the real exponential field. Kreiseliana, 441–467, A K Peters, Wellesley, MA, 1996

[4] Wilkie A. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. J Amer Math Soc, 1996, 9(4): 1051-1094

撰稿人：庞炜恩
美国加州州立大学

Shelah 唯一性猜想

Shelah Categoricity Conjecture

Shelah 猜想是关于可数语言在一种特殊逻辑下结构唯一存在性的一个断言. 它源于早先 Morley 证明的可数语言在一阶逻辑下所具有的结构存在唯一性定理：对于一个给定的一阶逻辑可数语言 $\mathcal{L}$ 和次语言下的一个理论 T, 如果 T 的模型类相对于某个不可数基数 λ 来说具有唯一性 (即 T 的任何两个基数为 λ 的模型一定同构), 那么, T 的模型类相对于每一个不可数基数 κ 来说具有唯一性.

Shelah 猜想断言：

对于一个给定的可数语言 $\mathcal{L}$ 以及在 $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ (即在逻辑表达式中, 只容许有限个量词, 但容许可数多个不含量词的简单表达式的布尔逻辑运算组合) 逻辑中的一个理论 T, 如果 T 的模型类相对于某个严格大于 $\beth_{\omega_1}$ 的基数 λ 来说具有唯一性 (即 T 的任何两个基数为 λ 的模型一定同构), 那么, T 的模型类相对于任何一个大于等于 $\beth_{\omega_1}$ 的基数 κ 来说具有唯一性.

在文献 [1] 的公开悬而未决问题列表中, Shelah 猜想被表述为关于抽象实质类的一个断言：令 $\mathcal{K}$ 为一个抽象实质类. 如果 $\mathcal{K}$ 关于某个严格大于这个类的 Hanf 数 Hanf($\mathcal{K}$) 的基数 λ 具有唯一性, 那么 $\mathcal{K}$ 关于每一个严格大于这个类的 Hanf 数 Hanf($\mathcal{K}$) 的基数 μ 具有唯一性.

有关这一猜想的详情, 请见文献 [2].

参 考 文 献

[1] Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-isomorphic Models. 2nd edition. Amsterdam: North-Holland, 1990

[2] Grossberg R, VanDieren M. Shelah's categoricity conjecture from a successor for tame abstract elementary classes. J Symbolic Logic, 2006, 71(2): 553-568

撰稿人：庞炜恩
美国加州州立大学

微分封闭域上的平凡强极小集

Trivial Strongly Minimal Sets in Differentially Closed Fields

已知特征为零的微分封闭域理论 (DCF_0) 是 ω– 稳定的. 但是要想完全真正弄懂任何一个 ω– 稳定理论, 关键还在于懂得这个理论的模型的强极小集. 依据所附带的准几何结构, 强极小集被分为三类：平凡的, 局部模的和非局部模的. 对于 DCF_0 而言, 一个非局部模强极小集是和常数域 (一个代数封闭域) 非正交的. 这个结论是由 Hrushovski 和 Sokoloic 所证明的 (但并未公开发表, 欲知详情, 请参见文献 [2]). 他们还证明了对于 DCF_0 而言, 每一个非平凡局部模强极小集是和一个单阿贝尔族的 Manin 核非正交的, 仅此而已, 对于平凡强极小集则所知甚少. 在 DCF_0 中弄懂平凡强极小集依旧是一个很困难的悬而未决的问题.

给定一个强极小集 X, 如果在任何一个模型中, 此模型在强极小集 X 中的元素的维数都是无穷的, 那么我们就称此强极小集 X 是 $\aleph_0$– 不变的. 一个更具体一点的悬而未决的问题是：是否一个特征为零的微分封闭域的每一个平凡强极小集都是 $\aleph_0$– 不变的? 关于这个问题, 限定在 DCF_0 中的超越度为一的强极小集范围之内, Hrushovski 给出了一个肯定的答案. 欲知详情, 请见文献 [1] 和文献 [3].

参 考 文 献

[1] Hrushovski E, Itai M M. On model complete differential fields. Trans Amer Math Soc, 2003, 355(11): 4267-4296

[2] Marker D. The number of countable differentially closed fields. Notre Dame J Formal Logic, 2007, 48(1): 99-113

[3] Marker D. Model theory of differential fields. Model theory, algebra, and geometry, 53-63, Math Sci Res Inst Publ, 39, Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000

撰稿人：庞炜恩
美国加州州立大学

3-Calabi-Yau 代数的分类

Classifications of 3-Calabi-Yau Algebras

设 k 是域, d 是整数, $\mathcal{A}$ 是态射空间有限维的三角 k- 范畴. 若对任意 $X, Y \in \mathcal{A}$, 均存在 k- 同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X[d])^*$, 其中 * 是 k- 对偶, $[d]$ 是 d 次平移函子, 且这些同构对 X 和 Y 均是自然的, 则称 $\mathcal{A}$ 是**d-CY 范畴**.

这个概念最早出现在 Kontsevich 1998 年在巴黎高师的讲义中 [8], Costello, Keller, Ginzburg 分别将其引入共形场论、表示论和非交换几何的研究中[2~4,6]. 它原来是一个很自然的概念. 例如, 设 A-mod 是有限维 k- 代数 A 的有限维模范畴. 若 A 是对称代数, 则稳定三角范畴 $A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$ 是 d-CY 范畴当且仅当 $\Omega^{d+1} \cong \mathrm{Id}_{A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}}$. 而当 H 是有限维对称非半单 Hopf 代数时, $H\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$ 是 d-CY 范畴当且仅当平凡模 k 是周期为 $d+1$ 的 Ω- 周期模. 特别地, 如果 k 的特征整除有限群 G 的阶, 则 $kG\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$ 是 d-CY 范畴当且仅当单位表示是周期为 $d+1$ 的 Ω- 周期模, 这里 Ω 是由第一次合冲 (syzygy) 诱导的稳定范畴的函子.

k- 代数 A 称为**导出 d-CY 代数**, 若有界导出范畴 $D^b(A\text{-mod})$ 是 d-CY 范畴. 考虑 A 的包络代数 $A^e := A \otimes_k A^{op}$. A 称为 **d-CY 代数**, 若 A 是同调光滑的 (即 A 有有限长的有限生成投射 A^e- 模分解), 且存在 A^e- 模同构

$$\mathrm{HH}^i(A, A^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d, \\ A, & i = d, \end{cases}$$

其中 $\mathrm{HH}^i(A, A^e) \cong \mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e)$ 是 Hochschild 上同调群.

Keller[5] 证明了: 若 A 是 d-CY 代数, 则 A 是导出 d-CY 代数. 对任一正整数 d, 均存在 d-CY 代数. 例如, 多项式代数 $k[x_1, \cdots, x_d]$ 是 d-CY 代数. 若 A 是 d-CY 代数, 则对任意 $X, Y \in A$-mod 有 $\mathrm{Ext}^i_A(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^{d-i}_A(Y, X)^*$. 由此可以看出: 若 A 是 d-CY 代数且 $d \neq 0$, 则 A 必定是无限维的.

A 是 0-CY 代数当且仅当 A 半单, A 是 1-CY 代数当且仅当 A 是一元多项式代数的直积. Bocklandt[1] 证明了: 若 A 是由带关系的有限连通箭图给出的导出 2-CY 代数, 则 A 是非 Dynkin 图的预投射代数. 这为 2-CY 代数的分类提供了信息. 而 3-CY 代数更有趣, 这也源于它在数学物理和代数几何中的背景. 例如, 在超弦理论中 B-Model 的边界条件是用 n 维 Calabi-Yau 流形 X 的凝聚层的有界导出范畴 $D^b(Coh(X))$ 描述的: $D^b(Coh(X))$ 是 3-CY 范畴, 但是它太大, 因此人们希望

用 3-CY 代数的有限维模范畴的有界导出范畴来建模.

对自由结合代数 $A = k\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$, Kontsevich[7] 引入偏导数 $\partial/\partial x_i : A/[A, A] \longrightarrow A$; 给定一个元 $\Phi \in A/[A, A]$, 可定义代数 $\mathcal{U}(A, \Phi) = A/\langle \partial\Phi/\partial x_i, 1 \leqslant i \leqslant n\rangle$. 这样的构造也可定义在任意光滑代数 A 上. Ginzburg[3] 用这种方法构造了 3-CY 代数, Bocklandt[1] 将这种方法在有限箭图上加以改进构造了分次导出 3-CY 代数. Ginzburg[3] 提出猜想:

对于任一同调光滑、有限表出的凝聚 3-CY 代数 F, 都存在光滑代数 A 和 $\Phi \in A/[A, A]$, 使得 $F \cong \mathcal{U}(A, \Phi)$.

几乎与此同时, Bocklandt[1] 的工作也表明: 这个猜想对分次导出 3-CY 代数是对的. 然而, 这些结果与 3-CY 代数的完全分类还有相当的距离, 正如 Ginzburg 指出的那样, 这些研究还刚刚开始.

参 考 文 献

[1] Bocklandt R. Graded Calabi Yau algebras of dimension 3, with an appendix “The signs of Serre functor” by M Van den Bergh. J Pure Appl Algebra, 2008, 212(1): 14-32

[2] Costello K. Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories. Adv Math, 2007, 210(1): 165-214

[3] Ginzburg V. Calabi-Yau algebras. Available at arXiv: AG/0612139

[4] Keller B. On triangulated orbit categories. Documenta Math, 2005, 10: 551-581

[5] Keller B. Calabi-Yau triangulated categories. preprint, 2008

[6] Keller B, Reiten I. Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. Adv Math, 2007, 211(1): 123-151

[7] Kontsevich M. Formal (non)commutative sympletic geometry. The Gelfand Math Seminars, 1990-1992, 173-187. Boston: Birkhaušer, 1993

[8] Kontsevich M. Triangulated categories and geometry. Course at the École Normale Supérieure, Paris, Notes taken by Bellaïche J, Dat J F, Marin I, Racinet G, and Randriambololona H, 1998

撰稿人: 章 璞

上海交通大学

阿廷 (Artin) 群的 Gröbner-Shirshov 基

Gröbner-Shirshov Bases for The Artin Groups

辫子 (braid) 群及其推广的研究源于数学的许多其他分支. 近十年来, 该领域的研究十分热门, 其中包括辫子群的表示和算法等问题.

由于任何一个代数是某个自由代数的同态像, 我们可以用生成元和关系来表示一个代数. 例如, 我们用符号 $G = gp\langle X|R\rangle$ 表示由生成元 X 和关系 R 确定的群, 它是由 X 生成的自由群 F 与 R 生成的 F 的正规子群所得的商群. 在组合群论中, 一个经典的问题是决定群 G 中元素的正规形式 (normal form)、字 (word) 问题和共轭 (conjugacy) 问题. 正规形式是指 G 中元素的一种唯一的表达方式, 字问题 (共轭问题) 是指是否存在一个算法, 使之可以判定群 G 中任意给出的两个元素是否相等 (是否共轭). 称 G 中元素 a, b 是共轭的, 如果存在 $g \in G$ 使 $a = g^{-1}bg$.

许多数学家尝试用各种方法和技巧解决一般代数的正规形式和字问题 (共轭问题). 俄罗斯数学家 A.I. Shirshov 于 1962 年首次发明了 Gröbner-Shirshov 基理论, 利用此理论他证明了只有一个关系的李代数的字问题是可解的. 事实证明 Gröbner-Shirshov 基理论是处理一般代数的正规形式和字问题 (共轭问题) 的强有力的工具.

作为预备知识, 我们先给出自由结合代数的 Gröbner-Shirshov 基理论.

设 $k\langle X\rangle$ 是域 k 上由 X 生成的自由结合代数, X^* 是由 X 生成的自由幺半群, 其幺元为空字. 对 X^* 中的任意一个字 w, 定义 $|w|$ 为字 w 的长度. 设 X^* 是一个良序 (well ordered) 集, $f = \alpha\bar{f} + \Sigma\alpha_i u_i \in k\langle X\rangle$, 其中 α, $\alpha_i \in k$, $\bar{f}$, $u_i \in X^*$, $u_i < \bar{f}$. 我们称 $\bar{f}$ 为 f 的首项. 如果 $\bar{f}$ 的系数为 1, 则称 f 是首 1 的. 设 f 和 g 是 $k\langle X\rangle$ 中两个首 1 的多项式, $w \in X^*$, 我们定义 f 和 g 的两种合成: (i) 如果存在 $a, b \in X^*$ 使得 $w = \bar{f}b = a\bar{g}$ 且 $|\bar{f}| + |\bar{g}| > |w|$, 则称多项式 $(f, g)_w = fb - ag$ 是 f 和 g 相对于 w 的相交合成. (ii) 如果存在 $a, b \in X^*$ 使得 $w = \bar{f} = a\bar{g}b$, 则称多项式 $(f, g)_w = f - agb$ 是 f 和 g 相对于 w 的包含合成.

设 $S \subset k\langle X\rangle$ 且 S 中每个多项式是首 1 的. 如果存在 $\alpha_i \in k$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$ 使得 $(f, g)_w = \sum \alpha_i a_i s_i b_i$ 且 $\overline{a_i s_i b_i} < w$, 则称 $(f, g)_w$ 模 S 是平凡的. 如果 S 中的多项式相对于良序 $<$ 的合成都是模 S 平凡的, 则称集合 S 是 $k\langle X\rangle$ 中的一个 Gröbner-Shirshov 基.

X^* 上的良序 $>$ 称为项序, 如果它关于字的乘法是相容的：$\forall u \forall v$ $(u > v \Rightarrow$

$\forall w_1 \forall w_2\ (w_1uw_2 > w_1vw_2)$). 设 X 是一个良序集, X^* 上的项序的一个典型例子是次数字典序, 即先比较两个字的长度, 再按字典顺序比较它们的大小.

下面的引理是 Gröbner-Shirshov 基理论的基石.

Composition-Diamond 引理[4,10] 设 k 是一个域, $Id(S)$ 是 $k\langle X\rangle$ 中由 S 生成的理想, $A = k\langle X|S\rangle = k\langle X\rangle/Id(S)$, $<$ 是 X^* 上的项序, 则下面的叙述等价:

(i) S 是 $k\langle X\rangle$ 中的一个 Gröbner-Shirshov 基;

(ii) 如果 $f \in Id(S)$, 则存在 $s \in S$, $a, b \in X^*$, 使得 $\bar{f} = a\bar{s}b$;

(iii) $Irr(S) = \{u \in X^* | u \neq a\bar{s}b, s \in S, a, b \in X^*\}$ 是代数 $A = k\langle X|S\rangle$ 的一个线性基底.

如果 $k\langle X\rangle$ 的子集 S 不是 Gröbner-Shirshov 基, 则我们把所有不平凡的多项式合成添加到 S 中并不断重复此过程, 最终得到 $k\langle X\rangle$ 的一个包含 S 的 Gröbner-Shirshov 基 S^c. 我们称这个过程为 Shirshov 算法.

设 $A = sgp\langle X|S\rangle$ 是一个半群, 则 S 是 $k\langle X\rangle$ 的一个子集. 我们用 Shirshov 算法可以找到 $k\langle X\rangle$ 中的一个 Gröbner-Shirshov 基 S^c，而 $Irr(S^c)$ 是 A 的一个正规形式. S^c 也叫做半群 A 的一个 Gröbner-Shirshov 基.

Artin 在 1926 年发现了由 $n-1$ 个生成元生成的辫子群: $B_n = gp\langle\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}|\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (i-1>j),\ \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\rangle$ 并解决了它的字问题. Markov 和 Artin 分别于 1945 年和 1947 年用 Artin-Burau 生成元 $s_{i,j}$, $s_{i,j}^{-1}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 找到了 B_n 的正规形式, 其中 $s_{i,j} = \sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}$. Artin 在 1947 年还给出了另一种解决其字问题的算法. Garside[9] 用 Artin-Garside 生成元 Δ, $\Delta^{-1}, \sigma_i (1 \leqslant i \leqslant n-1, \Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\cdots\sigma_{n-2}\cdots\sigma_1\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1)$ 找到了 B_n 的正规形式并利用此正规形式证明了其共轭问题是可解的. Birman-Ko-Lee 在 1998 年发现了 B_n 的新表示 $B_n = gp\langle a_{ts}\ (1 \leqslant s < t \leqslant n)|R\rangle$, 其中 $a_{ts} = (\sigma_{t-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{t-1}^{-1})$, $1 \leqslant s < t \leqslant n$, $R = \{a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts},\ (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0,\ a_{ts}a_{sr} = a_{tr}a_{ts} = a_{sr}a_{tr},\ 1 \leqslant r < s < t \leqslant n\}$. 由此表示，他们找到了 B_n 的正规形式, 在此基础上, 分别得到了解决 B_n 字问题和共轭问题的另一种算法.

Bokut-Chainikov-Shum (arXiv:0806.1124) 用 Artin-Burau 生成元给出 B_n 的一个 Gröbner-Shirshov 基并由此得到 Markov-Artin 正规形式. Bokut-Fong-Ke-Shiao (arxiv:0806.1118v1) 用 Artin-Garside 生成元找到了辫子半群 $B_n^+ = sgp\langle\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}|\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (i-1>j),\ \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\rangle$ 的 Gröbner-Shirshov 基. 运用此结论, Bokut (arxiv:0806.1125v1) 给出了 B_n 在 Artin–Garside 生成元下的 Gröbner-Shirshov 基, 由此得到 B_n 的 Garside 正规形式及对应的算法. Bokut (arXiv:0806.1123v1) 用另一组生成元 (Birman-Ko-Lee 生成元) 找到了 B_n 的 Gröbner-Shirshov 基并由此得到其对应的正规形式和算法.

正如辫子群 B_n 是由对称群 S_n 推广而来一样, Tits[11] 于 1966 年将 Coxeter 群推广到 Artin 群. 一个 Coxeter 图 Γ 对应一个 Artin 群 $A(\Gamma)$ 和一个 Coxeter 群 $C(\Gamma)$. 每一个 Coxeter 图都唯一对应一个对称矩阵 $M=(m_{ij})$, 即 Coxeter 矩阵, 其中 $m_{ii}=1$, $2\leqslant m_{ij}\in Z^+$ 或∞, $i\neq j$. 设 $M=(m_{ij})$ 是一个 n 阶 Coxeter 矩阵, 则其对应的 Coxeter 群和 Artin 群分别为: $C(M)=gp\langle x_1,\cdots,x_n|\ x_i^2=1,\ m_{ij}(x_i,x_j)=m_{ij}(x_j,x_i),\ 1\leqslant i\neq j\leqslant n\rangle$, $A(M)=gp\langle x_1,\cdots,x_n|\ m_{ij}(x_i,x_j)=m_{ij}(x_j,x_i),\ 1\leqslant i\neq j\leqslant n\rangle$, 其中 $m_{ij}(x_i,x_j)=x_ix_jx_i\cdots$, 其长度为 m_{ij}. Coxeter 图 $\mathbf{A_n},\mathbf{B_n},\mathbf{D_n}$(即球形) 即是 Dynkin 图 $\mathbf{A_n},\mathbf{B_n},\mathbf{D_n}$. Briskorn 和 Saito[5] 解决了球形 Artin 群的字问题和共轭问题. 球形 Artin 群的正规形式则是由 Charney 和 Dehornoy-Paris 分别于 1995 年和 1999 年得到的. Tits 于 1969 年找到了解决 Coxeter 群字问题的一个算法. 而 Bokut-Shiao[3] 得到了 Coxeter 群 $C(\mathbf{A_n}),C(\mathbf{B_n}),C(\mathbf{D_n})$ 的 Gröbner-Shirshov 基并提出关于一般 Coxeter 群的 Gröbner-Shirshov 基的一个猜想.

设 V 是一个维数为 r 的复线性空间, $GL(V)$ 是 V 上的一般线性群. $GL(V)$ 中一个非平凡元素 s 称为伪反射, 如果 s 作用于一个超平面 (称为 s 的反射超平面) 是平凡的. 由伪反射生成的 $GL(V)$ 的有限子群 W 称为复反射群. 对任意一个复反射群 W, 定义 W 作用于 V 上的正则轨道的基本群, 即是辫子群 $B(W)$. 普通的辫子群 B_n 与对称群 S_n 相对应. Brieskorn-Saito[5] 和 Deligne[7] 解决了与实反射群对应的辫子群 $B(W)$ 的字问题和共轭问题. Broue-Malle-Rouquier[6] 给出了 $B(W)$ 的无限序列的表示. Bannai[1] 和 Bessis-Michel[2] 给出除四个例外辫子群外的其他辫子群 $B(W)$ 的表示.

Baez 和 Birman 分别于 1992 和 1993 年发现了奇异辫子幺半群 $SB_n=sgp\langle\sigma_i,\ \sigma_i^{-1},\ x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1|\ R_1\rangle$, 其中 $R_1=\{\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}=\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ x_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}=\sigma_i\sigma_{i+1}x_i,\ \sigma_{i+1}\sigma_ix_{i+1}=x_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ \sigma_i\sigma_i^{-1}=\sigma_i^{-1}\sigma_i=1,\ \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i,\ x_ix_j=x_jx_i,\ x_i\sigma_j=\sigma_jx_i,\ |i-j|>1\}$. 关于 SB_n, Corran 在 2000 年找到它的正规形式并给出了一个解决其字问题的算法; V.V. Vershinin (arxiv:math.GR/0309339v1) 给出了另一种算法并找到了 Birman-Ko-Lee 的类似表示. V.V. Chaynikov 于 2007 年用 Birman-Ko-Lee 生成元找到了其正规形式及其对应的算法.

虚辫子群 VB_n 是由 Kauffman 于 1999 年发现的, 其定义如下: $VB_n=gp\langle\sigma_i,\ x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1|\ R_2\rangle$, 其中 $R_2=\{x_i^2=1,\ x_{i+1}x_ix_{i+1}=x_ix_{i+1}x_i,\ \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}=\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ \sigma_{i+1}x_ix_{i+1}=x_ix_{i+1}\sigma_i,\ \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i,\ x_ix_j=x_jx_i,\ x_i\sigma_j=\sigma_jx_i,\ |i-j|>1\}$. Fenn–Rimanyi–Rourke 于 1997 年发现了 Welded 辫子群 WB_n, 它与 VB_n 的区别在于它比 VB_n 多了一个新的关系 $\sigma_{i+1}\sigma_ix_{i+1}=x_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-2$, 即 $WB_n=gp\langle\sigma_i,\ x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1|\ R_2,\ \sigma_{i+1}\sigma_ix_{i+1}=x_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-2\rangle$ ($\sigma_i,\ x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1$ 这组生成元被称为标准生成元). WB_n 和 VB_n 都是由纽结 (knot) 和链环 (link) 理论得来的. 显然, WB_n 是 VB_n 的一个商群. Bardakov 在

2008 年给出了虚辫子群的正规形式.

Easdown–Lavers[8] 发现了逆辫子幺半群 $IB_n = sgp\langle x, \sigma_i, \sigma_i^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1 | R_3\rangle$, 其中 $R_3 = \{x = x^2 = x\sigma_1^2 = \sigma_1^2 x,\ x\sigma_1 x = x\sigma_1 x\sigma_1 = \sigma_1 x\sigma_1 x,\ \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ \sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1,\ x\sigma_i = \sigma_i x\ (i > 1),\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (|i-j| > 1)\}$. 它是由逆半群发展而来的. Vershinin (arxiv:0704.3002v1) 找到了 IB_n 的 Markov-Artin 正规形式和 Garside 正规形式 (分别由 Markov-Artin 生成元和 Garside 生成元决定的). Bokut、陈裕群、赵显贵 (arXiv.org/abs/0804.0959) 在 Polyakova-Schein 2005 年的文章的基础上给出了自由逆半群的 Gröbner-Shirshov 基.

在以上成果的基础上, 我们提出以下问题:

(1) 给出一般 Coxeter 群的 Gröbner-Shirshov 基 (参见 Bokut-Shiao 在 [3] 中提出的猜想);

(2) 给出有限型 Artin 群 $\mathbf{B_n}, \mathbf{D_n}, \mathbf{G_2}, \mathbf{F_4}, \mathbf{E_6}, \mathbf{E_7}, \mathbf{E_8}$ 在 Artin-Burau 生成元下的 Gröbner-Shirshov 基;

(3) 给出有限型 Artin 群在 Artin-Garside 生成元下的 Gröbner-Shirshov 基;

(4) 给出有限型 Artin 群在 Birman-Ko-Lee 生成元下的 Gröbner-Shirshov 基;

(5) 将上述 (1)-(3) 三个问题推广到任意 Artin 群;

(6) 给出奇异辫子幺半群 SB_n 分别在 Artin-Garside 生成元和 Birman-Ko-Lee 生成元下的 Gröbner-Shirshov 基;

(7) 给出虚辫子群 VB_n, welded 辫子群 WB_n, 逆辫子幺半群 IB_n 和辫子群 $B(W)$ 在标准生成元下的 Gröbner-Shirshov 基.

参 考 文 献

[1] Bannai E. Fundamental groups of the spaces of regular orbits of the finite unitary reflection groups of dimension 2. J Math Soc Japan, 1976, 28: 447-454

[2] Bessis D, Michel J. Explicit presentations for exceptional braid groups. Experimental Mathematics, 2004, 13(3): 257-266

[3] Bokut L A, Shiao L-S. Gröbner-Shirshov bases for Coxeter groups. Comm Algebra, 2001, 29: 4305-4319

[4] Bokut L A, Shum K P. Gröbner and Gröbner-Shirshov bases in algebra: an elmentary approach. SEA Bull Math, 2005, 29: 227-252

[5] Brieskorn E, Saito K. Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent Math, 1972, 17: 245-271

[6] Broue M, Malle G and Rouquier R. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras. J reine angew Math, 1998, 500: 127-190

[7] Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent Math, 1972, 17: 273-302

[8] Easdown D, Lavers T G. The inverse braid monoid. Adv Math, 2004, 186(2): 438-455

[9] Garside F A. The braid group and other groups. Quart J Math Oxford Ser, 1969, 20(2): 235-254

[10] Shirshov A I. Some algorithmic problem for Lie algebras. Sibirsk Mat Z, 1962(3): 292-296 (in Russian); English translation in SIGSAM Bull, 1999, 33: 2, 3-6

[11] Tits J. Normalisateurs de tores. I Groupes de Coxeter *é*tendus, J Algebra, 1966, 4: 96-116

撰稿人： L. Bokut　陈裕群
华南师范大学

布如意 (Broué) 交换亏群猜想

Broué's Abelian Defect Group Conjecture

Broué 交换亏群猜想是目前国际模表示论发展中的前沿焦点问题之一. 众所周知, 群论是当代数学的理论和应用中基本而重要的大领域之一, 有限群则是其历史最久远的基础部分. 有限群的常表示理论是由群论学家 G. Frobenius, W. Burnside 和 I. Schur 等于 1896 年至 1910 年间建立起来的, 而模表示论则是群论大师 Brauer 自 1935 年起经 40 余年的艰苦卓绝的努力创立起来的. 随后, 由于 Green 的不可分解模理论的发展, Alperin, Broué 和 Puig 等人建立了局部表示论, 使模表示论得到了充分且迅速的发展, 从而全面有力地推动了群论以至整个代数学向前发展, 而且日益深刻地应用到数学的其他分支如微分几何、代数数论等和其他科学领域中. 20 世纪 80 年代以来, 由于 Broué 把导范畴理论方法、Rickard 把代数几何方法等应用到模表示论的研究中, 发展更深刻, 应用更加广泛, 成为更多科学理论的研究工具和研究进展的推动力.

假定 R 是 p-adic 整数域 Qp 的一个充分大的有限扩张 L 的代数整数环, 其剩余域为 F. 对有限群 G, 设 B 是 RG 的一个块代数, 其亏数群是 D, b′ 是 B 的 Brauer 对应, 则导范畴 $\mathrm{D^b}$(mod–B) 可嵌入 $\mathrm{D^b}$(mod–b′).

Broué 交换亏群猜想：对有限群 G, 设 B 是 RG 的一个块代数, 其亏数群 D 是交换的, b′ 是 B 的 Brauer 对应, 则导范畴 $\mathrm{D^b}$(mod–B) 与 $\mathrm{D^b}$(mod–b′) 作为三角范畴是等价的.

如果 Broué 交换亏群猜想成立, 则模表示论中许多重要问题都可以获得解决, 如：相应的块代数 B 和 b′ 含有相同个数的不可约常指标、模指标, 具有同构的中心、相同的 Hochschild 同调代数和同样的代数 K- 理论等等.

Broué 交换亏群猜想把有限群模表示论、代数群表示论和代数表示论更加密切地联系在一起, 相互影响, 相互促进. 有限群、代数群、量子群、代数的表示理论之间的相互作用导致近年的许多重要理论突破. Broué 交换亏群猜想研究已经有了很大进展, 特别是对一些有限单群已经得到验证. 但 Broué 交换亏群猜想的完全解决还是一件遥远而困难的事情.

参 考 文 献

[1] Michel Broué. Blocs, isométries parfaites. catégories dérivées C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1988, 307(1): 13-18

[2] Broué M. Rickard equivalences and block theory. In Groups ′93 Galway/St. Andrews, Vol. 1 (Galway, 1993): 58-79. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995

[3] Jeremy Rickard. The abelian defect group conjecture // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), number Extra Vol. II, 1998, 121-128 (electronic)

[4] Raphaël Rouquier. Some examples of Rickard complexes. An Stiint Univ Ovidius Constanta Ser Mat, 1996, 4(2): 169-173, Representation theory of groups, algebras, and orders (Constanta, 1995)

撰稿人：张继平
北京大学

布朗 (Brown) 问题

Brown's Question

Hopf 代数 (量子群) 是非常重要的代数结构, 它架起了连接代数学与其他数学分支以及数学物理的桥梁. 自从 20 世纪 40 年代 H. Hopf 在研究 Lie 群的 (上) 同调群时引入 Hopf 代数概念以来, Hopf 代数的理论经历了近 30 年的缓慢发展. 1969 年 Sweedler 的著作[1] 出版后, 引发了 20 世纪 70 年代有限维 Hopf 代数理论的研究热潮. 但 Hopf 代数的巨大研究动力来自 20 世纪 80 年代中期量子群的发现 [2,3]. 量子群是一类非交换、非余交换的 Hopf 代数. 许多新的 Hopf 代数的例子是无限维诺特代数, 且常常满足多项式恒等式 (简称 PI 代数). 众所周知, 有限维 Hopf 代数是 Frobenius 代数, 从而它的内射维数是零. Brown 和 Goodearl 在验证了许多 Hopf 代数 (量子群) 的具体例子的基础上 [4], 提出问题 [5,Question A]：是否每个诺特 PI Hopf 代数 H 作为自身上的模都有有限的内射维数 (或者说是 Gorenstein 的). 2002 年吴和张给出了这个问题的肯定回答 [6,Theorem0.1]. 在过去的几年里, 由于新的发展, 这个问题的表述有了一些变化. 下面是文献 [7, Question E] 中的一种提法.

Brown 问题：是否每个诺特 Hopf 代数都是 Artin-Schelter Gorenstein 的？

诺特 Hopf 代数 H 称为 Artin-Schelter Gorenstein, 是指 H 的内射维数 d 有限且 $\mathrm{Ext}_H^i(k,H)\cong\delta_{i,d}k$, 这里 $\delta_{i,d}$ 是 Kronecker 符号, k 是基域、通过余单位看成 H-模.

如果 Brown 问题的答案是肯定的, 则有许多重要的结果. 例如, 每个诺特 Hopf 代数都有刚性对偶复形 [8] 和左、右同调积分 [9]. 同调积分是定义一些不变量的关键, 例如, 可应用于 Gelfand-Kirillov 维数较低的素 Hopf 代数的分类. 如果 Brown 问题的答案是肯定的, 那么 Radford 的 S^4 公式就能推广到诺特 Hopf 代数上面 [8].

目前, 对于下面几类诺特 Hopf 代数, Brown 问题有肯定的答案：

(1) 有限多循环群 (polycyclic-by-finite group) 的群代数;

(2) 有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$;

(3) 量子坐标环 $\mathcal{O}_q(G)$, 其中 G 是半单代数群;

(4) 量子包络代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$;

(5) 交换的 Hopf 代数和 PI Hopf 代数;

(6) 一些有良好过滤的 Hopf 代数.

在一般情形, 这个问题还没有解决.

参 考 文 献

[1] Sweedler M E. Hopf Algebras. Benjamin, 1969
[2] Drinfeld V D. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. Sov Math Dokl, 1985, 32: 254-258
[3] Jimbo M. A q-difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. Lett Math Physics, 1985, 10: 63-69
[4] Brown K A, Goodearl K R. Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras and irreducible modules of maximal dimension. J Algebra, 1997, 198: 240-265
[5] Brown K A. Representation theory of Noetherian Hopf algebras satisfying a polynomial identity. Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle, WA, 1997), 49-79, Contemp Math, 229, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998
[6] Wu Q S, Zhang J J. Noetherian PI Hopf algebras are Gorenstein. Trans Amer Math Soc, 2002, 355: 1043-1066
[7] Brown K A. Noetherian Hopf algebras. Turkish J Math, 2007, 31: suppl, 7-23 (arXiv: 0709. 2334v1)
[8] Brown K A, Zhang J J. Dualising complexes and twisted Hochschild (co)homology for noetherian Hopf algebras. J Algebra (to appear)
[9] Lu D M, Wu Q S and Zhang J J. Homological integral of Hopf algebras. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 4945-4975

撰稿人：[1] 吴泉水 [2] 张 坚
1 复旦大学
2 华盛顿大学

凯莱 (Cayley) 图和相关的问题

Cayley Graphs and Related Problems

Cayley 图是由 Arthur Cayley 在 1878 年引入的, 为抽象群提供了一种图表示. Cayley 图构成了一类非常重要的图类, 在研究群和极值图中有着重要的应用, 为通讯网络提供很好的模型, 参看文献 [1]. Cayley 图的形式定义如下. 给定一个群 G 和它的一子集 S 使得如果 x 在 S 中, 则其逆也在, 那么 G 的相对于 S 的 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 定义为这样一个图: 其点集为 G, 两点 x, y 相联当且仅当 y 属于 Sx. 容易看出, 群 G 在它自己上的右正则表示在图 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 的点集上是正则的. 因此, Cayley 图是点对称的. 进一步, 如果 A 是图 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 的自同构群, 则 $A = GH$, 这里 H 是点稳定子群; 也就是说, A 可因子分解且 G 是一个因子. 所以, 研究 Cayley 图和研究可因子分解的群是密切相关的, 参看文献 [5]、[7].

问题 1 研究可因子分解的有限群 $G = XY$ 使得 ① X, Y 无核; 或 ② X 属于某特殊群类, Y 无核.

对于此问题的进展, 参考文献 [5]~[7]. 一个图称为 s- 弧传递图, 如果它的所有长为 s 的弧都等价. 研究 s- 弧传递图是代数图论和几何群论的一个重要问题. 由著名的 Tutte-Weiss 定理, s 至多为 7. 研究各种特殊群类的 s- 弧传递 Cayley 图是当今代数图论中一个非常活跃的问题. 它与问题 1 密切相关.

问题 2 刻画 s- 弧传递 Cayley 图. 特别地, 考虑 $s > 1$ 和特殊群类的 Cayley 图.

解决此问题需要对单群的某些特殊子群及生成关系有很好的理解, 对其进展, 参见文献 [5]、[7]. 最后, 令 G 是阶为 $2p$ 的二面体群, 其中 $p = n^2 + n + 1$ 是素数. 假定 $n > 8$, S 是由 G 中 $n+1$ 个共轭对合组成的集合, 令 $\mathrm{Cay}(p)=\mathrm{Cay}(G,S)$, 那么 $\mathrm{Cay}(p)$ 的直径至多为 3, 并且直径为 3 的图 $\mathrm{Cay}(p)$ 的存在性等价于 n 阶非 -Desarguesian 旗传递射影平面的存在性, 参见文献 [2]~[4]. 后者是几何学中的一个重要问题, 其不存在性是几何学中一个著名的猜想. 因此, 我们提出

问题 3 证明对于所有的素数 $p = n^2 + n + 1$ 使得 $n > 8$, 图 $\mathrm{Cay}(p)$ 的直径等于 2.

参 考 文 献

[1] Babai L. Automorphism groups. isomorphism, reconstruction, Handbook of Combina-

torics, Vol. 1, 2: 1447-1540, Amsterdam: Elsevier, 1995
[2] Feit W. Finite projective planes and a question about primes. Proc Amer Math Soc, 1990, 108: 561-564
[3] Kantor W. Primitive groups of odd degree and an application to finite projective planes. J Algebra, 1987, 106: 15-45
[4] Li C H. Finite s-arc transitive Cayley graphs and flag-transitive projective planes. Proc Amer Math Soc, 2005, 133: 31-41
[5] Li C H. Finite edge-transitive Cayley graphs and rotary Cayley maps. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 4605-4635
[6] Liebeck M, Praeger C E and Saxl J. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups. Mem Amer Math Soc, 1990, 86: 432
[7] Liebeck M, Praeger C E and Saxl J. On regular subgroups of primitive permutation groups. Mem Amer Math Soc, to appear

撰稿人：李才恒
西澳大学

福克斯 (Foulkes) 猜想

Foulkes Conjecture

20 世纪 40 年代中期, Littlewood 在文献 [3] 中给出了 Schur 函数的新乘法, 该乘法被称为 “plethysm”, 这种乘法根源于一般线性群多项式表示的合成. 一般用 “$\circ$” 表示这种新乘法. 设 λ,μ 为两个分化, s_λ, s_μ 为这两个分化所对应的 Schur 函数, 并设 $s_\lambda = \sum_{i\geqslant 1} x^{a^i}$, 其中 x^{a^i} 为单项式, 则 $s_\lambda \circ s_\mu = s_\mu(x^{a^1}, x^{a^2}, \cdots)$. 关于该乘法有如下结论:

定理 设 f, g 分别为 Schur 函数的 N 线性组合, 则 $f\circ g$ 也为 Schur 函数的 N 线性组合.

设 p, q 为正整数, 我们也用 p, q 分别表示 p, q 的分化 $(p, 0, \cdots), (q, 0, \cdots)$. Foulkes 在文献 [1] 中计算出当 p, q 较小时 $s_p \circ s_q$ 关于 Schur 函数的分解, 并提出如下猜想:

Foulkes 猜想 当 $p > q$ 时, $s_p\circ s_q$ 分解中出现的 Schur 函数也在 $s_q \circ s_p$ 中出现.

由于对称群在有理数域上类函数空间与对称函数环之间有 Frobenius 特征映射, 该映射保持类函数空间及对称函数环上的内积且把分化 λ 所对应的不可约表示映到 Schur 函数 s_λ. 通过 Frobenius 特征映射, 上述猜想也可以有如下的等价表述:

Foulkes 猜想 在有理数域上, 当 $p > q$ 时, $1_{S_p \wr S_q}^{S_{pq}}$ 同构于 $1_{S_q\wr S_p}^{S_{pq}}$ 的一个子模.

当然该猜想在一般线性群多项式表示理论、有理同伦论、顶点算子代数表示理论中也有相应的等价表述 (参见文献 [5]、[8]), 这里就不一一列举了.

注 该猜想有如下的表示论背景. 记 $Y_p = \overbrace{S_p\times\cdots\times S_p}^{q}$, $Y_q = \overbrace{S_q\times\cdots\times S_q}^{p}$. 织积 $S_p\wr S_q$,$S_q \wr S_p$ 分别为 Young 子群 Y_p, Y_q 在 S_{pq} 中的正规化子. 由 Littlewood-Richard 律可得 $1_{Y_p}^{S_{pq}}, 1_{Y_q}^{S_{pq}}$ 关于不可约表示的完全分解, 由此可知不可约模在 $1_{Y_p}^{S_{pq}}$ 中出现的重数不超过在 $1_{Y_q}^{S_{pq}}$ 中出现的重数, 这意味着 $1_{Y_p}^{S_{pq}}$ 同构于 $1_{Y_q}^{S_{pq}}$ 的一个子模. 由此启示我们证明该猜想可以先研究 $1_{S_p\wr S_q}^{S_{pq}}$ 的不可约表示的分解, 甚而更一般地研究 Young 子群正规化子的平凡模的诱导模的不可约表示的分解. 尽管 Young 子群的平凡模的诱导模的不可约表示的分解在 20 世纪中期已完成, 但至今文献中仍没有关于该问题的结论.

对于如上的 Foulkes 猜想, 一些人试图推广到更一般的形式 (参见文献 [4]、[6]、[7]). 目前来看下面的推广比较成功.

广义 Foulkes 猜想 [7] 设 $n = pq, q \leqslant p$, 若 c, d 为正整数且 $cd = n$, $c, d \geqslant b$, 则 $1_{S_p \wr S_q}^{S_n}$ 同构于 $1_{S_d \wr S_c}^{S_n}$ 的一个子模.

对于如上的 Foulkes 猜想已在如下情况得到了证明:

(1) (Thrall, 1942) $b = 2, a \geqslant 2$;

(2) (Littlewood, 1944) $b = 3, a \leqslant 6$, $b = 4, a \leqslant 5$ 且 $a = 6, b \leqslant 4$;

(3) (M. Brion, 1993) a 足够大于 b 时;

(4) (S. Dent, J. Siemons, 2000) $b = 3, a \geqslant 3$;

(5) (T. Mckay, 2008) $b = 4$, $a \geqslant 4$.

参 考 文 献

[1] Foulkes H O. Concomitants of the quintic and sextic up to degree four in the coefficient of the ground form. J London Math Soc, 1950, 25: 205-209

[2] Hower R. (GL_n, GL_m)-duality and symmetric plethysm. Proc Indian Acad Sci, 1997, 85-109

[3] Littlewood D E. Invariant theory, tensors and group characters. Phil Trans Royal Soc, 1944, 239

[4] Mckay T. On Plethysm conjectures of Stanley and Foulkes. J Algebra, 2008, 319: 2050-2071

[5] Stanley R P. Enumerative combinatorics. Volumn 2 Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62

[6] Stanly R P. Positivity problems and conjectures in algebraic combinatorics // Mathematics: Frontiers and Perspectives, Amer Math Soc, 2000, 295-319

[7] Vessenes R. Generalized Foulkes' Conjecture and Tableaux Construction. J Algebra, 2004, 277(2): 579-614

[8] Wu Jie. http://www.math.nus.edu.sg/matwujie/Foulkes.pdf

撰稿人：王立中
北京大学

戈伦斯坦 (Gorenstein) 对称猜想

Gorenstein Symmetric Conjecture

设 k 为交换 Artin 环, A 为 k- 代数. 称 A 为 Artin 代数, 若作为 k- 模, A 是有限生成的. 考虑有限生成 A- 模. 对于左 A- 模 ${}_AM$, 其投射维数和内射维数分别记为 proj.dim ${}_AM$ 和 inj.dim ${}_AM$. 类似地, 对于右 A- 模 N_A, 有记号 proj.dim N_A 和 inj.dim N_A. 由 A 的乘法运算, 我们有自然的左模 ${}_AA$ 以及右模 A_A, 均称为正则模.

Gorenstein 对称猜想 设 A 为 Artin 代数. 若 inj.dim ${}_AA$ 有限, 则 inj.dim A_A 亦有限.

这个猜想的命名来源于: Artin 代数 A 称为 Gorenstein 代数, 如果 inj.dim ${}_AA$ 和 inj.dim A_A 均有限. 此时有 inj.dim ${}_AA=$ inj.dim A_A, 参见文献 [1]、[9]. 专著 [2] 将这一猜想列为第 13 个猜想. 由于 Gorenstein 代数在代数和几何中, 尤其在奇点理论中的意义, 近年来这一猜想得到更多的关注.

Gorenstein 对称猜想与代数表示论中许多重要的理论和猜想有密切联系. 记 A-mod 为有限生成左 A- 模范畴, $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 为 A-mod 的具有有限投射维数的模的全子范畴. 代数 A 的有限维数 fin.dim (A) 定义为 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 中模的投射维数的上确界. 著名的**有限维数猜想**断言: 对 Artin 代数 A 总有 fin.dim $(A)<\infty$[3]. 称子范畴 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 是反变有限的, 若对于任意 A- 模 X, 存在态射 $f_X: M \longrightarrow X$ 使得 $M\in\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 且任何 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 中模到 X 的态射均可经由 f_X 分解. 满足上述条件的态射 f_X 称为 X 的右 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$- 逼近. Auslander 和 Reiten 在文献 [1] 指出: 对于满足 inj.dim ${}_AA<\infty$ 的 Artin 代数 A, A 为 Gorenstein 代数当且仅当 fin.dim (A) 有限, 当且仅当 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 是反变有限的. 从而, 有限维数猜想蕴涵 Gorenstein 对称猜想. 注意到, 存在 Artin 代数 A 使得子范畴 $\mathcal{P}^{<\infty}(A)$ 不为反变有限的, 参见文献 [10]. 另外, 文献 [1] 指出了 Gorenstein 对称猜想与 Gorenstein 投射模联系紧密, 而后者是 Gorenstein 同调代数中最重要的概念之一[8].

Gorenstein 对称猜想目前只在部分情形下得到验证: 正如文献 [9] 所指出, 利用经典部分 (余) 倾斜模的 Bongartz 补的存在性 [7], 可证明若代数 A 满足 inj.dim ${}_AA \leqslant 1$, 则有 inj.dim $A_A\leqslant 1$; Beligiannis 和 Reiten 引入了 virtually Gorenstein 代数的概念, 这类代数包含 Gorenstein 代数, 以及 Cohen-Macaulay- 有限的代数 (即该代数仅有有限多个互不同构的不可分解 Cohen-Macaulay 模. 文献中经常将 Cohen-

Macaulay 模称为有限生成 Gorenstein 投射模), 并在导出等价以及 Morita 型稳定等价下封闭[4,6]. Beligiannis[4] 指出：任意 virtually Gorenstein 代数均满足 Gorenstein 对称猜想. 注意存在非 virtually Gorenstein 代数, 参见文献 [5]. 现在看来解决这一猜想需要新的工具, 对它的进一步研究将会推动代数表示论和导出范畴的发展.

参 考 文 献

[1] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. Adv Math, 1991, 86(1): 111-152

[2] Auslander M, Reiten I and Smalø S O. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995

[3] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans Amer Math Soc, 1960, 95: 466-488

[4] Beligiannis A. Cohen-Macaulay modules, (co)torsion pairs and virtually Gorenstein algebras. J Algebra, 2005, 288: 137-211

[5] Beligiannis A, Krause H. Thick subcategories and virtually Gorenstein algebras. Illinois J Math, to appear

[6] Beligiannis A, Reiten I. Homological and homotopical aspects of torsion theories. Mem Amer Math Soc, 2007, 108: 207

[7] Bongartz K. Tilted algebras // Lecture Notes in Math, 903. Heidelberg: Springer-Verlag, 1981, 26-38

[8] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules. Math Z, 1995, 220: 611-633

[9] Happel D. On Gorenstein algebras. Progress in Math, vol 95: 389-404, Birkhäuser Verlag, Basel 1991

[10] Igusa K, Smalø S O and Todorov G. Finite projectivity and contravariant finiteness. Proc Amer Math Soc, 1990, 109(4): 937-941

撰稿人：[1] 陈小伍 [2] 章 璞
1 中国科学技术大学
2 上海交通大学

卡普兰斯基 (Kaplansky) 第六猜想

Kaplansky's 6th Conjecture

Kaplansky 第六猜想是 Kaplansky 在 1975 年提出的关于 Hopf 代数的十个猜想之一 [3], 也是目前 Hopf 代数乃至代数学领域研究的前沿问题之一. Hopf 代数起源于 20 世纪 40 年代, 主要是由 Hopf 对 Lie 群的拓扑性质的公理性研究而建立的一种代数系统. 20 世纪 60 年代，Hochschild-Mostow 在研究 Lie 群的应用及后续研究中, 发展和丰富了 Hopf 的这一代数系统的理论, 奠定了 Hopf 代数理论的基本框架. 20 世纪 80 年代, 随着 Drinfeld 和 Jimbo 等数学家建立的量子群理论的兴起, 人们发现量子群是一类特殊的 Hopf 代数. 量子群理论与众多其他数学领域, 如低维拓扑、表示论以及非交换几何以及统计力学精确可解模型理论、二维共形场论、角动量量子理论等有着紧密的联系. 量子群理论的兴起也促进了 Hopf 代数理论的迅猛发展, 围绕 Kaplansky 的十个猜想取得了许多精彩的研究成果, 导致其中若干猜想的解决或部分解决.

设 k 是特征为 0 的代数闭域, G 是有限群. 由 Frobenius 的经典结果知：群代数 kG 上任一不可约表示的维数整除 G 的阶. 群代数和 Lie 代数的包络代数是 Hopf 代数的典型例子. 1975 年, Kaplansky 在讲义《Bialgebras》[3] 中总结了 Hopf 代数的研究成果, 并提出了十个猜想, 其中第六猜想就是基于 Frobenius 关于群表示的上述经典结果而提出的. 这一猜想可等价地表述如下.

Kaplansky 第六猜想　设 H 是代数闭域上的有限维半单 Hopf 代数, 则 H 的任一不可约表示的维数整除 H 的维数.

这一猜想与有限维半单 Hopf 代数的分类紧密相关, 吸引了众多代数学家的兴趣. 设 H 是代数闭域 k 上的有限维 Hopf 代数. Zhu 在 1993 年利用特征标理论研究了 Kaplansky 第六和第八猜想 [5], 得到了部分结果. 他证明了：若 $\mathrm{char}(k)=0$，H 半单且 $R(H)$ 在 H 的对偶代数 H^* 的中心中，其中 $R(H)$ 为 H 的不可约特征标所张成的 H^* 的子代数, 则 Kaplansky 第六猜想成立. Nichols 和 Richmond 在 1996 年通过分析 H 的 Grothendieck 群的环结构证明 [4]：若 H 是余半单的且有一个 2-维单余模，则 H 是偶数维的. 1998 年，Etingof 和 Gelaki 在研究拟三角半单余半单 Hopf 代数的结构和提升问题时证明 [1]：若 H 是半单余半单 Hopf 代数, $D(H)$ 是 H 的 Drinfeld double, 则 $D(H)$ 的不可约表示的维数整除 H 的维数. 由此他们证明：如果 H 是拟三角的半单余半单 Hopf 代数, 则 H 的不可约表示的维数整除 H 的

维数. 1999 年，他们又证明 [2]：如果 H 是余三角的半单 Hopf 代数且 $\mathrm{char}(k)=0$, 则 H 的不可约表示的维数整除 H 的维数. 这是 Kaplansky 猜想到目前为止的进展情况，离完全解决还有很长的距离, 或许这一猜想的完全解决将依赖于或导致有限维半单 Hopf 代数分类问题的解决.

参 考 文 献

[1] Etingof P, Gelaki S. On finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic. Internat Math Res Notices, 1998, 16: 851-864

[2] Etingof P, Gelaki S. The representation theory of cotriangular semisimple Hopf algebras. Internat Math Res Notices, 1999, 7: 387-394

[3] Kaplansky I. Bialgebras. Chicago: University of Chicago, 1995

[4] Nichols W D, Richmond M B. The Grouthendieck group of a Hopf algebra. J Pure Appl Algebra, 1996, 106: 297-306

[5] Zhu S. On finite dimensional semisimple Hopf algebras. Comm Algebra, 1993, 21: 3871-3885

撰稿人：陈惠香
扬州大学

中山 (Nakayama) 猜想和广义中山 (Nakayama) 猜想

Nakayama Conjecture and Generalized Nakayama Conjecture

Nakayama 猜想是同调代数和代数表示论中一个重要的猜想, 由 T.Nakayama 于 1958 年提出. Nakayama 猜想等同调猜想一直以独特的魅力吸引着代数学家. 1995 年, M. Auslander, I. Reiten 和 S. Smalø在其代数表示论专著[2] 中收入了 Nakayama 猜想、广义 Nakayama 猜想和另外 4 个相关的猜想.

同调代数创立于 20 世纪四、五十年代, 它在当今许多数学领域和数学物理中起着重要的作用. 同调代数理论为代数表示论研究不断提供灵感、动力和方法, 极大地推动了其发展, 而代数表示论的发展不仅丰富了同调代数理论, 也为其应用开辟了更为广阔的天地. 代数表示论研究使得人们进一步深化了对许多同调对象的认识. Auslander-Reiten 理论、倾斜理论、预投射代数、霍尔代数等通过其对代数的表示范畴、导出范畴等的深刻刻画, 在李代数与量子群、代数几何、群表示理论、代数组合等数学领域研究中得到了深刻的应用, 对这些数学领域的发展产生了重要影响.

Nakayama 猜想[5] 设 Λ 是 Artin 代数且 $0 \to \Lambda \to I_0 \to I_1 \to I_2 \cdots$ 为 Λ 的极小内射分解. 如果对所有 $j \geqslant 0$, I_j 都是投射模, 则 Λ 是自内射代数.

Nakayama 证明了该猜想对广义单列代数成立. 20 世纪六、七十年代, B.Müller 和 H.Tachikawa 分别给出了 Nakayama 猜想的等价形式. 由有限维数猜想可推出 Nakayama 猜想[6].

Nakayama 猜想的研究导致一系列猜想的提出, 极大地推动了代数表示论的发展, 其中最有影响的是 1975 年 M. Auslander 和 I. Reiten 提出的广义 Nakayama 猜想.

广义 Nakayama 猜想[1] 设 Λ 是 Artin 代数, 则每一不可分解内射 Λ- 模必是 Λ 的极小内射分解中某一项的直和项.

Nakayama 猜想可由广义 Nakayama 猜想推出. 20 世纪八、九十年代, 随着代数表示论的发展, 对广义 Nakayama 猜想的研究也取得了一系列进展. R. R. Colby 和 K. R. Fuller 提出了强 Nakayama 猜想, M. Auslander 和 I.Reiten 提出了关于 k-Gorenstein 的 Auslander-Reiten 猜想. 这些猜想都能推出广义 Nakayama 猜想, 而有限维数猜想又推出这些猜想成立 (见文献 [9]). G. V. Wilson[7] 与 K. R. Fuller 和 B. Zimmermann-Huisgen[4] 分别证明了广义 Nakayama 猜想对分次代数成立; P.

Dräxler 和 D. Happel[3] 证明：如果有限维代数 Λ 满足 $J^{2l+1} = 0$ 且 Λ/J^l 表示有限, 则广义 Nakayama 猜想对 Λ 成立, 这里 J 是 Λ 的 Jacobson 根. 近年对若干代数类证明了有限维数猜想是成立的[8,9], 从而, 广义 Nakayama 猜想和 Nakayama 猜想对于那些代数类也成立. 人们难以预测 Nakayama 猜想和广义 Nakayama 猜想什么时候能够得到解决, 但可以期待其研究将继续为相关数学领域的发展不断提供新的思想和推动力.

参 考 文 献

[1] Auslander M, Reiten I. On a generalized version of the Nakayama conjecture. Proc Amer Math Soc, 1975, 52: 69-74

[2] Auslander M, Reiten I and Smalø S. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995

[3] Dräxler P and Happel D. A proof of the generalized Nakayama conjecture for algebras with $J^{2l+1} = 0$ and A/J^l representation finite. J Pure and Appl Algebra, 1992, 78: 161-164

[4] Fuller K R, Huisgen-Zimmermann B. On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem. Trans Amer Math Soc, 1986, 294: 679-691

[5] Nakayama T. On algebras with complete homology. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1958, 22: 300-307

[6] Tachikawa H. Quasi-Frobenius rings and generalizations. QF-3 and QF-1 rings, Notes by Claus Michael Ringel. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1973

[7] Wilson G. The Cartan map on categories of graded modules. J Algebra, 1983, 85: 390-398

[8] 惠昌常. 关于有限维数猜想的一些新进展. 数学进展, 2007, 36(1): 14-17

[9] Yamagata K. Frobenius Algebras // Hazewinkel M ed. Handbook of Algebra. Vol. 1. Amsterdam: Elsevier, 1996, 841-887

撰稿人：郭晋云
湘潭大学

拉姆拉斯 (Ramras) 问题

Ramras' Question

1974 年 Ramras[1] 提出如下问题：诺特正则 scalar 局部环是否都是整环? 这里环 A 称为正则环是指它的整体维数有限；A 称为 scalar 局部环是指它模去 Jacobson 根是除环. 当 A 是交换环时, 由著名的 Auslander-Buchsbaum-Nagata-Seree 定理 [2,p.142] 可知这个问题的答案是肯定的. 当 A 的整体维数不超过 2 时, Ramras 本人证明答案是肯定的. 当 A 的整体维数为 3 时, Snider 证明答案是肯定的 [3]. 对高维情形, 这个问题在适当的条件下也有肯定的答案 [4,p.321]. Stafford 和 Zhang[5] 及 Teo[6] 分别就 PI 环和 FBN 环的情形给出了肯定答案, 并且证明整体维数有限的局部 (连通分次) 诺特 PI (FBN) 环是 Auslander 正则、Cohen-Macaulay 整环.

一个诺特环 A 称为 Auslander 正则环, 是指它的整体维数有限, 且对任意有限生成左或右 A- 模 M, 任意 $i \geqslant 0$ 及 $\mathrm{Ext}_R^i(M,A)$ 的任意非零子模 N, 总有 $j(N) := \inf\{j \,|\, \mathrm{Ext}^j(N,A) \neq 0\} \geqslant i$. A 称为 Cohen-Macaulay 环, 是指 A 的 Gelfand-Kirillov 维数 $\mathrm{GKdim}\, A < \infty$, 且对任意非零有限生成 A- 模 M, $\mathrm{GKdim}\, M + j(M) = \mathrm{GKdim}\, A$.

在一般情形, Ramras 问题仍然没有解决. 近年, 由于非交换代数几何的发展, 人们关注连通分次情形的 Ramras 问题: 连通分次诺特正则环是否都是整环? 对整体维数为 4 的 Artin-Schelter 正则代数, Artin, Tate 和 Van den Bergh 给出了肯定答案 [7]. 对整体维数大于 4 的情形还没有解决. 人们进一步可问：是否 Artin-Schelter 正则代数都是强诺特、Auslander 正则、Cohen-Macaulay 的? 这个问题的解决将对人们进一步理解量子 (非交换) 射影空间起到非常重要的作用.

参 考 文 献

[1] Ramras M. Orders with finite global dimension. Pacific J Math, 1974, 50: 583-587

[2] Matsumura H. Commutative Algebra. Second edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, 1980

[3] Snider R L. Noncommutative regular local rings of dimension 3. Proc Amer Math Soc, 1988, 104: 49-50

[4] Goodearl K R, Jr Warfield R B. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[5] Stafford J T, Zhang J J. Homological properties of (graded) Noetherian PI rings. J Algebra, 1994, 168: 988-1026

[6] Kok-Ming Teo. Homological properties of fully bounded Noetherian rings. J London Math Soc, 1997, 55: 37-54

[7] Artin M, Tate J and Van den Bergh M. Modules over regular algebras of dimension 3. Invent Math, 1991, 106: 335-388

撰稿人：[1] 吴泉水 [2] 张 坚

1 复旦大学

2 华盛顿大学

Smashing 子范畴上的公开问题

An Open Problem on Smashing Subcategories

设 $\mathcal{T}$ 是一个对上积封闭的三角范畴, $\mathcal{S}$ 是其三角子范畴. 若 $\mathcal{S}$ 对 $\mathcal{T}$ 中上积封闭, 则称 $\mathcal{S}$ 为局部化子范畴. 若对局部化子范畴 $\mathcal{S}$, 嵌入函子 $\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ 有右伴随, 则称 $\mathcal{S}$ 为严格的局部化子范畴 (也称为 Bousfield 子范畴). 进一步, 若该右伴随保持上积, 则称 $\mathcal{S}$ 为 smashing 子范畴. $\mathcal{T}$ 中对象 X 称为紧对象, 如果函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-):\mathcal{T}\longrightarrow\mathbb{Z}\text{-Mod}$ 保持上积; $\mathcal{T}$ 称为紧生成的, 如果存在紧对象的一个集合 I, 使得 $\mathcal{T}$ 的包含 I 且对上积封闭的最小的三角子范畴恰好就是 $\mathcal{T}$.

设 $\mathcal{T}$ 是紧生成的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 中所有由紧对象生成的子范畴都是 smashing 子范畴. 人们曾经猜想这一结论的逆命题也是正确的, 即：紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 上所有的 smashing 子范畴都是由一些紧对象生成的[2]. 对三角范畴 $\mathcal{T}$, 若 $\mathcal{T}$ 上所有的 smashing 子范畴都是紧生成的, 则称 $\mathcal{T}$ 满足 smashing 猜想. 这一问题的最初形式由 Ravenel[10] 和 Bousfield[3] 在稳定同伦范畴中提出.

Neeman[9] 给出了一类满足该性质的三角范畴 —— 交换 noetherian 环上的导出范畴 $\mathbf{D}(R)$. 他对 $\mathbf{D}^{\mathrm{per}}(R)$ 中的 thick 子范畴和 $\mathbf{D}(R)$ 中的局部化子范畴以及 smashing 子范畴进行分类, 从而推导出 $\mathbf{D}(R)$ 上所有的 smashing 子范畴都是紧生成的. 然而不久, Keller[4] 就找到了一个非 noetherian 的交换环, 其上的导出范畴中存在不包含紧对象的 smashing 子范畴.

虽然 Keller 的反例表明 $\mathbf{D}(R)$ 无法满足 smashing 猜想, 但是在人们熟知的另几类紧生成三角范畴中, 这依然是公开问题. 在稳定同伦范畴中, Mahowald[7] 和 Miller[8] 证明了该猜想在特殊情形下的正确性. 另外, 对另一类紧生成的三角范畴 —— 自入射环的模范畴的稳定范畴 $\underline{\mathrm{Mod}}(\Lambda)$, Benson, Iyengar 和 Krause 已证明该猜想当 Λ 为群代数时是正确的[1].

这些结论自然导出公开问题: 对已知的紧生成三角范畴, 哪些满足 smashing 猜想?

Krause 和 Solberg[6] 对于自入射 Artin 代数 Λ 给出了 $\underline{\mathrm{Mod}}(\Lambda)$ 满足 smashing 猜想的等价描述: 设 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 为 $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ 中的 cotorsion 对. 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{F}$ 都对 filtered 上极限封闭, 则 $\mathcal{C}=\mathrm{colim}(\mathcal{C}\cap\mathrm{mod}(A))$.

设 $\mathcal{T}$ 为紧生成的三角范畴, Γ 为 $\mathcal{T}$ 中一些态射做成的类. 称局部化子范畴 $\mathcal{S}$ 由 Γ 生成, 若 $\mathcal{S}$ 是使得 Γ 中每一态射都经由 $\mathcal{S}$ 中对象分解的最小的局部化子范

畴. 则 $\mathcal{T}$ 满足 smashing 猜想可等价叙述为：$\mathcal{T}$ 中每一个 smashing 子范畴都是由紧对象上的恒等态射组成的集合生成. Krause[5] 证明了与这一猜想类似的结果：设 $\mathcal{T}$ 为紧生成的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 上所有的 smashing 子范畴都是由一些紧对象之间的态射组成的集合生成的. 若把范畴看成是环的推广, 则该猜想与经典环论中寻找幂等理想的幂等生成元的问题密切相关. 近年来，对于这一公开问题的研究已极大地推动了三角范畴的发展.

参 考 文 献

[1] Benson D J, Iyengar S B and Krause H. Localizing subcategories of the stable module category of a finite group. preprint

[2] Bökstedt M and Neeman A. Homotopy limits in triangulated categories. Compositio Math, 1993, 86: 209-234

[3] Bousfield A K. The localization of spectra with respect to homology. Topology, 1979, 18: 257-281

[4] Keller B. A remark on the generalized smashing conjecture. Manuscripta Math, 1994, 84: 193-198

[5] Krause H. Smashing subcategories and the telescope conjecture—an algebraic approach. Invent Math, 2000, 139: 99-133

[6] Krause H, Solberg Ø. Applications of cotorsion pairs. J London Math Soc, 2003, 68: 631-650

[7] Mahowald M. The image of J in the EHP sequence. Ann of Math (2), 1982, 116(1): 65-112

[8] Miller H R. On relations between Adams spectral, with an application to the stable homotopy of a Moore space. J Pure Appl Algebra, 1981, 20(3): 287-312

[9] Neeman A. The chromatic tower for D(R). Topology, 1992, 31: 519-532

[10] Ravenel D C. Localization with respect to certain periodic homology theories. Amer J Math, 1984, 106: 351-414

撰稿人：乐 珏 章 璞
上海交通大学

巴斯 – 奎伦 (Bass-Quillen) 猜想

Bass-Quillen Conjecture

巴斯–奎伦猜想源于著名的塞尔猜想. 设 R 是有单位元的交换环, $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 表示 R 上的 n 元多项式环. 1955 年, 法国数学家塞尔 (J. P. Serre)[7] 提出了这样一个问题：如果 K 是域, $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上的有限生成投射模是否一定是自由模?

初看起来, 此问题似乎不难. 因为 $n = 1$ 时, $K[x]$ 是主理想整环, 所以 $K[x]$ 上的投射模都是自由模. 对于 $n > 1$ 的情形, 尽管经过许多数学家的努力, 直到 1976 年此问题才由美国数学家奎伦 (D. Quillen)[5] 与前苏联数学家苏斯林 (A. Suslin)[8] 几乎同时解决. 他们用不同的方法独立地证明了：$K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上的有限生成投射模都是自由模.

在解决塞尔猜想的过程中, “扩张”的概念起了关键性的作用. 设 M 是一个 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$- 模, 如果存在一个 R- 模 M_0 使得 $M \cong R[x_1, x_2, \cdots, x_n] \otimes_R M_0$, 则称 M 可由 R- 模扩张得到. 利用扩张的语言, 塞尔猜想等价于：$K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上的有限生成投射模均可由 K- 空间扩张得到.

巴斯 – 奎伦猜想 如果 R 是诺特 (Noether) 正则环, 则 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上的有限生成投射模可由 R- 模扩张得到 (其中正则环是指每个有限生成模的投射维数都有限的环).

巴斯–奎伦猜想也等价于：如果 R 是诺特正则局部环, 则 $R[x]$ 上的有限生成投射模都是自由模 (其中局部环是指有唯一极大理想的环).

巴斯–奎伦猜想是塞尔猜想的自然延伸. 自从 1976 年塞尔猜想解决之后, 巴斯–奎伦猜想成了同调代数、代数 K- 理论以及环论等方向共同关注的一个热点问题. 正像塞尔猜想推动了代数 K- 理论的发展一样, 巴斯–奎伦猜想无疑会对代数学及相关学科产生重要影响. 该猜想至今仍未解决, 主要进展可参阅文献 [3]. 例如, 若 $R = K[[x_1, x_2, \cdots, x_d]]$ 是域 K 上 d 个未定元的形式幂级数环 (其中 d 是正整数), 则 $R[x]$ 上的有限生成投射模都是自由模. 这是有关巴斯–奎伦猜想的第一个重要结果. 又如, 巴斯–奎伦猜想在 Dedekind 环上成立 (其中的 Dedekind 环是指每个理想都是投射模的整环), 该结果由奎伦和苏斯林独立证明; 若诺特正则局部环 R 的 Krull 维数 $\leqslant 2$, 或者 R 的 Krull 维数等于 3 但 R 的特征不是 2 或 3, 则巴斯–奎伦猜想成立. 另外, 非正则或非诺特情形下的巴斯–奎伦猜想受到很多学者的重视.

例如, 巴斯–奎伦猜想在 Prüfer 环上也成立 (这里的 Prüfer 环是指每个有限生成理想都是投射模的整环).

参 考 文 献

[1] Bass H. Some problems in “classical” algebraic K-theory // Algebraic K-Theory II. Berlin: Springer-Verlag, 1973, 1–70

[2] Bhatwadekar S M, Rao R A. On a question of Quillen. Trans Amer Math Soc, 1983, 279: 801-810

[3] Lam T Y. Serre's Problem on Projective Modules. Berlin: Springer-Verlag, 2006

[4] Lequain Y, Simis A. Projective modules over $R[x_1, \cdots, x_n]$, R a Prüfer domain. J Pure Appl Algebra, 1980, 18: 165-171

[5] Quillen D. Projective modules over polynomial rings. Invent Math, 1976, 36: 167-171

[6] Rao R A. The Bass-Quillen conjecture in dimension three but characteristic $\neq 2, 3$ via a question of a Suslin. Invent Math, 1988, 93: 609-618

[7] Serre J P. Faisceaux algébriques cohérents (in French). Ann of Math, 1955, 61(2): 197-278

[8] Suslin A A. Projective modules over polynomial rings are free (in Russian). Dolk Akad Nauk SSSR, 1976, 229: 1063-1066. English Translation: Soviet Math Dokl, 1976, 17: 1160-1164

撰稿人：丁南庆
南京大学

非半单 Brauer 代数的表示理论

The Representation Theory for Non-semisimple Brauer Algebras

20 世纪初, I. Schur 在文献 [7] 中研究了一般线性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的多项式表示. 通过建立 Schur-Weyl 对偶, Schur 把 $GL_n(\mathbb{C})$ 的 r 次齐次多项式表示范畴和对称群 $\mathfrak{S}_r$ 的表示范畴联系起来.

1937 年, R. Brauer 在文献 [1] 中, 利用生成元和关系式, 定义了一类有限维结合代数 $B_r(\delta)$, 以替换 Schur 工作中的对称群. 这类结合代数被称为 Brauer 代数或 Brauer 中心化代数, 它们在辛群 $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ 和正交群 $O_n(\mathbb{C})$ 的表示理论中起着关键作用.

研究复数域上的 Brauer 代数的结构与表示理论已有很长历史. 由于 Brauer 代数不是对称代数, 它的结构与表示理论十分复杂. 在文献 [9] 中, H. Weyl 研究了参数是正整数的 Brauer 代数. Weyl 证明了 $B_r(\delta)$ 是半单代数, 如果参数 $\delta \geqslant r$. 此时, $B_r(\delta)$ 的结构不依赖于参数 δ. 当 $1 \leqslant \delta \leqslant r-1$ 时, $B_r(\delta)$ 是一个非半单代数. 此时, 研究 $B_r(\delta)$ 的半单商是一个十分困难的问题.

在 20 世纪 80 年代, P. Hanlon 和 D. Wales 猜测：参数不是整数的复数域上的 Brauer 代数一定是半单代数. 这个猜测被 H. Wenzl 证明[8]. 2004 年, 芮和兵[6] 给出了一般域上的 Brauer 代数是半单代数的充要条件, 从而对完全可约的 $B_r(\delta)$– 模范畴有了一个清晰地认识.

当 $B_r(\delta)$ 非半单时, J. Graham 和 G. Lehrer 给出了一般域上的 $B_r(\delta)$ 的不可约表示分类[5]. 尚未解决的关键问题是研究 $B_r(\delta)$ 的半单商. 这个问题等价于给出 Brauer 代数的不可约表示的维数公式. 相关的问题有模分歧法则、不可约表示在胞腔表示中的重数等. 当域的特征整除 $r!$ 时, 由于 $B_r(\delta)$ 的表示理论包含对称群的表示理论, 这使得 $B_r(\delta)$ 的结构与表示的性质更难被理解.

近年来, 在 Brauer 代数的块理论等方面取得了进展[2,4], 这有助于理解 Brauer 代数的结构与表示. 另一方面, Dipper, Doty 和胡峻[3] 在正特征域上的 Brauer 代数的 Schur-Weyl 对偶方面取得了进展. 目前, 我们离完全理解非半单的 Brauer 代数的结构与表示还十分遥远, 仍然需要做大量而困难的研究工作.

参 考 文 献

[1] Brauer R. On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. Ann Math, 1937, 38: 857-872

[2] Cox A, Visscher N and Martin P. The blocks of the Brauer algebras in characteristic zero. arXiv: math/0601387

[3] Dipper R, Doty S and Hu J. Brauer's centralizer algebras, symplectic Schur algebras and Schur-Weyl duality. Trans AMS, 2008, 360: 189-215

[4] Donkin S, Tange R. The Brauer algebras and the symplectic Schur algebras. arXiv: 0806.4500

[5] Graham J and Lehrer G. Cellular algebras. Invent Math, 1996, 123: 1-34

[6] Rui H. A criterion on semisimple Brauer algebras. J Comb Theory, Ser A, 2005, 111: 78-88

[7] Schur I. Über eine klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen // Schur I. Gesammelte Abhandlungen I. Berlin: Springer-Verlag, 1901, 1-70

[8] Wenzl H. On the structure of Brauer's centralizer algebras. Ann Math, 1998, 128: 173-193

[9] Weyl H. The Classical Groups. Their Invariants and Representations. Fifteenth printing. Princeton: Princeton University Press, NJ, 1997

撰稿人：芮和兵
华东师范大学

非交换曲面的分类

Artin's Program on The Classification of Noncommutative Surfaces

Artin 意义下的非交换射影几何的出发点是基于交换代数几何中的 Serre 定理：设 X 是射影概形, 则 X 上的凝聚模层全体构成的范畴 coh X 等价于商范畴 qgr$B$, 这里 $B = \oplus_{n\geqslant 0}\Gamma(X, \mathcal{L}^n)$ 是一个交换分次代数, $\mathcal{L}$ 是 X 上的一个丰富线丛, qgr$B$ 是有限生成分次 B- 模范畴模去挠子模全体所得的商范畴. 在非交换的情形, 我们事先没有 (恰当的) 空间 X 的概念, 当然也就没有 coh X. 然而, 给定一个非交换分次代数 A, 我们仍有商范畴 qgr$A$. 另一方面, 给定一个 k- 线性 Abel 范畴 $\mathcal{C}$、一个对象 $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 的一个自等价 σ, 存在一个相应的, 如 Serre 定理中的非交换版本的齐次坐标环 B. 在适当的条件下, 利用这个构造, 从范畴 qgr$A$ 出发可以找回 A(可能在有限个分次部分有差别)[1]. 这样我们就有一个代数现象和几何现象之间双向解释的手段. qgr$A$ 被称为非交换射影概形, 常记为 proj A. 而 A 也称为 proj A 的坐标环[1]. 当 A 是正则代数时 (Artin-Schelter 意义下), proj A 被理解为量子 (非交换) 射影空间.

粗略地说, 非交换射影曲线或曲面对应的坐标环是具有二次或三次增长的连通分次代数. 可以说非交换射影曲线 (或具有二次增长的连通分次代数) 的分类已经完成[2]. 非交换曲面的分类是非常自然且重要的问题. 在 20 世纪八、九十年代, Artin, Schelter, Tate 和 Van den Bergh[3~5] 完成了对量子 (非交换)$\mathbb{P}^2$ 的研究. 之后, Artin 率先开始研究一般的非交换曲面, 并计划对非交换曲面 proj A 完全分类, 这里 A 是满足一些同调假设的 Gelfand-Kirillov 维数为 3 的连通分次诺特整环. 2001 年 Stafford 与 Van den Bergh 发表了一篇关于非交换曲线和曲面的综述文章[6], 作了系统的总结. 其中对非交换曲面的极小模型作了详细描述, 也包括 Van den Bergh 的非交换 Blowing-up 与 Blowing-down[7]. 如同在交换曲面的分类中一样, 这些也将是非交换曲面分类中非常有用的工具. Artin 猜想从非交换曲面产生的超越次数为 2 的可除代数必是 PI(满足多项式恒等式) 的、ruled(直纹) 的以及 Sklyanin 的这三者之一, 即与已经知道的非交换曲面双有理等价. 近年, Chan, Ingalls 和 Kulkarni 对 PI 的情况做了很多工作[8~11]；Artin 和 de Jong 也有重要工作 (手稿). 对非 PI 的情况, Keeler, Rogalski 和 Stafford[12~14] 研究了一些与交换情形有本质不同的非交换曲面. 非交换曲面分类工作的深入开展有力地促进了非交换代数和非交换几何的发展. 关于非交换曲面的分类, 虽然已有很多的研究, 但距离完全解决还有很

长的一段路.

参 考 文 献

[1] Artin M and Zhang J J. Noncommutative projective schemes. Adv Math, 1994, 109: 228-287

[2] Artin M and Stafford J T. Noncommutative graded domains with quadratic growth. Invent Math, 1995, 122: 231-276

[3] Artin M and Schelter W F. Graded algebras of global dimension 3. Adv Math, 1987, 66: 171-216

[4] Artin M, Tate J and Van den Bergh M. Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 33-85, Progr Math, 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990

[5] Artin M, Tate J and Van den Bergh M. Modules over regular algebras of dimension 3. Invent Math, 1991, 106: 335-388

[6] Stafford J T, Van den Bergh M. Noncommutative curves and noncommutative surfaces. Bull Amer Math Soc, 2001, 38: 171-216

[7] Van den Bergh M. Blowing up of non-commutative smooth surfaces. Mem Amer Math Soc, 2001, 154

[8] Chan D. Noncommutative cyclic covers and maximal orders on surfaces. Adv Math, 2005, 198: 654-683

[9] Chan D, Ingalls C. The minimal model program for orders over surfaces. Invent Math, 2005, 161: 427-452

[10] Chan D, Kulkarni R S. del Pezzo orders on projective surfaces. Adv Math, 2003, 173: 144-177

[11] Chan D, Kulkarni R S. Numerically Calabi-Yau orders on surfaces. J London Math Soc, 2005, 72: 571-584

[12] Keeler D S, Rogalski D and Stafford J T. Naïve noncommutative blowing up. Duke Math J, 2005, 126: 491-546

[13] Rogalski D. Generic noncommutative surfaces. Adv Math, 2004, 184: 289-341

[14] Rogalski D, Stafford J T. Naïve noncommutative blowups at zero-dimensional schemes. J Algebra, 2007, 318: 794-833

撰稿人：[1] 吴泉水 [2] 张 坚

1 复旦大学

2 华盛顿大学

关于码交换等价于前缀码的猜测

On The Conjecture for Every Code to Be Commutatively Equivalent to A Prefix Code

编码与信息理论的研究可以追溯到 C.E.Shannon 在 1948 年的创新性工作, 后来这一研究被开发到两个独立的方向, 其一就是 M.P.Schutzenberger 于 1955 年开创的 “变长度 (代数) 码理论” 的研究 (见文献 [1]), 它涉及 “半群理论”、“(半群) 字的组合” 以及 “理论计算机科学”. 我们要介绍的关于变长度码的这一猜测 (即下面的猜测 1, 1977 年提出) (见文献 [2]), 在正则的情形, 是 J.Brzozowski 于 1979 年所提出的关于正则语言的六大著名的公开问题之一 (见文献 [3]).

令 X 是一有限集, X^* 是由 X 生成的自由幺半群. 称 X^* 的元素 (子集) 为 X 上的 (半群) 字 (语言); 称自由幺半群 X^* 的幺元 1 为 X 上的空字; 称 X 上一非空语言 C 为 X 上一 (代数) 码, 如果

$$\forall x_1, x_2, \cdots x_m, y_1, y_2, \cdots y_n \in C,$$
$$x_1x_2\cdots x_m = y_1y_2\cdots y_n \to m = n, \quad x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m;$$

称 X 上一含于 $X^+ = X^* \backslash \{1\}$ 的非空语言 P 为 X 上**一前缀码**, 如果

$$\forall x, y \in P, \forall z \in X^*, \quad y = xz \to z = 1.$$

显然, 前缀码是一类特殊的码. 关于 X 上任一字 x 和 X 的任一元素 a, 用 x/a 表示 a 在 x 中出现的次数. 称 X 上两个字 x, y 是交换等价的, 记为 $x \approx y$, 如果

$$\forall a \in X, \quad x/a = y/a;$$

称 X 上两个语言 A, B 是交换等价的, 记为 $A \approx B$, 如果存在双射 $\sigma : A \to B$ 使得

$$\forall x \in A, \quad x \approx \sigma(x).$$

猜测 1 (交换等价猜测)[2]　码交换等价于前缀码.

事实 1[4]　上述猜测是错的.

该事实所用的反例不但是正则的, 而且是有限的, 因此, 在参考文献 [3] 中提到的该猜测于正则的情形也被推翻.

许多学者, 在事实 1 获得之前, 或者在获知事实 1 之前, 得到了一系列阶段性成果, 其中, 除了关于猜测 1 在若干特殊情形的正面回答, 还有我们关于猜测 1 的两个等价的陈述.

事实 2[5]　下列诸款等价:

(i) 码交换等价于前缀码;

(ii) 单码交换等价于前缀码;

(iii) n 元集合 X 上的单码 C 的特征序列 $K_1(C), \cdots, K_n(C)$ 满足下列不等式:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(C)(n-i)! \leqslant n!,$$

其中,$K_i(C)$ 表示 $C \cap X^i$ 含元素的个数. 所谓单码, 是指满足下列条件的码 C:

$$\forall x \in C, \forall a \in X, \quad x/a \leqslant 1.$$

有限极大意义上的各种码是最具应用价值的, 基于事实 1, 文献 [6] 又陈述了下述新猜测, 它至今依然未获解决.

猜测 2 (有限极大意义上的交换等价猜测)[6]　有限极大码交换等价于有限极大前缀码.

鉴于事实 2, 我们有

问题　关于猜测 2, 能否建立类似于事实 2 的等价陈述?

参 考 文 献

[1] Schutzenberger M P. Une theorie algebrique du codage. Seminaire Dubreil-Pisot 1955-56, expose No. 15, 1955

[2] Perrrin D, Schutzenberger M P. Un probleme elementaire de la theorie de linformation. Colloques internet, CNRS 276, Cachan, 1977, 249-260

[3] Brzozowski J A. Open problems about reguler languages presented at the International Symposium. Santa Barbara, 1979, 10-14

[4] Shor P. A counterexample to the triangle conjecture. J Combin Theor Ser A, 1983, 38: 110-112

[5] 章亮, 郭聿琦, 汪利民. 关于 “码常交换等价于前缀码” 的猜测. 中国科学, A 辑, 1987, 2: 143-148

[6] Bruyere V, Latteux M. Variable-Length Maximal Codes. Automata, Languages and Programming (paderborn, 1996). Berlin: Springer-Verlag, 1996, 24-47

撰稿人: 郭聿琦
西南大学

关于半群上一类重要同余的一个系列推广模式

A Model of Systematic Generalizations for An Important Kind of Congruences on Semigroups

由理想确定的 Rees 同余和由子集确定的主同余是半群上的两类重要同余. 我们这里涉及的是后者的一个系列推广模式. 我们从 H.Prodinger 于 1980 年就 “有限生成自由幺半群” 提出的关于半群上主右同余的一个推广思路开始.

令 S 是一半群, $T\subseteq S$. 则 S 上下述二元关系 $\mathbf{P}(T)(\mathbf{R}(T))$ 是 S 上一同余 (右同余), 称为 S 上由 T 确定的主同余 (*主右同余*): 关于任意 $x,y\in S$,

$$x\mathbf{P}(T)y\leftrightarrow F_T(x,y)=S^1\times S^1\quad (x\mathbf{R}(T)y\leftrightarrow G_T(x,y)=S^1),$$

其中,

$$F_T(x,y)=\{(u,v)\in S^1\times S^1|uxv\in T\leftrightarrow uyv\in T\}$$
$$(G_T(x,y)=\{u\in S^1|xu\in T\leftrightarrow yu\in T\}).$$

称 T 是*正则的*, 如果 $R(T)$ 在 S 上指数有限. 称 S^1 的子集族 $\mathbf{L}$ 为 S^1 上一*左除性滤子* (*左除性半滤子*), 如果它们满足下面的左四条 (右三条):

(i), $S^1\in \mathrm{L}$,

(ii), $A,B\in \mathrm{L}\rightarrow A\cap B\in \mathrm{L}$,

(iii), $A\in \mathrm{L},A\subseteq B\rightarrow B\in \mathrm{L}$,

(iv), $A\in \mathrm{L},z\in S^1\rightarrow \mathrm{D}_zA\in \mathrm{L}$.

(i′), $S^1\in \mathrm{L}$,

(ii′), $A,B\in \mathrm{L}\rightarrow A*B\in \mathrm{L}$,

(iii′), $A\in \mathrm{L},\ z\in S^1\rightarrow \mathrm{D}_zA\in \mathrm{L}$.

其中, $\mathrm{D}_zA=\{x\in S^1|zx\in A\}$, $A*B$ 是 A 与 B 的对称差的补, 即

$$A*B=[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]^c.$$

显然, 左除性滤子是左除性半滤子.

定义 1[1] 令 S 是一半群, $T\subseteq S,\mathrm{L}$ 是 S^1 上一左除性半滤子. 定义 $\mathbf{R}(T,\mathrm{L})$ 是 S 上下述二元关系: 关于任意 $x,y\in S$,

$$x\mathbf{R}(T,\mathrm{L})y\leftrightarrow G_T(x,y)\in \mathrm{L}.$$

我们有下面的几个显然的事实:

(1) $\mathbf{R}(T, \mathrm{L})$ 是 S 上一右同余；

(2) $\{S^1\}$ 是一左除性滤子, $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(T, \{S^1\})$. 因此, 关于任意左除性半滤子 $\mathrm{L}, \mathbf{R}(T, \mathrm{L})$ 是 $\mathbf{R}(T)$ 的加粗；

(3) $\mathrm{C}_{S^1} = \{A \subseteq S^1 | A^c$ 有限$\}$是 S^1 上一个滤子, 称为 “余有限” 滤子. 一般情况下, $\mathrm{C}_{S^1} = \{A \in S^1 | A^c$ 有限$\}$不一定是一左除性滤子. 例如, 当 S 是一含零元 0 的无限半群时, $A = S^1 \backslash \{0\}$ 是 “余有限” 的, 但 $\mathrm{D}_0 A = \{x \in S^1 | 0x \in A\}$ 是空集, 当然不 “余有限”.

记号 1 令 S 是一半群. 记 S^1 上的左除性滤子 (半滤子) 的全体为 LDF_{S^1} (LDSF_{S^1}), 关于任意 $\mathrm{L} \in \mathrm{LDSF}_{S^1}$, 记 $\mathbf{R}_L = \{T \subseteq S^1 | \mathbf{R}(T, \mathrm{L})$ 的指数有限$\}$.

问题 1[1] 令 X 是一有限集, X^* 是 X 生成的自由幺半群 (称 X^* 的子集为 X 上的语言), 则 $\mathrm{C}_{X^*} \in \mathrm{LDF}_{X^*}$. 问 $\mathbf{R}_{\{X^*\}} = \mathbf{R}_{C_{X^*}}$? (等号左边是*正则语言类*).

下面的事实 1 从正面回答了问题 1, 它的证明使用的是由自由群 (见文献 [2]) 里移植过来的所谓 Schreier *方法*.

事实 1[3] $\mathbf{R}_{\{X^*\}} = \mathbf{R}_{\mathrm{C}_{X^*}}$.

事实 1 实际上是用 “余有限” 左除性半滤子 C_{X^*} 给出了正则语言类的一个新刻画. 于是下面的问题是自然的.

问题 2 寻找另外的 $\mathrm{L} \in \mathrm{LDF}_{X^*}(\mathrm{LDSF}_{X^*})$, 使得 $\mathbf{R}_{\{X^*\}} = \mathrm{R}_{\mathrm{L}}$.

更一般的, 我们有

问题 3 令 $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \in \mathrm{LDF}_{X^*}(\mathrm{LDSF}_{X^*})$. 给出 $\mathrm{R}_{\mathrm{L}1} = \mathrm{R}_{\mathrm{L}2}$ 的一个充分必要条件.

问题 4 在一般半群 S 中开展问题 1, 2, 3 的研究.

现在, 我们把注意力由主右同余转移到主同余. 考虑 $S^1 \times S^1$ 上的*除性滤子* (*半滤子*), 它是满足条件 i, ii, iii, iv_1, iv_2 [i′, ii′, iv_1, iv_2] 的 $S^1 \times S^1$ 的子集族, 其中

$$(\mathrm{iv}_1)\ A \in \mathrm{L},\ z \in S^1 \to \mathrm{D}_z A \in \mathrm{L}, \qquad (\mathrm{iv}_2)\ A \in \mathrm{L},\ z \in S^1 \to_z \mathrm{D}A \in \mathrm{L},$$

其中, ${}_z\mathrm{D}A = \{(x, v) \in S^1 \times S^1 | (xz, v) \in A\}$, $\mathrm{D}_z A = \{(u, x) \in S^1 \times S^1 | (u, zx) \in A\}$.

记号 2 用 DF[DSF] 表示 $S^1 \times S^1$ 上所有*除性滤子* (*除性半滤子*) 的*集合*. 关于任意 $\mathrm{L} \in \mathrm{DF(DSF)}$, 记 $\mathrm{R_L} = \{T \subseteq S^1 \mid \mathrm{P}(T, \mathrm{L})$ 的指数有限$\}$, 其中, 关于任意 $x, y \in S^1$,

$$x\mathrm{P}(T, \mathrm{L})y \leftrightarrow F_T(x, y) \in \mathrm{L}.$$

问题 5 就如上定义的除性滤子 (半滤子) 在自由半群和一般半群中分别开展问题 1, 2, 3 的研究.

参 考 文 献

[1] Prodinger H. Congruences defined by language and filters. Inform Contr, 1980, 1(44): 36-46
[2] Hall M Jr. The Theory of Groups. New York: Macmillian, 1959
[3] 郭聿琦, 王水汀, 李廉. Prodinger 问题与正则语言的 Schreier 方法. 数学学报, 1983, 26(3): 332-340
[4] Lallement G. Semigroup and Combinatorical Applications. New York: John Wiley, 1979

撰稿人：郭聿琦 王守峰
西南大学

关于有限码具有有限完备化的判定问题

The Decision Problem for A Finite Code Having A Finite Completion

在 M.P.Schutzenberger 于 1955 开创的 “变长度码理论” 中[1], 除了 “码交换等价于前缀码” 的猜测及其局限于 “有限极大” 情形的猜测外 (见文献 [2]、[3], 也可参看我们平行于这里的一个有关的专门介绍), 另一个主要的公开问题就是 “有限码具有有限完备化的判定问题”. 这一问题的背景是, 许多有关 “编码过程优化” 的问题都涉及码的一些极端性质, 诸如 “极大性”, “完备性” 等; 另外, 这一问题与 “有限极大码交换等价于有限极大前缀码” 的猜测[3] 也有密切的联系.

令 X 是一有限集, X^* 是由 X 生成的自由幺半群. 称 X^* 的元素 (子集) 为 X 上的(半群) 字 (语言); 称自由幺半群 X^* 的幺元 1 为 X 上的空字; 称 X 上一非空语言 C 为 X 上一(代数) 码, 如果

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n \in C,$$
$$x_1x_2\cdots x_m = y_1y_2\cdots y_n \rightarrow m = n, \quad x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots m;$$

称 X 上一含于 $X^+ = X^*\backslash\{1\}$ 的非空语言 P 为 X 上一前缀码, 如果

$$\forall x, y \in P, \quad \forall z \in X^*, \quad y = xz \rightarrow z = 1.$$

后缀码是前缀码的对偶概念, 显然, 前、后缀码都是特殊的码. 关于 X 上任一字 x 和 X 的任一元素 a, 用 x/a 表示 a 在 x 中出现的次数. 称 X 上两个字 x, y 是交换等价的, 记为 $x \approx y$, 如果

$$\forall a \in X, \quad x/a = y/a.$$

称 X 上两个语言 A, B 是交换等价的, 记为 $A \approx B$, 如果存在双射 $\sigma : A \rightarrow B$ 使得

$$\forall x \in A, \quad x \approx \sigma(x).$$

称 X 上一码 C 是完备的, 如果

$$\forall w \in X^*, \quad X^*wX^* \cap C^* \neq \Phi.$$

称 X 上一有限码 C 具有有限完备化, 如果它能被嵌入一有限完备码. 称 X^* 上一语言 L 是正则的, 如果 X^* 上下述等价关系 $\sim_L$ 的指数有限: 关于任意 $x, y \in X^*$,

$$x \sim_L y \quad \Leftrightarrow \quad \forall u, v \in X^*, \quad uxv \in L \leftrightarrow uyv \in L.$$

显然, 有限码是正则码.

下面的事实指出, 在一定条件下, 码的极大性和完备性是一致的.

事实 [1] 正则码 (特别地, 有限码) 是完备的当且仅当它是极大的.

例 [3,4]

(1) 任何有限前缀 (后缀) 码都具有有限前缀 (后缀) 完备化;

(2) $\{a,b\}$ 上的有限码 $\{aa,ba\}$ 具有有限完备化;

(3) $\{a,b\}$ 上的有限码 $\{aaaaa,aab,ba,b\}$ 不具有有限完备化.

推翻 "码交换等价于前缀码" 猜测的那个非极大有限码的反例是 $\{a,b\}$ 上的有限码[3,5]

$$C=b\{1,a,a^7,a^{13},a^{14}\}\cup\{a^3,a^8\}b\{1,a^2,a^4,a^6\}\cup a^{11}b\{1,a,a^2\}.$$

问题 1[3] 上面的有限码 C 具有有限完备化 (据事实 1, 即有限极大化) 吗?

这一问题与 "有限极大码交换等价于有限极大前缀码" 的猜测的联系在于, 如果问题 1 的回答是正面的, 那么 "有限极大码交换等价于有限极大前缀码" 的猜测就是错的.

问题 2[3] 有限码具有有限完备化是可判定的吗?

参 考 文 献

[1] Schutzenberger M P. Une theorie algebrique du codage, Seminaire Dubreil-Pisot 1955-56. expose No. 15 (1955)

[2] Perrrin D, Schutzenberger M P. Un probleme elementaire de la theorie de linformation. Colloques internet. CNRS 276, Cachan 1977, 249-260

[3] Bruyere V, Latteux M. Variable-Length Maximal Codes. Automata, Languages and Programming (paderborn, 1996). Berlin: Springer-Verlag, 1996, 24-47

[4] Restivo A. On codes having no finite completions. Discrete Math, 1977, 17: 309-316

[5] Shor P. A counterexample to the triangle conjecture. J Combin Theor Ser A, 1983, 38: 110-112

撰稿人：郭聿琦 刘 云
西南大学

关于正则半群的两个嵌入问题

Two Embedding Problems for Regular Semigroups

正则半群是半群代数理论的主流研究领域, 从若干 “(某种意义上) 更靠近群” 的正则半群 (诸如逆半群, 完全正则半群等) 的研究入手开发正则半群的研究是当然的趋势. 下面的两个问题是遵循这一趋势于 2002 年被提出来的.

令 S 是一半群, $a \in S$. 称 S 是一幺半群, 如果 S 含恒等元; 称 a 是 S 的一个*正则元*, 如果 S 的子集 $V(a)$ 非空, 其中, $V(a) = \{x \in S | axa = a, xax = x\}, V(a)$ 中的元素称为 a 的*逆元*; 称 S 是一*正则 (逆) 半群*, 如果关于任意 $a \in S, V(a)$ 非空 ($V(a)$ 是一单元集). S 的所有幂等元形成的子集用 $E(S)$ 表示. 称 $E(S)$ 是一*带*, 如果 $E(S)$ 是 S 的一个子半群; 称 S 是一*纯正半群*, 如果 $E(S)$ 是一带; 称带 $E(S)$ 是一*半格* (*交换带*)、*正则带*、*正规带*、*半正规带*, 如果它们分别满足

$$\begin{aligned}
&\forall e, f \in E(S), \quad ef = fe;\\
&\forall e, f, g \in E(S), \quad efege = efge;\\
&\forall e, f, g \in E(S), \quad efge = egfe;\\
&\forall e \in E(S), \quad eE(S)e \text{ 是正则带}.
\end{aligned}$$

众所周知, 逆半群恰是 $E(S)$ 为半格的半群, 因此逆半群是纯正的; 称 S 的非零幂等元 f 是*本原的*, 如果关于任意非零幂等元 $e, ef = fe = e \to e = f$.

一正则半群称为*完全单的*, 如果它不含真理想, 而且含一本原幂等元; 称半群 S 是*局部逆的*, 如果关于任意幂等元 e, eSe 是逆子半群; 称正则半群 S 是弱 E- 酉的, 如果

$$\forall e \in E(S), \quad \forall a \in S, \quad e \leqslant a \to a \in E(S).$$

其中, “$\leqslant$” 是正则半群 S 上的自然偏序, 定义如下：关于任意 $a, b \in S$,

$$a \leqslant b \leftrightarrow \exists e, f \in E(S), \quad a = eb = bf.$$

称一正则半群 S 是局部 r- 纯正的, 如果关于任意 $e \in E(S)$, eSe 是以 $E(eSe)$ 为正则带的纯正 (幺) 半群. 称半群 S 到半群 T 的同态 ϕ 是幂等元分离的, 如果

$$\forall e, f \in E(S), \quad \phi(e) = \phi(f) \to e = f.$$

事实 1[1,2] 每一弱 E- 酉局部逆半群可嵌入一 “正规带经由完全单半群” 的半直积.

问题 1[2] 是否每一弱 E- 酉局部 r- 纯正半群可嵌入一 “半正规带经由完全单半群” 的半直积?

事实 2[2~5] 每一逆半群可嵌入一 “半格经由群” 的半直积的幂等元分离同态像.

问题 2[2] 推广事实 2 到正则半群的一个尽量大的子类中.

参 考 文 献

[1] Billhardt B, Hsieh S C. Weakly E-Unitary locally inverse semigroups. preprint

[2] M B Szendrei. Some open problems in the structure theory of regular semigroups. Semigroup Forum, 2002, 64: 213-223

[3] McAlister D B. Groups, semilattice and inverse semigroups. Trans Amer Math Soc, 1974, 192: 227-244

[4] Lawson M V. Almost factorisable inverse semigroups. Glasgow Math J, 1994, 36: 97-111

[5] Lawson M V. Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries. Singapore: World Scientific, 1998

撰稿人：郭聿琦
西南大学

广义倾斜模中的两个猜想

Two Conjectures in Generalized Tilting Modules

倾斜理论可追溯到 Bernstein-Gelfand-Ponomarev, 经过 Auslander-Platzeck-Reiten, Brenner-Butler, Happel-Ringel 等数学家的工作, 它在代数表示、群表示、导出范畴、代数群、量子群、丛 (cluster) 代数等领域得到广泛应用. 特别地, Happel 证明 Artin 代数与其倾斜模的自同态代数导出等价; Rickard 引入倾斜复形并给出导出范畴的 Morita 理论. 相关经典结果、最新进展和文献, 可参看文献 [8].

设 A 为域上的有限维代数. 有限维 A- 模 T 称为广义倾斜模 (generalized tilting module)[9], 如果 (i) $\text{proj.dim}_A T = r, r < \infty$; (ii) $\text{Ext}^i_A(T,T) = 0, \forall i > 0$; (iii) 存在正合列 $0 \to {}_AA \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$, 使得 $T_i \in \text{add}(T)$, 其中 $\text{add}(T)$ 表示 T 的有限直和的所有直和项. 现在通常将广义倾斜模简称为倾斜模. 若模 M 仅满足条件 (i) 和 (ii), 则称 M 为部分倾斜模 (partial tilting module). 若在上述定义中 $r = m = 1$, 则称 T 为经典倾斜模、M 为经典部分倾斜模. 倾斜理论是从经典情形发展出来的[4].

用 $\delta(M)$ 表示有限维 A- 模 M 的互不同构的不可分解直和项的个数. 记 $n = \delta(A)$, n 也是互不同构的有限维单 A- 模的个数. 熟知, 对倾斜模 T 总有 $\delta(T) = n$; 而对部分倾斜模 M 总有 $\delta(M) \leqslant n$. 称满足等式 $\delta(M) = n - 1$ 的部分倾斜模 M 为几乎完备倾斜模 (almost complete tilting module). 对于部分倾斜模 M, 若存在满足 $\text{add}(X) \cap \text{add}(M) = 0$ 的 A- 模 X, 使得 $M \oplus X$ 为倾斜模, 则称 X 为 M 的倾斜补. 以下是倾斜模理论中的两个主要猜想.

倾斜模猜想 1 如果部分倾斜模 M 满足 $\delta(M) = n$, 则 M 是倾斜模.

倾斜模猜想 2 几乎完备倾斜模在同构的意义下最多只有有限多个不可分解倾斜补.

如果部分倾斜模均有倾斜补, 则猜想 1 自然成立. 经典部分倾斜模都有倾斜补[2]; 对于有限表示型代数, 部分倾斜模必定有倾斜补[10]. 然而, 对任意有限维代数, 部分倾斜模未必总有倾斜补[10]. 当然这并不意味猜想 1 不成立, 但说明试图通过寻找倾斜补来证明猜想 1 并非总行得通. 文献 [1] 指出：若部分倾斜模 M 的垂直范畴 $M^{\perp}$ 是反变有限的, 则 M 有倾斜补; 文献 [6] 指出这一结果的逆命题不成立; 不过若 M 是几乎完备倾斜模, 则 M 的倾斜补存在当且仅当 $M^{\perp}$ 反变有限.

另一方面, 文献 [5] 证明了：经典的几乎完备倾斜模 M 的倾斜补的个数在同

构意义下最多为 2; 而 M 的倾斜补唯一当且仅当 M 不为忠实模. 这一结果也促成了猜想 2 的提出. 文献 [3] 证明了：当全子范畴 $\mathcal{C} = \{X \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Ext}_A^i(X, M) = 0\ \forall i > 0, \mathrm{proj.dim}_A X < \infty\}$ 反变有限时, 猜想 2 成立; 同时也证明了：若有限维数猜想 (Finitistic dimension conjecture) 成立, 则猜想 2 成立. 而文献 [7] 指出, 若猜想 2 成立则广义 Nakayama 猜想 (Generalized Nakayama Conjecture) 成立：即每个不可分解内射 A- 模必为代数 A 的极小内射分解中某一项的直和项.

综上所述, 这两个猜想非常有趣且具挑战性, 同时也与表示论和同调代数中其他问题密切相关. 目前处理它们的主要工具是反变有限子范畴, 如何发展新的工具来解决它们以及深入探讨它们与其他同调猜想的之间的联系, 是代数学家关注的一个课题.

参 考 文 献

[1] Auslander M, Reiten I. Applications to contravariantly finite subcategories. Adv Math, 1991, 86: 111-152

[2] Bongartz K. Tilted Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 26-38

[3] Coelho F, Happel D and Unger L. Complements to partial tilting modules. J Algebra, 1994, 170: 184-205

[4] Happel D, Ringel C M. Tilted algebras. Trans Amer Math Soc, 1982, 274: 399-443

[5] Happel D, Unger L. Almost complete tilting modules. Proc Amer Math Soc, 1989, 107: 603-610

[6] Happel D, Unger L. Partial tilting modules and covariantly finite subcategories. Comm Algebra, 1994, 22(5): 1723-1727

[7] Happel D, Unger L. Complements and the generalized Nakayama conjecture. Algebras and modules II (Geiranger, 1996), 293-310, CMS Conf Proc, 24, Amer Math Soc, Providence, RI, 1998

[8] L Angeleri Hügel, D Happel and H Krause. Handbook of tilting theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2007

[9] Miyashita Y. Tilting modules of finite projective dimension. Math Z, 1986, 193: 113-146

[10] Rickard J, Schofield A. Cocovers and tilting modules. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1989, 106: 1-5

撰稿人： [1] 叶　郁　[2] 章　璞

1 中国科学技术大学

2 上海交通大学

考克斯特群的胞腔

Cells in Coxeter Groups

1979 年, Kazhdan 和 Lusztig 在考克斯特群 W 的元素集合上定义了三种等价类: 左胞腔、右胞腔和双边胞腔[4]. 当 W 是 Weyl 群时, 由群 W 的胞腔所提供的表示 (简称胞腔表示) 对于刻画半单李代数的 Verma 模关于不可约模的分解模式非常有用 (即已被证实了的 Kazhdan-Lusztig 猜想); 而当 W 是仿射 Weyl 群时, 群 W 的胞腔表示对于刻画简约代数群在素特征域上 Weyl 模关于不可约模的分解模式也猜测是有用的 (即尚未被证实的著名的 Lusztig 猜想). 于是, 对于每个考克斯特群 W, 明显地刻画其左、右和双边胞腔, 揭示这些胞腔及胞腔表示的结构性质就成为重要的研究课题.

当 W 是经典型 (即 A、B、C、D 型) Weyl 群时, Barbasch, Vogan, Garfinkle 等人[2,3] 用组合工具刻画了 W 的胞腔. Joseph 将 Weyl 群 W 的元素对应于相应半单复李代数的普遍包络代数的某不可约最高权模的零化子理想. Barbasch 和 Vogan[2] 引入了 W 的特殊表示概念. 这些概念被用来等价地定义和刻画 W 的左胞腔和双边胞腔. 可构表示是一种可由低秩子群的表示通过诱导算子递归得到的表示, 有良好的结构性质. Lusztig 证明了: Weyl 群的每个左胞腔都提供可构表示.

最具挑战性的是刻画仿射 Weyl 群 W_a (一族无限阶考克斯特群) 的胞腔. 时俭益用组合方法建立了仿射 Weyl 群 $W_a(\widetilde{A}_{n-1})$ 的左胞腔集合与秩 n 的 tabloid 集合之间的双射[9]; 他又和 Lusztig 一起建立了从 $W_a(\widetilde{A}_{n-1})$ 的双边胞腔集合到数 n 的划分集合之间的双射[5,9]. 一个自然的问题是: 其他经典型 (即 $\widetilde{B}$、$\widetilde{C}$、$\widetilde{D}$ 型) 仿射 Weyl 群的胞腔是否也有组合刻画? 这是迄今未解决的大难题.

Lusztig 证明了: 不可约仿射 Weyl 群 W_a 的双边胞腔集合与相应简约代数群 G 的幂幺共轭类集合之间存在双射 ψ[7]. 我们对于代数群 G 的幂幺共轭类已知道得很多, 这告诉我们关于 W_a 的双边胞腔的许多信息 (如 W_a 里双边胞腔的个数、a-函数值、偏序关系、有限与否, 等等). 所以胞腔理论里接着要重点研究的是左胞腔 (注: 左、右胞腔的信息互相等价).

Lusztig 证明了: 每个仿射 Weyl 群 W_a 含有限个左胞腔[6]. 他猜测了关于 W_a 里落在给定双边胞腔 Ω 内的左胞腔个数 $n(\Omega)$ 的一个公式, 该公式用与幂幺共轭类 $\psi(\Omega)$ 相关的交上同调空间维数的交错和表示[1]. 这个公式至今仍是猜测, 即使被证实了, 在一般情形下也仅有理论上的意义, 很难用作具体计算. 但是在某些特殊情形下, $n(\Omega)$ 可用相应 Weyl 群及其抛物子群的阶数的商来表示, 极易计算.

Lusztig 证明了: 仿射 Weyl 群 W_a 的每个左胞腔 Γ 含有唯一的独异对合元 (记作 $d(\Gamma)$)[6]. 独异对合元在群 W_a 及其黑克代数的表示理论里扮演重要角色, 具体地找出这些元素十分有意义, 但常涉及很复杂的计算. 时俭益曾提出用左胞腔 Γ 里的最短元以简单而统一的方式来表示 $d(\Gamma)$ 的猜想[10], 该猜想在很多情形下被证实, 但一般性的证明尚未找到.

群 W_a 的元素集合等同于某欧氏空间里的室 (alcove) 集合. 群 W_a 的子集 K 称为左连通, 如果 K 里任何二个室都被 K 里一个室序列所连接使得序列中任何相邻二室均有公共墙. Lusztig 曾猜想: 仿射 Weyl 群的左胞腔都左连通[1]. 左连通性是左胞腔的重要性质. 这个猜想在多种情形下 (如 $W_a(\widetilde{A}_{n-1})$) 被证实[9], 但在一般情形这仍然仅是猜想.

对于不是有限型和仿射型的考克斯特群的胞腔, 由于某种正性条件的缺失, 已知结果甚少. Bédard 曾研究过一个秩 3 双曲型考克斯特群, 发现它含无限多左胞腔. 另外, Lusztig、席南华、Bremke 等人还研究过双参数情形下的广义胞腔[8]. 由于情形更复杂, 特别是某种正性条件的缺失, 目前仅有一些探索性的结果.

参 考 文 献

[1] Asai T et al. Open problems in algebraic groups. Proc Twelfth Intern Symp, Tohöku Univ, Japan, 1983, 14

[2] Barbasch D, Vogan D. Primitive ideals and Orbital integrals in complex classical groups. Math Ann, 1982, 259: 153-199

[3] Garfinkle D. On the classification of primitive ideals for complex classical Lie algebra. I Compo Math, 1990, 75: 135-169

[4] Kazhdan D, Lusztig G. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. Invent Math, 1979, 53: 165-184

[5] Lusztig G. The two-sided cells of the affine Weyl group of type $\widetilde{A}_n$ // Kac V ed. Infinite Dimensional Groups with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1985, 275-283

[6] Lusztig G. Cells in affine Weyl groups. II, J Algebra, 1987, 109: 536-548

[7] Lusztig G. Cells in affine Weyl groups. IV, J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math, 1989, 36: 297-328

[8] Lusztig G. Hecke algebras with unequal parameters. CRM Monograph Series vol 18, Amer Math Soc, 2003

[9] Shi J Y. The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1986

[10] Shi J Y. A survey on the cell theory of affine Weyl groups. Adv in Science of China, Math, 1990, 3: 79-98

撰稿人：时俭益
华东师范大学

满足正规子群极小条件的可解群的 Fitting 子群是否是幂零的？

Is The Fitting Subgroup of A Soluble Group with Minimal Condition on Normal Subgroups Nilpotent?

群的两个正规幂零子群的乘积一定是幂零的, 这是 Fitting 证明的一个经典结果, 由此导出 Fitting 子群的定义：把群 G 的所有正规幂零子群的乘积称为 G 的 Fitting 子群, 记为 Fit$G$. Fit$G$ 是局部幂零的, 但它不一定是幂零的. 例如对任意固定的素数 p, 对每个自然数, $Tr1(nA\#,p)$ 是 p 元域上主对角线元素全是 1 的 n 阶全体上三角矩阵作成的乘群, 它是一个幂零类为 $n-1$ 的有限 $p-$ 群. 把所有这些 $Tr1(n,p)$ 的直积记为 G, 此时 G 的 Fitting 子群 Fit$G$ 等于 G, G 当然不是幂零的.

在有限群的场合, Fitting 子群肯定是幂零的, 这是一个非常重要的子群, 它在有限群里扮演着重要的角色, 具有基本的重要性, 见文献 [1]、[2]. 对有限群 G, Fit$G$ 就是 G 的所有主因子的中心化子之交, 于是 Fit$G$ 在 G 的每个主因子上的诱导作用都是平凡的. 循此 Bender 对有限群引入了广义 Fitting 子群：有限群 G 的在每个主因子上诱导出的自同构都是内自同构的元的集合形成一个群, 称为 G 的广义 Fitting 子群. 这个子群在有限单群分类里起了非常重要的作用, 见文献 [3]. 把有限群研究的有效思路继承下来, 加以发展, 拓广到满足某些有限性条件的可解群, 这是无限群研究的基本思路.

长期以来, 人们一直猜想满足子群极小条件的群一定是 Cernikov 群, 所谓 Cernikov 群就是满足子群极小条件的 Abel 群被有限扩张, 它是最接近有限群的无限群类. Ol'sanskii 在文献 [4] 里天才地构造出 Tarski 魔怪：每个真子群都是素数阶群的无限单群. 这个群例深刻地揭示出无限群论的丰富性和复杂性, 是群论发展的一个里程碑. 在无限群论里, 迄今成果最丰富、研究最深入的是对满足有限性条件的无限可解群的研究, 见文献 [5].

满足子群极小条件的可解群就是可解的 Cernikov 群, 这是一类最简单的非交换的无限可解群, 具有相对简单的结构, 它的 Fitting 子群是幂零的. 如果条件稍微减弱些, 考虑满足正规子群极小条件的可解群, 情况就困难得多. 群论大家 Baer 在文献 [6] 里证明了满足正规子群极小条件的可解群是局部有限的, 这是一个重要的定理. 由此可以证明满足正规子群极小条件的亚幂零群的 Fitting 子群是幂零

的. 虽然对满足正规子群极小条件的可解群做了不少研究, 发展了不少技巧, 但是对这类貌似简单的群仍然知之甚少, 甚至不知道这类群的 Fitting 子群是否是幂零的. 对满足正规子群极小条件的可解群, 这是一个有待解决的基本问题.

参 考 文 献

[1] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967

[2] Doerk K, Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin: de Gruyter, 1992

[3] Gorenstein D. Finite Simple Groups. New York: Plenum Press, 1982

[4] Ol'sanskii A Yu. An infinite group with subgroups of prime orders. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1980, 44: 309-321

[5] Robinson D J S. The Theory of Infinite Soluble Groups. Oxford: Oxford University Press, 2004

[6] Baer R. Irreducible groups of automorphisms of abelian groups. Pacific J Math, 1964, 14: 385-406

撰稿人：刘合国
湖北大学

模代数 smash 积的半素性

Primeness of Smash Product of Module Algebras

Hopf 代数是 20 世纪 40 年代由 Hopf 在研究拓扑群时引入的. Hopf 代数除了具有通常的代数结构之外, 还有与其代数结构相容的代数对偶结构 (称为余代数). 典型的 Hopf 代数的例子是域上的群代数、有限群代数的对偶代数和李代数的包络代数. Hopf 代数在代数上的作用是群作用的扩展, 在上述典型例子上分别体现为通常的群作用、群分次结构和代数的微分算子作用. 具有一个 Hopf 代数作用的代数称为模代数. 模代数与作用于其上的 Hopf 代数的张量积上有一个自然的代数结构, 称为 smash 积. Smash 积可视作斜群环的推广.

1978 年, Fisher 和 Montgomery[1] 证明: 当有限群 G 的阶 $|G|$ 在其作用的半素环 R 中可逆时, 斜群环 RG 必半素. 所谓半素, 就是该环没有非平凡的幂零理想. 基于这一结论, Montgomery[2] 于 1992 年提出如下问题：

模代数 smash 积的半素性问题 设 H 是域上有限维半单 Hopf 代数, A 是一个半素 H- 模代数. 问 smash 积 $A\#H$ 是否仍旧半素？

这一问题至今仍未得到全部解决. 现有结论的答案全部都是肯定的. 取得结论的途径有三种：① 对 H 加条件, 如 Montgomery 和 Schneider[3] 证明: 若 H 还是半可解的 (semisolvable), 结论成立; ② 对 A 和 H 加条件, Lomp[4] 证明: 当 A 交换且 H 为余半单时, 结论成立; ③ 对 H 在 A 上的作用加条件, 如 Chin[5] 证明：若 H 的作用为内作用时, 结论成立.

参 考 文 献

[1] Fisher J W, Montgomery S. Semiprime skew group rings. J Algebra, 1978, 52: 241-247

[2] Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993

[3] Montgomery S, Schneider H J. Prime ideals in Hopf Galois extensions. Israel J Math, 1999, 112: 187-235

[4] Lomp C. When is a smash product semiprime? A partial answer, J Algebra, 2004, 275: 339-355

[5] Chin W. Crossed products and generalized inner actions of Hopf algebras. Pacific J Math, 1991, 150: 241-259

撰稿人：朱胜林
复旦大学

球极函数的提升 Pieri 型公式

Pieri-type Raising Operator Formula for Zonal Symmetric Functions

20 世纪 50 年代初, 华罗庚在研究多复变量函数论时, 首次引入了一类特殊的球极函数 (zonal spherical function). 令 V 为轭米矩阵上的多项式函数 $f(A)$ 组成的空间, 一般线性群 GL_n 通过共轭转置变换作用 V 上: $f(A) \xrightarrow{\phi} f(g^*Ag)$, 该映射满足关系: $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$, 即给出了 GL_n 的一个表示. 如果局限到某固定幂次的所有齐次多项式函数的子空间, 就得到了一般线性群的一个有限维表示. 李群表示理论告诉我们: 所有的有限维 GL_n 表示, 一定是不可约表示的直和. 由此得到, $V = \sum\limits_{\mu} V(2\mu)$, 其中 $V(2\mu)$ 是由分拆 $(\mu_1 + \cdots + \mu_l = m)$ 所确定的不可约表示. 华罗庚证明了每个子空间 $V(2\mu)$ 上酉群 U_n 只有一维不变子空间, 其生成元是 A 的特征值的一个对称多项式, 叫做 (zonal spherical polynomial) $Z_\mu(t_1, \cdots, t_n)$.

后来, A. T. James 用对称群 S_{2n} 和超八面体群 $\{\pm 1\}^n \cdot S_n$ 的球极函数, 给出了 Z_μ 的代数定义. Jack 进一步推广球极函数为 Jack 多项式 $J_\lambda(t_1, \cdots, t_n; \alpha) = t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \cdots t_n^{\lambda_n} + \cdots$ (参见文献 [1]), 并被证明是满足下面关系正交多项式:

$$J_\lambda = J_{\lambda_1} J_{\lambda_2} \cdots J_{\lambda_l} + \sum_{\mu \pi \lambda} c_{\lambda\mu} J_{\mu_1} J_{\mu_2} \cdots J_{\mu_l} \tag{1}$$

这里的内积由 $\langle p_{\rm m}, p_{\rm n} \rangle = {\rm m}\alpha\delta_{\rm mn}$ 确定. 对于 α=1 的特殊情况下, 式 (1) 的展开系数由 Vandermonde 行列式 $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ 确定 (参见文献 [2]). 目前尚不知道一般情况下这些系数如何表示. 如果把对称函数空间的内积换为 $\langle p_{\rm m}, p_{\rm n} \rangle = m\dfrac{1-q^m}{1-t^m}\delta_{mn}$ 相应的正交对称多项式, 称作 Macdonald 多项式 $P_\lambda(q,t)$. Macdonald 多项式是群上调和分析、李理论、代数组合等领域的重要研究对象. 由于是通过内积迂回定义的, Macdonald 多项式的显性表达式一直是重要的研究对象, 文献 [3] 最近给出一类组合公式. 但是线性变换公式 (1) 的展开系数的研究仍然一筹莫展. 对于两个部分的分拆, $P_\lambda(q,t)$ 的展开系数的生成函数是 ${}_4\Phi_3$ 型超几何级数 (参见文献 [4]). 猜测多个部分的分拆所对应的系数也将是超几何级数的乘积, 此类型公式被称为提升算子公式. 当 $q = 0$ 时, 提升算子公式由一类顶点算子的乘积给出 (参见文献 [5]). 因此本问题也被称为 Macdonald 多项式 $P_\lambda(q,t)$ 的顶点算子实现.

参 考 文 献

[1] Jack H. A class of symmetric polynomials with a parameter. Proc Roy Soc Edin Sec Ser A: Math Phys Sci, 1969-70, 69: 1-18
[2] Macdonald I G. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd ed., Oxford: Claredon, 1995
[3] Haglund J, Haiman M and Loehr N. A combinatorial formula for Macdonald polynomials. J Amer Soc, 2005, 18: 735-761
[4] Jing N. q-hypogeometric series and Macdonald symmetric functions. J Alg Combin, 1994, 3: 291-305
[5] Jing N. Vertex operators and Hall-Littlewood symmetric functions. Adv Math, 1990, 87: 226-248

撰稿人：景乃桓
美国北卡州立大学

稳定等价猜想

Stable Equivalence Conjecture

阿廷代数的表示理论旨在对这种代数的模范畴进行研究. 其理论支柱之一是 Auslander-Reiten 发现的几乎可裂序列, 这种序列可以将范畴中模的同构类和不可约映射画成一种图形, 称之为 AR- 箭图. 几乎可裂序列的构造依赖于模范畴的某些商范畴之间的函子, 最常见的商范畴是用原来的模范畴模去由投射模构成的满子范畴得到的. 如果将我们的阿廷代数记作 Λ, $\text{mod}\Lambda$ 是它的有限生成模范畴, 则上述商范畴记做 $\underline{\text{mod}}\Lambda$.

对阿廷代数 Λ 和 Λ', 如果 $\underline{\text{mod}}\Lambda$ 与 $\underline{\text{mod}}\Lambda'$ 等价, 则称 Λ 和 Λ' 稳定等价. 人们非常自然地想到, 稳定等价的阿廷代数的模范畴会有哪些不变量呢? 事实上, 两个稳定等价的代数可以有非常不同的特性, 比如代数 $\Lambda = k[x]/(x^2)$ 与 $\Lambda' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$ 是稳定等价的, 其中 k 为一个域, 则前者是局部代数, 而后者不是. 但稳定等价的代数仍然有很多基本的共性.

Auslander-Reiten[2] 猜想：两个稳定等价的阿廷代数上的非投射单模的同构类的个数相同. 后来他们又将这一陈述列为 1995 年出版的专著 [1] 中的第 5 个猜想, 这就是通常所说的稳定等价猜想.

在群的模表示理论中, J.Green 指出, 限制函子有时诱导出一个群及其子群之间的稳定等价. 这也是稳定等价猜想提出的一个重要背景. Auslander 和 Reiten[2] 证明了: 如果两个代数稳定等价, 而且都没有非零的既投射又内射的模, 那么在它们的非投射单模之间存在一个一一对应, 从而此时稳定等价猜想成立. 他们还证明了: 对于稳定等价于一个遗传代数 (即投射模的子模仍是投射模) 的代数, 稳定等价猜想成立. 如果一个代数 Λ 满足 $rad^2(\Lambda) = 0$, 那么 Λ 稳定等价于一个遗传代数, 从而此时稳定等价猜想成立.

1977 年, Reiten[3] 给出了计算正特征代数闭域上由 Brauer 树给出的有限维代数的几乎可裂序列的方法. 作为一个应用, 证明了对于这种代数, 稳定等价猜想成立. 1978 年 Reiten[4] 又证明了对于稳定等价于一个 Nakayama 代数的代数, 稳定等价猜想成立.

Bretscher, Läser 和 Riedtmann[5] 证明了: 对于稳定等价于有限表示型自入射代数的代数, 稳定等价猜想成立.

在关于稳定等价猜想的研究中, Martinez-Villa 做了较多的工作. 文献 [6] 证明了：对于稳定等价于 l- 遗传代数, 或稳定等价于有限表示型遗传代数的商代数的代数, 稳定等价猜想成立; 文献 [7] 证明了: 对于有限表示型代数, 稳定等价猜想成立; 文献 [8] 指出: 稳定等价猜想成立当且仅当它对于自入射代数成立.

Tang[9] 在前人工作的基础上考虑了表示无限的自入射代数. 她证明了, 如果连通基代数稳定等价于一个根三方为零的基连通的自入射代数, 并且在后者的分离 AR- 箭图中至少有两个连通分支, 则稳定等价猜想成立.

Broue 推广了 Morita 等价的概念, 定义了 Morita 稳定等价. 两个代数 A 和 B 称为 Morita 稳定等价的, 如果存在 A-B- 双模 M 和 B-A- 双模 N, 以及投射的 A-A- 双模 P 和投射的 B-B- 双模 Q, 使得作为 A-A- 双模, $M \otimes_B N \simeq A \oplus P$, 作为 B-B- 双模, $N \otimes_A M \simeq B \oplus Q$. Selvakumaran[10] 进一步证明了对于任意域上两个可离的自入射代数, 如果它们的根 3 方为零且 Morita 稳定等价, 则稳定等价猜想成立.

关于稳定等价猜想, 已经得到一些很好的结果. 如果能够对表示无限的自入射代数进行证明, 那么稳定等价猜想将得到完整的解决.

参 考 文 献

[1] Auslander M, Reiten I and Smalø S. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995

[2] Auslander M, Reiten I. Stable equivalence of Artin algebras. Springer Lecture Notes in Math, 1973, 353: 8-71

[3] Reiten I. Almost Split Sequences for Group Algebras of Finite Representation Type. Trans Amer Math Soc, 1977, 233: 125-136

[4] Reiten I. A note on stable equivalence and Nakayama algebras. Proc Amer Math Soc, 1978, 71(2): 157-163

[5] Bretscher O, Läser C and Riedtmann C. Selfinjective algebras and simply connected algebras. Manuscripta Math, 1981, 36: 253-307

[6] Martinez-Villa R. Almost projective modules and almost split sequences with indecomposable middle term. Comm in Algebra, 1980, 18: 1132-1150

[7] Martinez-Villa R. The stable equivalence for algebras of finite representation type. Comm in Algebra, 1985, 13: 991-1018

[8] Martinez-Villa R. Properties that are left invariant under stable equivalence. Comm in Algebra, 1990, 18: 4141-4169

[9] Tang A. A note on the stable equivalence conjecture. Comm in Algebra, 1996, 24: 2793-2809

[10] Selvakumaran T. Morita stable equivalence of certain algebras. Ph D Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005

撰稿人：张英伯
北京师范大学

一些代数的 Gröbner–Shirshov 基

Gröbner–Shirshov Bases for Some Algebras

Gröbner-Shirshov 基理论是处理一般代数的线性基底和字问题的强有力的工具.

量子群的研究是自 Drinfeld 于 1985 年在伯克利国际数学会议上的演讲后开始盛行的. Jimbo 在 1985 年也提出了这个概念. 量子群是一类特殊的 Hopf 代数, 是半单李代数的包络 Hopf 代数的非平凡变形, 也可看成是相应代数群上正则函数的代数. 量子群与数学和物理的许多领域有密切联系.

设 g 是域 k 上有限维半单李代数, 则 g 可由一个 Cartan 矩阵 $A=(a_{\alpha\beta})$ 唯一确定, 其中, $a_{\alpha\beta}=2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$, $\alpha,\beta\in\Pi$, $(-,-)$ 是 g 的 Killing 型, Π 是 g 相应于 Cartan 子代数的根系的基. 则 g 有表示 $g=Lie(x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha,\ \alpha\in\Pi|R)$, 其中 $R=\{[h_\alpha,h_\beta]=0,\ [x_\alpha,y_\beta]=\delta_{\alpha\beta}h_\alpha,\ [h_\alpha,x_\beta]=a_{\alpha\beta}x_\beta,\ [h_\alpha,y_\beta]=-a_{\alpha\beta}y_\beta\ \ (\alpha,\beta\in\Pi);\ (adx_\alpha)^{1-a_{\alpha\beta}}x_\beta=0,\ (ady_\alpha)^{1-a_{\alpha\beta}}y_\beta=0\ (\alpha\neq\beta,\ \alpha,\beta\in\Pi)\}$, R 称为 Serre 关系 (见文献 [3]).

半单李代数 g 的量子化包络代数 $U_q(g)$(即量子群) 是域 k 上的结合代数, 其定义类似于 g 的 Serre 表示, 其中 $q\in k$ 且 $q_\alpha:=q^{d_\alpha}\neq 1$, $d_\alpha=\dfrac{(\alpha,\alpha)}{2}\in\{1,2,3\}$. Drinfeld–Jimbo 给出了 $U_q(g)$ 的一个表示: $U_q(g)=k\langle E_\alpha,F_\alpha,K_\alpha,K_\alpha^{-1},\alpha\in\Pi|\ R_1\rangle$, $R_1=\{K_\alpha K_\alpha^{-1}=K_\alpha^{-1}K_\alpha=1,\ K_\alpha K_\beta=K_\beta K_\alpha,\ K_\alpha E_\beta K_\alpha^{-1}=q^{a_{\alpha\beta}}E_\beta,\ K_\alpha F_\beta K_\alpha^{-1}=q^{-a_{\alpha\beta}}F_\beta,\ \ E_\alpha F_\beta-F_\beta E_\alpha=\delta_{\alpha\beta}\dfrac{K_\alpha-K_\alpha^{-1}}{q-q^{-1}},\ \sum\limits_{\nu=0}^{1-a_{\alpha\beta}}(-1)^\nu\begin{pmatrix}1-a_{\alpha\beta}\\ \nu\end{pmatrix}_{q_\alpha}E_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-\nu}E_\beta E_\alpha^\nu=0,\ \sum\limits_{\nu=0}^{1-a_{\alpha\beta}}(-1)^\nu\begin{pmatrix}1-a_{\alpha\beta}\\ \nu\end{pmatrix}_{q_\alpha}F_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-\nu}F_\beta F_\alpha^\nu=0,\ \alpha,\beta\in\Pi\}$, 其中, $\delta_{\alpha\beta}$ 是 Kronecker 符号, 对任意整数 $m\geqslant n\geqslant 0$ 和任意参数 q, $\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}_q\in Z[q,q^{-1}]$ 的定义如下:

$$\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}_q=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{q^{m-i+1}-q^{-m+i-1}}{q^i-q^{-i}}, & \text{当 } m>n>0,\\ 0, & \text{当 } n=0 \text{ 或 } m=n.\end{cases}$$

M. Rosso 和 I. Yamane 于 1989 年分别找到了 $U_q(A_n)$ 的 PBW 基, 其中 A_n 为

相应于 Cartan 矩阵 A_n 的李代数 (见文献 [3]). 设 $\mathscr{L}$ 是李代数, X 是它的一组全序线性基底, 则 $\mathscr{L}$ 的泛包络代数 $U(\mathscr{L})$ 的 Poincaré-Birkhoff-Witt(简写为 PBW) 基是指由以下元素 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $x_{i_j}\in X$, $i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n$ 组成的线性基底. G. Lusztig[7] 和 M. Kashiwara[5] 证明了对于任意的半单李代数 g, $U_q(g)$ 有一组 Poincaré-Birkhoff-Witt 型线性基底. 他们的方法不仅仅适用于有限维李代数的量子化包络代数, 还适用于可对称化 Cartan 矩阵相应的量子化包络代数. 利用 Hopf 代数的相关性质, V. K. Kharchenko 于 1999 年找到了 $U_q(g)$ 的一个线性基底, 但此方法具有一定的局限性. 1996 年, Bokut–Malcolmson 找到了 $U_q(A_n)$ 的 Gröbner–Shirshov 基, 最近, 陈裕群, 邵红姗, 岑嘉评 (arXiv.org/abs/0804.0954) 对这个结果给出了直接证明.

问题 1　给出量子群 $U_q(g)$ 的 Gröbner–Shirshov 基, 其中 g 是相应于 Cartan 矩阵 $B_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ (见文献 [3]) 的李代数.

受数学物理中 Yang-Baxter 方程的启发, Sklyanin[10] 引入了一族后来称为椭圆代数的结合代数 (见文献 [8]). 最简单的椭圆代数是复数域 $\mathbb{C}$ 上的结合代数 $F=\mathbb{C}\langle x_0,x_1,x_2\mid R_2\rangle$, 其中 $R_2=\{x_0x_1-qx_1x_0=px_2^2,\ x_1x_2-qx_2x_1=px_0^2,\ x_2x_0-qx_0x_2=px_1^2\}$, $p,q\in\mathbb{C}$. 利用 F- 模上的特殊方法, 可以证明 F 有一组由单项式 $x_0^nx_1^mx_2^l$ 组成的线性基底, 其中 n,m,l 为任意非负整数. 迄今为止, 没有利用 Gröbner–Shirshov 基给出初等的证明方法.

椭圆代数主要的例子是 $\mathbb{C}$ 上的结合代数 $Q_{n,m}(\mathcal{E},\eta)$, 其中 $n\geqslant 3$ 是生成元的个数, m 是与 n 互素的正整数, $1\leqslant m<n$. 令 $X=\{x_i; i\in\mathbb{Z}_n\}$, 则 $Q_{n,m}(\mathcal{E},\eta)=\mathbb{C}\langle X\mid \sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_n}\dfrac{\theta_{j-i+r(m-1)}(0)}{\theta_{mr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)}x_{j-r}x_{i+r}=0,\ i,j\in\mathbb{Z}_n\rangle$, 其中 $\mathcal{E}$ 为椭圆曲线, $\eta\in\mathcal{E},\theta(x)$ 为 θ- 函数 (见文献 [6]), $\mathbb{Z}_n$ 是整数关于模 n 的剩余类环. $Q_{n,m}(\mathcal{E},\eta)$ 有与交换代数 $\mathbb{C}[X]$ 相同的线性基底, 而此结论也没有初等证明.

问题 2　分别找出椭圆代数 F 和 $Q_{n,m}(\mathcal{E},\eta)$ 的 Gröbner–Shirshov 基.

设 k 是一个域, $\lambda\in k$. Rota–Baxter 代数 R 是 k 上的带有一个满足如下 Rota–Baxter 关系的线性映射 $P:R\to R$ 的结合代数: $P(x)P(y)=P(P(x)y)+P(xP(y))+\lambda P(xy)$, $x,y\in R$. 在 20 世纪 80 年代, Belavin, Drinfeld 和 Semenov-Tian-Shansky 分别引入了 Rota–Baxter 李代数的概念. Rota–Baxter 代数在组合学、数学物理、operad 等方面有广泛的应用.

Rota[9] 和 Cartier 给出了自由交换 Rota–Baxter 代数的具体构造, 而自由非交换情形由 Ebrahimi-Fard–Guo[1] 给出. Rota–Baxter 代数可看作是一个结合 Ω- 代数, Ω- 代数是指一个具有多重线性映射集 Ω 的结合代数. Drensky–Holtkamp 给出了非结合 Ω- 代数的 Gröbner–Shirshov 基理论, 结合的情形最近由 Bokut、陈裕群、

邱建军 (arXiv.org/abs/0805.0640) 给出. 因 Rota–Baxter 关系实际上是自由结合 Ω-代数的一组 Gröbner–Shirshov 基, 由此我们可以得到自由 Rota–Baxter 代数的一个构造.

Dendriform dialgebra 是一个具有两个二元运算 $\prec$ 和 $\succ$ 的 k- 线性空间 D, 满足: 对于任意的 $x, y, z \in D$, $(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z + y \succ z)$, $(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z)$, $(x \prec y + x \succ y) \succ z = x \succ (y \succ z)$.

Dendriform trialgebra 是一个具有三个二元运算 $\prec, \succ$ 和 $\cdot$ 的 k- 线性空间 T, 满足: 对于任意的 $x, y, z \in T$, $(x \prec y) \prec z = x \prec (y \star z)$, $(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z)$, $(x \star y) \succ z = x \succ (y \succ z)$, $(x \succ y) \cdot z = x \succ (y \cdot z)$, $(x \prec y) \cdot z = x \cdot (y \succ z)$, $(x \cdot y) \prec z = x \cdot (y \prec z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, 其中 $x \star y = x \prec y + x \succ y + x \cdot y$.

Dendriform dialgebras 和 trialgebras 的概念是 Loday 给出的, 它们与数学和物理的很多领域都有联系. Dendriform 代数可看作是非结合 Ω- 代数. 对任意的 dendriform dialgebra 和 trialgebra, 都存在其泛包络 Rota–Baxter 代数, Ebrahimi-Fard–Guo[2] 证明了它们的 PBW 定理.

问题 3 分别找出自由 dendriform dialgebra 和 trialgebra 的 Gröbner–Shirshov 基.

问题 4 建立 Rota–Baxter 代数上的 Gröbner–Shirshov 基理论, 进而给出 dendriform 代数的泛包络 Rota–Baxter 代数的 PBW 定理的另一种证明方法.

参 考 文 献

[1] Ebrahimi-Fard K, Guo L. Free Rota–Baxter algebras and rooted trees. arXiv: math. /0510266v4

[2] Ebrahimi-Fard K, Guo L. Rota–Baxter algebras and dendriform algebras. arXiv: math. /0503647v3

[3] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York: Springer-Verlag, 1980

[4] Kassel C. Quantum Groups. Berlin: Springer-Verlag. 2000

[5] Kashiwara M. Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras. Commun Math Phys, 1990, 133: 249-260.

[6] Koblitz N. Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, 1993

[7] Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebra. J Amer Math Soc, 1990, 3: 447-498

[8] Odesskii A V. Elliptic algebras. Russ Math Surv, 2002, 57: 1127-1162

[9] Rota G. Baxter algebras and combinatorial identities I. Bull Amer Math Soc, 1969, 5: 325-329

[10] Sklyanin E K. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Funktsional Anal i Prilozhen, 1982, 16: 27-34; English transl in Funct Anal Appl, 1983, 16: 263-270

撰稿人：L. Bokut 陈裕群
华南师范大学

由导出范畴建立量子群和典范基

Quantum Groups and Their Canonical Bases
Arising from Derived Categories

利用 quiver 表示的 Hall 代数方法 (参见文献 [8]), G. Lusztig[5] 得到了量子群的典范基, 其实现方式是几何与代数方式的结合. M. Kashiwara[4] 也独立地给出了量子群晶体基的实现, 其方法是代数与组合方法的结合. 但是这两种实现方式都局限在量子群的正 (幂零) 部分. 为了寻找更加整体的实现方式, 人们已经从导出范畴 (derived category) 和三角范畴 (triangulated category) 出发构造了无限维李代数和导出 Hall 代数[7,9,10], 并期待导出范畴的内蕴几何结构会在 Hall 代数框架下提供量子群典范基的实现.

对于任意给定的可对称化的广义 Cartan 矩阵 $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$, 有相应的 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}(C)$. 可以在 R(数域或者交换整环) 上定义一个结合代数 $U_v(\mathfrak{g}(C))$, 它由生成元 $\{E_i, F_i : i \in I\}$ 和 $\{K_\mu : \mu \in \mathbb{Z}[I]\}$ 按以下定义关系给出:

$$K_0 = 1,\quad K_\mu K_\nu = K_{\mu+\nu},\quad \mu,\nu \in \mathbb{Z}[I];$$

$$K_\mu E_i = v^{(\mu,i)} E_i K_\mu,\quad K_\mu F_i = v^{-(\mu,i)} F_i K_\mu,\quad i \in I,\ \mu \in \mathbb{Z}[I];$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_{-i}}{v_i - v_i^{-1}},\quad \text{对任意 } i,j \in I,\ \text{这里 } v_i = v^{(i,i)/2};$$

$$\sum_{t=0}^{1-c_{ij}} (-1)^t \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ t \end{bmatrix}_{\varepsilon_i} E_i^t E_j E_i^{1-c_{ij}-t} = 0;$$

$$\sum_{t=0}^{1-c_{ij}} (-1)^t \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ t \end{bmatrix}_{\varepsilon_i} F_i^t F_j F_i^{1-c_{ij}-t} = 0.$$

可以证明这是一个 Hopf 代数, 称之为量子包络代数或者量子群 (它并不是数学意义下的群结构). 参见文献 [1] 和 [3].

在引入量子群之后, Lusztig[5] 的典范基理论和 Kashiwara[4] 的晶体基理论是近 20 余年核心数学方面的重要进展之一. Lusztig 的典范基理论建立在 quiver 表示的 Hall 代数[8] 基础之上. 在此之后, Nakajima[6] 的 quiver variety 理论是几何表示论方面的重大进展. 但是, 无论是量子群的典范基还是晶体基都只是定义在量子

群的正部分 U^+ 或负部分 U^- 上, 进而可以应用到最高权不可约表示上. 现在的问题是: 如何在量子群 $U = U^- \otimes U^0 \otimes U^+$ 上整体地 (不依赖三角分解) 和内蕴地 (几何构造) 实现典范基. 解决问题的第一步是如何整体地实现无限维李代数和量子群的结构. 这方面的进展可以见文献 [7], [9] 和 [10] 等.

三角范畴和导出范畴由 Grothendieck 和 Verdier 引入和建立后现已成为核心数学研究的一个重要工具. 三角范畴是满足四个公理的加法范畴 (包括复杂的八面体公理). 目前得到较多研究的是有限维代数表示范畴的导出范畴 (通过倾斜理论[2]) 和凝聚层范畴的导出范畴. 二者之间有非常紧密的联系, 例如 Beilinson 对应和同调镜像对称猜想. 如果我们考虑 quiver 表示的导出范畴, 不可分解模在其 Grothendieck 群中的像元所给出的维数向量恰好对应于 Kac-Moody 李代数的根系 (不仅仅是正根系). 所以一个比较能被接受的想法是, 由导出范畴和三角范畴出发实现李代数和量子群是更直接更具内蕴的方式. 在此基础上, 如何构造典范基应该和导出范畴和三角范畴内蕴的丰富几何结构紧密相关.

参 考 文 献

[1] Drinfeld V G. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. Soviet Math Dokl, 1985, 32: 254-258

[2] Happel D. On the derived category of a finite dimensional algebra. Comment Math Helv, 1987, 62: 339-389

[3] Jimbo M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. Lett Math Phys, 1985, 10: 63-69

[4] Kashiwara M. On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras. Duke Math J, 1991, 63: 465-516

[5] Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. J Amer Math Soc, 1990, 3: 447-498

[6] Nakajima H. Quiver varieties and Kac-Moody algebras. Duke Math J, 1998, 91: 515-560

[7] Peng L, Xiao J. Triangulated categories and Kac-Moody algebras. Invent Math, 2000, 140: 563-603

[8] Ringel C. Hall algebras and quantum groups. Invent Math, 1990, 101: 583-592

[9] Toen B. Derived Hall algebras. Duke Math J, 2006, 135: 587-615

[10] Xiao J, Xu F. Hall algebras associated to triangulated categories. Duke Math J 2008, 143: 357-373

撰稿人: 肖 杰

清华大学

有限维数猜想

Finitistic Dimension Conjecture

自 20 世纪 50 年代起, 经过 Cartan-Eilenberg, Nakayama, Auslander, Buchsbaum 和 Serre 等数学家的工作, 同调代数成为代数学的一个充满活力的研究分支, 并广泛应用于数学 (特别是代数学) 的其他许多分支中. 如：Auslander, Buchsbaum 和 Serre 于 1955/56 年证明了如下著名的定理：代数闭域上的一个仿射代数簇 V 是光滑的当且仅当它的坐标环 R 的整体维数是有限的. 由此可以推出, 如果 V 是光滑的, 则 R 的整体维数等于 V 的维数, 且 R 关于任意素理想的局部化是唯一分解整环. 这样, 几何学中的光滑性问题与环的同调维数之间建立了密切的联系. 但存在许多代数簇, 其坐标环的整体维数是无限的. 另一方面, 在许多情形下, 环或代数的整体维数确实能反映相应模范畴的复杂度, 但存在整体维数无限而模范畴结构很简单的环. 为此需要引进一个更能反映模范畴的复杂度的同调维数, 称之为有限维数 (finitistic dimension).

设 Λ 是域 k 上一个有限维代数. 对有限生成左 Λ- 模 M, 记 $\mathrm{pd}_\Lambda M$ 为 M 的投射维数. 定义 Λ 的有限维数 $\mathrm{fin.dim}\Lambda = \sup\{\mathrm{pd}_\Lambda M \mid M$ 是有限生成左 Λ- 模且 $\mathrm{pd}_\Lambda M < \infty\}$. Bass 于 1960 年提出如下的**有限维数猜想**：对有限维代数 Λ, $\mathrm{fin.dim}\Lambda$ 总是有限的 [3]. 由于有限维数猜想不仅本身是自然且有趣的, 而且它还与其他一些重要的同调猜想 (如：(广义)Nakayama 猜想和 Gorenstein 对称猜想等) 有着十分密切的联系, 因此这一猜想是代数学中的一个非常重要的猜想[10].

记 $J(\Lambda)$ 为 Λ 的 Jacobson 根. Mochizuki 于 1965 年证明了：如果 $J(\Lambda)^2 = 0$, 则 $\mathrm{fin.dim}\Lambda < \infty$[7]. Small 于 1968 年证明了：如果 $\mathrm{pd}_{\Lambda^{op}} J(\Lambda)^2 < \infty$, 则 $\mathrm{fin.dim}\Lambda < \infty$. Green 和 Zimmermann-Huisgen 于 1991 年证明了：如果 $J(\Lambda)^3 = 0$(这一假设可减弱为 $\mathrm{pd}_\Lambda J(\Lambda)^3 < \infty$), 则 $\mathrm{fin.dim}\Lambda < \infty$[6]. 1994 年 Wang 证明了：如果 $J(\Lambda)^{2n+1} = 0$ 且 $\Lambda/J(\Lambda)^n$ 是有限表示型的, 则 $\mathrm{fin.dim}\Lambda < \infty$[8]. 1991 年 Auslander 和 Reiten 证明了：如果由具有有限投射维数的有限生成左 Λ- 模组成的子范畴是反变有限的, 则有限维数猜想对 Λ 成立[2]. 但 Igusa, Smalϕ 和 Todorov 给出例子说明, 这一子范畴不总是反变有限的. Green, Kirkman 和 Kuzmanovich 于 1994 年证明了：有限维数猜想对单式 (monomial) 代数是成立的[5]. Ágoston, Happel, Lukács 和 Unger 于 1994 年证明了：有限维数猜想在标准析层 (standardly stratified) 代数上是成立的[1]. Igusa 和 Todorov 于 2002 年证明了：有限维数猜想在表示维数不大于 3 的

代数上是成立的. 利用这一结果, 惠证明了有限维数猜想在稳定遗传代数上是成立的[9]. Erdmann, Holm, Iyama 和 Schröer 证明了：如果 Λ 是有限表示型代数 Γ 的子代数且 $J(\Lambda) = J(\Gamma)$, 则 $\mathrm{fin.dim}\Lambda < \infty$. 由此可得出, 有限维数猜想在特殊双列 (special biserial) 代数和弦 (string) 代数上是成立的[4].

综上所述, 关于有限维数猜想的研究虽然取得了一些进展, 但离完全解决还有很远的距离.

参 考 文 献

[1] Ágoston I, Happel D, Lukács E and Unger L. Finitistic dimension of standardly stratified algebras. Comm Algebra, 2000, 28: 2745-2752

[2] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. Adv Math, 1991, 86: 111-152

[3] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. Trans Amer Math Soc, 1960, 95: 466-488

[4] Erdmann K, Holm T, Iyama O and Schröer J. Radical embedding and representation dimension. Adv Math, 2004, 185: 159-177

[5] Green E L, Kirkman E and Kuzmanovich J. Finitistic dimensions of finite-dimensional monomial algebras. J Algebra, 1991, 136: 37-50

[6] Green E L, Zimmermann-Huisgen B. Finitistic dimension of artin rings with vanishing radical cube. Math Z, 1991, 206: 505-526

[7] Mochizuki H Y. Finitistic global dimension for rings. Pacific J Math, 1965, 15: 249-258

[8] Wang Y. A note on the finitistic dimension conjecture. Comm Algebra, 1994, 22: 2525-2528

[9] Xi C C. Representation dimension and quasi-hereditary algebras. Adv Math, 2002, 168: 193-212

[10] Zimmermann-Huisgen B. The finitistic dimension conjectures–a tale of 3.5 decades // Abelian gropus and modules (Padova, 1994). Math Appl 343, Kluwer Acad Publ, 1995, 501-517

撰稿人：黄兆泳
南京大学

ABC 猜测

ABC Conjecture

ABC 猜测是丢番图分析中最重要的未解决问题 (D. Goldfeld) 之一, 也是数论中最重要的未解决问题之一, 它描述满足 $a+b=c, \gcd(a,b)=1$ 的正整数 a,b,c 中的最大者 c 和 abc 的根之间的大小关系.

为了理解 ABC 猜测的内容, 我们只需要知道整数的根是什么就可以了. 对非零整数 n, 由算术基本定理知 n 可以唯一表示素数因子的乘积, 令 $rad(n)$ 表示 n 的分解中所有不同素因子的乘积. 例如：若 $n=2^{16}$, 则 $rad(n)=2$; 若 $n=2^8\times 3^5\times 11^{11}\times 17$, 则 $rad(n)=2\times 3\times 11\times 17=1122$. 我们有

ABC 猜测 (Joseph Oesterlé 和 David Masser, 1985) 任给 $\varepsilon>0$, 存在正的常数 $C(\varepsilon)$ 使对满足 $a+b=c, \gcd(a,b)=1$ 的正整数 a,b,c, 我们有

$$c\leqslant C(\varepsilon)(rad(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Oesterlé 1985 年左右提出这一猜测主要是受 Szpiro(1981) 关于椭圆曲线中的一个猜测的影响, 随后不久, Masser 因为考虑多项式环 $Z[x]$ 上 Mason 定理在整数环 Z 上的类比得到了上述猜测. 从 ABC 猜测的形式上看, ABC 猜测是整数环 Z 的加法和乘法运算在 $a+b=c$ 条件下的 a,b,c 内在性质, 也就是整数的内在性质.

ABC 猜测的重要性主要在于以下几个方面：其一, ABC 猜测的解决可导致数论中的一大批重要猜测的解决. 如果有如下形式的 ABC 猜测弱形式成立, 即如果 $a+b=c, \gcd(a,b)=1$, 则 $\max(|a|,|b|,|c|)\leqslant(rad(abc))^2$. 那么我们容易证明 Fermat 方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有 $n>6$ 的正整数解, 从而导出由 Wiles(1995) 证明的 Fermat 大定理. 当然还可以得到数论中的许多其他非常深刻的结论 (见文献 [1]). 其二, 一些著名定理和猜测的精细化等价于 ABC 猜测或 ABC 猜测弱形式, 这其中包括了著名的 Roth(1955) 定理 (1958 年 Fields 奖主要结果) 和 Baker(1966) 定理 (1970 年 Fields 奖主要结果), 这两个重要定理的精细化等价于 ABC 猜测, 更多的内容见文献 [1] 和 [2]. 从这个意义上来讲, ABC 猜测引导我们思考其他许多问题的精细化与推广. 其三, 它反映了数域的内在性质, 如 Moret 和 Bailey 在 Szpiro 的思想上, 证明了数域上曲线 $y^2=x^5-x$ 的有理点的大小的好的上界 (这里好的上界指仅依赖于数域的判别式的上界) 可导出 ABC 猜测.

关于 ABC 猜测的研究主要有两个方向：其一, 从 Baker 定理的精细化开始, 慢慢接近 ABC 猜测, 这一方面的结果有 C.L.Stewart 和于坤瑞 (1996) 利用 Baker 定理得到的如下结果：$c < \exp\{C(rad(abc))^{1/3+\varepsilon}\}$. 最近, K. Gyory 和于坤瑞 (2007) 得到了数域上 S- 单位方程的一个重要定理, 从而得到了关于 ABC 猜测的一个新结果. 其二, 对满足 $a+b=c, \gcd(a,b)=1$ 的整数 a,b,c, 定义

$$L = L(a,b,c) = \frac{\log\max(|a|,|b|,|c|)}{\log(rad(abc))}.$$

我们主要研究 L 的上界问题. De Weger 给出的例子 $11^2+3^2\times5^6\times7^3+(-2^{21}\times23)=0$ 表明 $L > 1.629912\cdots$.

ABC 猜测成立的可能性主要基于下面关于多项式环 $Z[x]$ 中的类比定理：

PQR 定理 (Hurwitz, Stothers, Mason) 令 P,Q,R 是满足 $P+Q=R$ 不全为常数的多项式. 如果 $\deg(R) \geqslant \deg(P), \deg(Q)$, 则 $\deg(R) < \deg(rad(PQR))$.

同时我们也还没有找到 $L \geqslant 2$ 的满足 $a+b=c, \gcd(a,b)=1$ 的整数 a,b,c.

可以预见, ABC 猜测必将对数论的研究与发展产生深远的影响.

参 考 文 献

[1] Granville A. It's as easy as the abc conjecture. Notices of AMS, 2002, 47: 1224-1231

[2] Abderrahmane Nitaj. The ABC Conjecture Home Page. http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

撰稿人：袁平之
中山大学

巴斯 (Bass) 猜想和索尔 (Soule) 猜想

Bass Conjecture and Soule Conjecture

算术代数几何一直是数学的热门研究领域之一, 特别是 20 世纪 90 年代, Wiles 利用椭圆曲线的理论成功的解决了费马猜想, 使得算术代数几何空前活跃. 自从 Quillen 定义了高阶 K- 群, 这套理论便以惊人的速度渗透到数学的多个分支, 产生了重要的影响, 很多经典的不变量都被证明与 K- 群有密切的联系. 设 X 是任意概型, Quillen 给出了高阶 K- 群 $K_i(X)$ 以及 $K_i'(X)$, 关于这两个群的有限生成性 H. Bass 提出了如下猜想：

(a) 设 X 是 $Spec$Z (Z 的素谱) 上的任意有限型概型, 则群 $K_i'(X)$ 是有限生成的;

(b) 设 X 是 $Spec$Z 上的任意正则有限型概型, 则群 $K_i(X)$ 是有限生成的.

Quillen 证明了当 $\dim X \leqslant 1$ 时, Bass 猜想成立. 如果 Bass 猜想成立, 则可证明 Beilinson-Soule 猜想 (设 X 是正则概型, 则 $H^1(X, \mathrm{Z}(n)) = 0,\ n \geqslant 0, i < 0$) 成立.

特别地, 设 E 是定义在有理数域上的椭圆曲线, $spl(E)$ 表示 E 在 p 处具有可分乘法约化的素数 p 的个数, 关于 $K_2(E)$ 有如下的 Beilinson-Bloch 猜想：

$$rank(K_2(E)) = 1 + spl(E).$$

设 X 是一算术概型, Serre 定义了 X 的 Zeta 函数 $\zeta(X, s)$, X 的高阶 K 群和 Zeta 函数 $\zeta(X, s)$ 在整点处的值的关系有如下的 Soule 猜想：

$$ord_{s=n}\zeta(X, s) = \sum_{i\in \mathrm{Z}} (-1)^{i+1} \dim_Q K_i'(X)_{(n)}.$$

当 $n \geqslant d = \dim(X)$ 时, Soule 猜想成立; 当 $n = d - 1$ 并且 X 是正则不可约时, Soule 猜想可推出 BSD 猜想. 当 X 是有限域上的光滑投射概型, 则 Soule 猜想等价于 Lichtebaum 第二猜想.

参 考 文 献

[1] Alexander Beilinson. Higher regulators and values of L-functions (in Russian). In

Current problems in mathematics, Vol. 24, Itogi Naukii Tekhniki, 181-238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz Inst Nauchn I Tekhn Inform, Moscow, 1984

[2] Spencer Bloch. Algebraic cycles and values of L-functions. J Reine Angew Math, 1984, 350: 94-108

[3] Kahn B. Algebraic K-theory, Algebraic Cycles and Arithmetic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2005, 351-428

[4] Stephen Lichtenbaum. Values of zeta-functions, etale cohomology, and algebraic K-theory // Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Pro Conf, Battelle Memorial Inst, Seattle, Wash, 1972). Berlin: Springer-Verlag, 1973, 489-501

[5] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory // Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc Conf, Battelle Memorial Inst, Seattle, Wash, 1972). Berlin: Springer-Verlag, 1973, 85–147

撰稿人：秦厚荣
南京大学

Lichtenbaum 猜想

Lichtenbaum Conjecture

Lichtenbaum 猜想是目前国际代数 K- 理论研究的热点问题之一. 代数数论中经典的解析类数公式将代数数域 F 的 ζ- 函数在 1 处的留数和类数联系了起来, 类数是数域 F 理想类群的阶数. 由于理想类群是 K_0 群的挠部分, 所以人们猜测 ζ- 函数在 0, -1, -2, -3, $\cdots$ 等处的取值应该和更高阶的 K- 群的阶数相关.

在 1970 年, Birch 和 Tate 猜想对全实的数域 F, 其 ζ- 函数在 -1 处的取值等于 $(-1)^r|K_2(O_F)|/w_2(F)$, 这里的 $w_2(F)$ 是上同调群 $H^0(F,Q/Z(2))$ 的阶数. 著名数学家 Wiles 于 1990 年证明了 Birch-Tate 猜想对全实的阿贝尔数域成立. 对非阿贝尔的情形, Wiles 证明了其奇数部分成立. 而对非阿贝尔的全实数域, Birch-Tate 猜想的偶数部分至今仍未被证明.

1972 年, Lichtenbaum 对一般的数域提出了类似的 **Lichtenbaum 猜想**：对任意的代数数域 K 和整数 $n \geqslant 2$, K 的 ζ 函数在 $1-n$ 处的取值除以

$$\pm\frac{|K_{2n-2}(O_F)|}{|K_{2n-1}(O_F)_{tors}|}\cdot R_n^B(F)$$

所得的商是 2 的整数次幂.

后来 Lichtenbaum 又给出了更为精确的 Motivic 上同调表述：

Lichtenbaum 猜想的 Motivic 表述：对任意的代数数域 K 和整数 $n \geqslant 2$, K 的 ζ 函数在 $1-n$ 处的取值等于

$$\pm\frac{|H_M^2(F,\mathbf{Z}(n))|}{|H_M^1(F,\mathbf{Z}(n))_{tors}|}\cdot R_n^M(F),\ \text{其中的 } R_n^M(F) \text{ 是 Borel Regulator.}$$

目前已经证明 Lichtenbaum 猜想对阿贝尔数域成立. 而对于非阿贝尔的代数数域, Lichtenbaum 猜想的证明仍然很遥远.

参 考 文 献

[1] Kahn B. Algebraic K-theory, Algebraic Cycles and Arithmetic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2005, 351-428

[2] Stephen Lichtenbaum. Values of zeta-functions, etale cohomology, and algebraic K-theory // Algebraic K-theory, II: “Classical” algebraic K-theory and connections with

arithmetic (Pro Conf, Battelle Memorial Inst, Seattle, Wash, 1972). Berlin: Springer-Verlag, 1973, 489-501

[3] Tate J. Symbols in arithmetic. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, 201-211. Paris: Gauthier-Villars, 1971

[4] Wiles A. The Iwasawa Conjecture for totally real fields. Annals of Math, 1990, 131: 493-540

撰稿人：秦厚荣
南京大学

里德 -- 所罗门 (Reed-Solomon) 码的译码问题

The Decoding Problem for Reed-Solomon Codes

设 $\mathbb{F}_q$ 为 q 元有限域. 取定 $\mathbb{F}_q$ 的一个子集合 $D=\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbb{F}_q$, 称为值集合. 对于正整数 k 和 n, $1\leqslant k\leqslant n\leqslant q$, 称 $\mathbb{F}_{q^n}$ 的如下子集：

$$C_q(D,k)=\{(f(x_1),\cdots,f(x_n))\in\mathbb{F}_q^n|f(x)\in\mathbb{F}_q[x],\ \deg f(x)\leqslant k-1\}$$

为 $\mathbb{F}_q$ 上长度为 n, 维数为 k 的广义 Reed-Solomon 线性码.

$C_q(D,k)$ 中的元素称为码字. 应用最为广泛的情形是 $D=\mathbb{F}_q$ 或 $\mathbb{F}_q^*$. 这两种情形实际上是等价的, 称 $C_q(\mathbb{F}_q,k)$ 是标准的 Reed-Solomon 码, 记为 $RS_q[q,k]$.

对于 $\mathbb{F}_q^n$ 中任意给定的两个字 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_n)$, 它们的汉明 (Hamming) 距离定义为

$$d(u,v)=\#\{1\leqslant i\leqslant n|u_i\neq v_i\}.$$

对于 $\mathbb{F}_q$ 上长度为 n 的线性码 C 以及字 $u\in\mathbb{F}_q^n$, u 到码 C 的距离定义如下：

$$d(u,C)=\min_{v\in C}d(u,v).$$

易知 $d(u,C)=0$ 当且仅当 u 为码字. 码 C 的最小距离定义为 u 和 C 中码字距离的最小值：

$$d(C)=\min_{u\neq v\in C}d(u,v)=\min_{0\neq v\in C}d(0,v).$$

很容易验证广义 Reed-Solomon 码 $C_q(D,k)$ 的最小距离等于 $n-k+1$, 达到 Singleton 界. 从而某种意义上来说其为最优线性码.

编码理论中最重要的算术问题是极大似然译码 (MLD) 问题：给定一个字 $u\in\mathbb{F}_q^n$, 寻找一个码字 $v\in C$ 使得 $d(u,v)=d(u,C)$. 我们想知道解决 MLD 问题是否有多项式时间算法 (即所需时间为 $n\ \log\ q$ 的多项式). 在一般情形下答案是否定的, 可见文献 [8]. 事实上, 即使对于广义 Reed-Solomon 码 $C_q(D,k)$, 在极端的 deep hole 情形下, 对于取定的值集合 D, 计算纠错距离 $d(u,C_q(D,k))$[2](因此对于 MLD 也如此) 都是 NP- 困难的.

在实际应用中, 标准 Reed-Solomon 码 $RS_q[q,k]$ 使用得最为广泛, 也是最为重要的. 尤为感兴趣的是关于 $RS_q[q,k]$ 的算术和复杂度问题的研究.

问题 1 对于标准 Reed-Solomon 码 $RS_q[q,k]$ 解决 MLD 问题是否有多项式时间算法? 如果没有多项式时间算法, 其困难程度如何? 也就是说, 如何决定 MLD 问题的复杂度?

对于 Reed-Solomon 码 $C = RS_q[q,k]$, 如果纠错距离 $d(u,C)$ 较小, 人们希望有一个多项式时间算法. 实际上, 当 $d(u,C) \leqslant (q-k)/2$ 时, 利用 Berlekamp 的经典算法[1] 就可在多项式时间内解决 MLD 问题. 当 $d(u,C) \leqslant q-\sqrt{qk}$ 时, 利用 Sudan[9] 和 Guruswami-Sudan[7] 的 List 译码算法可以在多项式时间内解决 MLD 问题. 由于此项工作 Sudan 获得了 2002 年尼凡林那奖.

自然要问: 当纠错距离远远大于 $q-\sqrt{qk}$ 时, 是否有多项式时间算法解决 MLD 问题? 也就是说, Guruswami-Sudan 界 $q-\sqrt{qk}$ 能否得到改进? 这是一个重要的公开问题. 对于任意充分大的纠错距离, 人们相信答案是否定的. 最近, Cheng-Wan[3,4] 找到了一个重要的依据, 他们证明了: $RS_q[q,k]$ 的 MLD 问题的难度至少和有限域 $\mathbb{F}_{q^h}$ 中的离散对数问题的难度相当, 其中 h 可达到 $\leqslant q^{1/4}$. 众所周知, 在计算数论和许多密码应用方面, 离散对数问题是著名的困难问题且得到了很好的研究. 至今人们仍然认为离散对数问题没有多项式时间算法.

是不是 MLD 问题要比离散对数问题更困难呢? 对于特殊情形 $RS_q[q,k]$, 决定 MLD 问题是否是 NP- 困难的仍是一个公开问题. 比 MLD 相对较弱的一个问题是计算纠错距离.

问题 2 是否存在多项式时间算法计算纠错距离 $d(u, RS_q[q,k])$? 纠错距离 $d(u, RS_q[q,k])$ 的计算复杂度是多少?

在一般情形下, 这两个问题都是公开问题. 比如说, 熟知对于计算 $d(u, RS_q[q,k])$ 至今还没有复杂度方面的结果. 对于一些特殊情形, 可利用有限域上的 Riemann 假设来决定 $d(u, RS_q[q,k])$ 的取值, 可参见文献 [2] 和 [6].

Reed-Solomon 码是最简单的代数几何码, 对应于仿射直线上的代数码. 自然的: 对于一般的代数几何码, 子域子码以及码的迹码仍然有上述类似的问题. 因此在这方面还存在很多有趣而丰富的数学问题值得研究.

参 考 文 献

[1] Berlekamp E R. Algebraic Coding Theory. McGraw-Hill Book Co, 1968

[2] Cheng Q, Murray E. On deciding deep holes of Reed-Solomon codes. TAMC, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol 4484, 2007, 296-305

[3] Cheng Q, Wan D. On the list and bounded distance decodibility of Reed-Solomon codes. SIAM J Comput, 2007, 37(1): 195-209

[4] Cheng Q, Wan D. Complexity of decoding positive rate Reed-Solomon codes. 35th International Colloquium on Automata, Languages and Programming(ICALP08), to

appear

[5] Stichtenoth H. Algebraic Function Fields and Codes. Berlin: Springer-Verlag, 1993

[6] Li Y-J, Wan D. On error distance of Reed-Solomon codes, Sciences Sinica, to appear

[7] Guruswami V, Sudan M. Improved decoding of Reed-Solomon and algebraic geometry codes. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45(6): 1757-1767

[8] Guruswami V, Vardy A. Maximum-likelihood decoding of Reed-Solomon codes is NP-hard. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(7): 2249-2256

[9] Sudan M. Decoding of Reed-Solomon codes beyond the error correction bound. J Complexity, 1997, 13: 180-193

撰稿人：万大庆

美国加州大学 Irvine 分校

沙努尔 (Schanuel) 猜想

Schanuel's Conjecture

Schanuel 猜想是超越数论中最基本最前沿的问题之一, 它被认为是包含了目前已知的与指数 (对数) 函数值的超越性有关的所有结果以及所有合理的猜想.

某个非零有理系数多项式方程的实数或复数根被称为代数数, 不是代数数的实数或复数被称为超越数. 超越数论是现代数论的重要分支和组成部分, 在数学的其他分支和领域均有极其重要的应用. 该理论有着非常悠久的历史, 最早的研究可追溯到法国数学家 Liouville 在 1844 年的工作. 其早期的标志性成果是 Hermite 在 1873 年所证明的 e 的超越性以及 Lindemman 在 1882 年所证明的 π 的超越性, 后者导致了著名的古希腊化圆为方问题的解决. Hilbert 的 23 个问题中的第 7 个问题就是关于超越数论的, 该问题是:

若 α 为异于 $0,1$ 的代数数而 β 为代数无理数, 那么 α^β 是否为超越数?

比如说, $2^{\sqrt{2}}, e^\pi=(-1)^{-i}$ 是否为超越数? Hilbert 当时认为此问题相当困难, 需要新思想和方法, 很可能要在黎曼猜想与费马大定理之后才能被解决. 历史与他开了一个玩笑: Gelfond 和 Schneider 在 1934 年就对此问题分别给出了一个正面回答. 若用 $\overline{\mathbf{Q}}$ 表示所有代数数的全体, 则该集合关于加、减、乘、除封闭, 即构成一个域. 上述 Gelfond-Schneider 定理可表述为: 若 x_1, x_2 为非零代数数使得 $\log x_1, \log x_2$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上线性无关, 则 $\log x_1, \log x_2$ 在 $\overline{\mathbf{Q}}$ 上也线性无关. Gelfond 接下来问该定理是否可推广到多个变量的情形. Baker 在 1966 年解决了此问题, 不久以后他还证明了: 若 $x_1, \cdots, x_n$ 为非零代数数使得 $\log x_1, \cdots, \log x_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关, 则 $1, \log x_1, \cdots, \log x_n$ 在 $\overline{\mathbf{Q}}$ 上也线性无关. 进一步人们自然会问这些对数之间是否存在着更为深刻的独立性, 由此产生了

对数代数无关性猜想 若 $x_1, \cdots, x_n$ 为非零的代数数使得 $\log x_1, \cdots, \log x_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关, 则 $\log x_1, \cdots, \log x_n$ 代数无关.

回忆一下, 我们称复数 $y_1, \cdots, y_n$ 代数无关, 若对于任何不恒为零的有理系数的 n 元多项式 P, 均有 $P(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$. 由前面的 Baker 定理可知上述猜想在 $n=1$ 时成立, 此时所得到就是著名的 Hermite-Lindemann 定理. 但当 $n \geqslant 2$ 时, 我们距离对数代数无关性猜想的解决还非常遥远: 我们甚至不知道是否存在代数数 x_1, x_2 使得 $\log x_1, \log x_2$ 代数无关!

借助于指数函数, 上面所提到的 Hermite-Lindemann 定理可以表述成：若 β 为非零复数, 则 β, e^{β} 中必有一个为超越数. 在 Cartier 的建议下, Lang 于 20 世纪 60 年代将超越数论发展到代数群上. Cartier 最初的想法是将 Hermite-Lindemann 定理中的指数函数换成数域上的交换代数群所对应的指数函数. Lang 不仅解决了 Cartier 的原始问题, 还得到了许多别的有趣结果, 其中包括著名的六指数定理. 该定理是说：若 $x_1, \cdots, x_d$ 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的复数, $y_1, \cdots, y_l$ 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的复数, 则当 $dl > d + l$ 时, $e^{x_i y_j}(1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant l)$ 这 dl 个数中必有一个为超越数. 该定理于 1966 年分别被 Lang 和 Ramachandra 所独立证明. 由对称性, 我们可假设 $d \geqslant l$, 于是由条件 $dl > d + l$ 可知 $d \geqslant 3, l \geqslant 2$. 情形 $d = 3, l = 2$ 是最为本质的. 若此时成立, 则一般情形可立刻由之导出. 注意到在此特殊情形我们有 $dl = 6$, 这就是该定理名称的由来. 基于六指数定理, 人们进一步猜想：

四指数猜想 若 $x_1, \cdots, x_d$ 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的复数, $y_1, \cdots, y_l$ 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的复数, 则当 $dl \geqslant d + l$ 时, $e^{x_i y_j}(1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant l)$ 这 dl 个数中必有一个为超越数.

同前面一样, 只需证明该猜想在 $d = l = 2$ 时成立就足够了. 可以证明, 对数代数无关性猜想蕴含着四指数猜想, 尽管二者表面上看起来很不一样. 虽然对数代数无关性猜想是 20 世纪末超越数论中最主要的猜想之一, 但它不是最一般的.

更一般的, 我们有

Schanuel 猜想 若 $x_1, \cdots, x_n$ 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的复数, 则 $x_1, \cdots, x_n, e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}$ 这 $2n$ 个数中至少有 n 个代数无关.

当 $x_1, \cdots, x_n$ 均为代数数时, Schanuel 猜想就是著名的 Lindemann-Weierstrass 定理. 而当 $e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}$ 均为代数数时所得到的就是我们前面已讨论过的对数代数无关性猜想. 关于 Schanuel 猜想, 到现在为止, 人们只是考虑了一些附加了条件的特殊情形. 由于缺乏有效的工具和方法, 人们目前还看不到解决该猜想一般情形的希望, 还需要引入新的思想和手段. Schanuel 猜想蕴含着许多有趣的结论. 比如说, 若在 $x_1 = 1, x_2 = 2i\pi$ 时 Schanuel 猜想成立, 则 e, π 代数无关. 值得一提的是, e, π 的代数无关性问题至今还尚未解决.

参 考 文 献

[1] Baker A. Transcendental Number Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[2] Lang S. Introduction to Transcendental Numbers. Addison-Wesley Publishing Co, 1966

[3] Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques. C R, 1844, 18: 883-885, 910-911

[4] Waldschmidt M. Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Berlin: Springer-Verlag, 2000

[5] Waldschmidt M. Un demi-siècle de transcendance. Development of mathematics, 1950-2000, 1121-1186, Birkhäuser, Basel, 2000

撰稿人： 姚家燕
清华大学

哥德巴赫 (Goldbach) 猜想

Goldbach Conjecture

哥德巴赫猜想是解析数论中最重要的猜想之一, 它的历史可以追溯到 1742 年哥德巴赫致大数学家欧拉的一封信. 在信中哥德巴赫提出了他的猜想, 用后人整理过的语言, 可以这样表述：

I. 每一个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和；

II. 每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和.

如果猜想 II 成立, 则一个奇数减去 3 之后可写成两个奇素数之和, 因而猜想 I 成立. 由此可见, 猜想 II 更为基本. 我们知道, 任何一个正整数都可以唯一地分解为素数之积, 素数是乘法运算中的基本元素. 在上面的猜想中, 将素数放到加法的环境里, 表现了正整数加法和乘法之间的某种关系, 而这两种运算在数学中是最基本和常见的.

哥德巴赫猜想的表述非常简单, 人们通过大量的验算也未找出反例, 数据结果反而是倾向于支持猜想成立的. 对于这样一个简洁明了的猜想, 欧拉没能够提出解决方案, 其后一百多年间数学家们也都束手无策.

1900 年, 数学大师希尔伯特在展望 20 世纪数学发展前景的著名演讲中, 提出了 23 个问题. 他以全局性的观点来看待数学的整体发展, 并将哥德巴赫猜想作为第 8 问题的一部分, 从此哥德巴赫猜想不再是孤立的数学难题, 而是近代数学发展中重要的一环. 后来的发展证明, 希尔伯特的眼光是非常正确的.

1920 年前后, 英国数学家 Hardy 和 Littlewood 发表了系列文章来研究猜想 I, 所用的工具是他们与印度数学家 Ramanujan 共同创造的圆法. 通过围道积分, 猜想 I 中奇数表为素数之和的表示个数可写成关于某个 Fourier 级数的积分, 而积分路径是半径接近于 1 的圆周, 这就是圆法名称的由来. Hardy 和 Littlewood 在一个很强的假设下证明了猜想 I, 这个假设至今仍无法证明, 因而他们的结果是条件性的. 虽然如此, 他们将离散的数论问题转化为连续的数学问题, 使得一些深刻的数学工具得以应用, 这无疑为进一步的发展开辟了一条正确的道路, 而圆法也已成为数论中最基本的方法之一.

1937 年, 苏联数学家 Vinogradov 证明了充分大的奇数可以表示为三个奇素数之和. 他建立了一套处理以素数为变量的 Fourier 级数的方法, 运用这种新方法可以避开上述困难的假设, 从而证明了无条件的结果. 虽然充分大奇数的下界远远超

出目前计算机所能够达到的界限, 但在数学上可以认为猜想 I 已经基本上解决了. Vinogradov 定理又称为三素数定理, 它是解析数论也是数学上最重要的成果之一, 后人有进一步的研究, 比如, 对于三个素数加各种限制条件, 以及降低充分大素数的下界等.

现在我们来看猜想 II. 将它与猜想 I 比较, 从方程上看仅差一个素数变量, 然而在转化为连续问题之后, 这个变量起到了关键性作用, 它使得相关的估计得以进行. 对于猜想 II 人们无法沿用猜想 I 中的方法, 只得寻找另外的途径.

目前研究猜想 II 的主要工具是筛法, 它可以追溯到公元前 200 多年古希腊的 Eratosthenes 筛法, 今天我们在作素数表时还会用到这种方法. 筛法是一种初等的组合方法, 要将它应用于猜想 II 并得出有意义的结果, 则还需作进一步的改造. 另一方面, 由于筛法的一些局限性, 人们不可能一步达到猜想 II, 而是采取逐步逼近的方式. 1920 年, 挪威数学家 Brun 对筛法作了重大的改进, 由此证明了充分大的偶数可以表为两个正整数之和, 其中每个正整数的素因子个数均不超过 9, 这个结果通常称为 (9+9). Brun 为用筛法研究猜想 II 开辟了一条新的途径, 随着筛法技术的发展, 上述的素因子个数会不断地减少.

中国数学家陈景润、王元、潘承洞对于猜想 II 做出了重要的贡献, 得到了国际数学界广泛的赞誉. 陈景润以其灵活的思路和深入的计算证明了 (1+2), 他的方法对于筛法是一个重要的贡献, 陈景润的 (1+2) 和 Vinogradov 的三素数定理可以称得上是哥德巴赫问题中的双璧. 意大利数学家 Bombieri 证明了比陈景润弱的结果 (1+3), 这是他获得菲尔兹奖的工作的一个重要组成部分, 由此也可以看出国际数学界对于哥德巴赫猜想的关注.

从表面上看, (1+2) 离猜想 II 只有一步之遥, 但数学家们认为, 这一步可能比以往走过的路的总和还要长. 因此, 人们也在寻找另外接近猜想 II 的途径. 例如, 华罗庚等人利用 Vinogradov 方法证明了对于除去一个例外集合的所有偶数, 猜想 II 总成立. 不断放松对于偶数集合的相应限制直至取消, 也是逐步接近猜想 II 的一条途径. 华罗庚更进一步考虑了素数变量方幂的情形, 这拓宽了研究的范围, 为后人提供了丰富的研究题材.

对于哥德巴赫猜想的研究, 也促进了其他一些经典问题的研究. 例如, 人们要问是否存在无穷多个素数 p, 使得 $p+2$ 仍然是一个素数? 这是著名的孪生素数猜想. 从方程上看, 这个猜想与猜想 II 有相似之处, 用证明 (1+2) 的方法可以得到: 存在着无穷多个素数 p, 使得 $p+2$ 的素因子个数不超过 2. 另一个例子是问: 是否有无穷多个正整数 x, 使得 x^2+1 总是素数? 这个问题比孪生素数猜想更困难, 这是因为在正整数中, 形如 x^2+1 的数比 $p+2$ 稀少, 所以, x^2+1 为素数的概率更小. 运用筛法可以证明, 存在着无穷多个正整数 x, 使得 x^2+1 的素因子个数不超过 2.

哥德巴赫猜想被誉为数学中的一颗明珠, 正是因为它的悠久历史、简洁明了的

表述、与数学基本问题的联系, 以及在研究过程中所产生的重要数学方法等, 它的迷人光彩吸引了一代又一代的数学家.

参 考 文 献

[1] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981
[2] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1997

撰稿人: 贾朝华
中国科学院数学与系统科学研究院

关于不同模覆盖系的厄尔多斯 (Erdös) 问题

Erdös' Problem on Covering Systems with Distinct Moduli

对于有限个剩余类构成的系

$$\mathrm{A}=\{\mathrm{a}_1(\mathrm{mod} n_1),\cdots,\mathrm{a}_k(\mathrm{mod} n_k)\}\quad(n_1\leqslant\cdots\leqslant n_k),$$

如果每个整数都属于 A 中至少一个剩余类, 则称 A 为一个 (同余) 覆盖系 (或简称为覆盖). Paul Erdös 悬赏征解下述问题：不同模覆盖系的最小模能否任意大？即是否对任给的 $c>0$ 都有不同模覆盖系 $\{\mathrm{a}_1(\mathrm{mod}\ n_1),\cdots,\mathrm{a}_k(\mathrm{mod}\ n_k)\}$ $(n_1<\cdots<n_k)$ 使其最小模 n_1 至少为 c? Erdös 多次指出这是他众多问题中最喜爱的一个 (“This is my favorite problem of all.”).

覆盖概念是由 Erdös 在 20 世纪 30 年代引进的, 被他视为一生最得意的发明. 中国剩余定理告诉我们有限个剩余类相交何时非空, 其对偶问题便是有限个剩余类的并是否为整数集 **Z**. 能否在多项式时间内判定给定的剩余类系 A 是否构成覆盖系等价于算法理论中著名世界难题 NP 是否等于 P (L. J. Stockmeyer 和 A. R. Meyer, 1973). 现已知道, 覆盖系还与加法数论、指数丢番图方程、单位分数、特殊函数、格点几何、不可约多项式理论等有紧密的联系.

Erdös 利用不同模覆盖系

$$\{0(\mathrm{mod}\ 2), 0(\mathrm{mod}\ 3), 1(\mathrm{mod}\ 4), 3(\mathrm{mod}\ 8), 7(\mathrm{mod}\ 12), 23(\mathrm{mod}\ 24)\}$$

构造了一个全由奇数组成的剩余类, 其中每个数都不能表成 2^n+p 的形式, 这里 n 为非负整数, p 为素数. 如果关于不同模覆盖系的上述 Erdös 问题有肯定的解答, 则对每个 $r=1,2,3,\cdots$ 都有剩余类使其中每个数都不能表成 $2^n+\theta_r$ 的形式, 其中 θ_r 表示至多有 r 个不同素因子的正整数. 关于不同模覆盖系的最小模, 目前最好的纪录是可取 $n_1=40$ (P. Nielsen, 2008). 关于不同模覆盖的另一个著名难题是下述 Erdös-Selfridge 猜想：模都大于 1 的不同模覆盖系必有偶数模.

容易证明 A 为覆盖系时模的倒数和 $1/n_1+\cdots+1/n_k$ 至少为 1, 且它恰在 A 为不相交覆盖时取值 1. Erdös 曾猜测 A 是异于 $\{0(1)\}$的不同模覆盖时 A 一定不是不相交覆盖. 20 世纪 60 年代 H. Davenport, L. Mirsky, D. Newman 与 R. Rado 分别独立地利用幂级数来证明这个猜想.

不相交覆盖系是最规则的一类覆盖, 对于这类覆盖 Erdös 问题没什么意义, 因为不是{0(1)}的不相交覆盖不可能不同模. 但我们可问下述类似 Erdös 问题：给定 M >1, 每个模重复至多 M 次的不相交覆盖系最小模能否任意大? 1986 年 R. J. Simpson 证明了 N. Burshtein 的一个猜想, 进而否定地回答了这一问题.

对于不同模覆盖系 $\{a_1(\bmod\ n_1), \cdots, a_k(\bmod\ n_k)\}$ $(1 < n_1 < \cdots < n_k)$, Erdös 与 J. L. Selfridge 猜想最小模 n_1 趋于无穷大时模的倒数和 $1/n_1 + \cdots + 1/n_k$ 趋于无穷, 2007 年 M. Filaseta, K. Ford, S. Konyagin, C. Pomerance 与 G. Yu 用筛法证明了这是正确的, 2008 年 S. Kim 又把他们的结果推广到代数数域整数环的理想剩余类覆盖上.

覆盖系 (尤其是不同模覆盖系) 有许多应用. 尽管我们不知道 Fibonacci 数列是否包含无穷多个素数, 但应用覆盖系 R. L. Graham 在 1964 年证明了有互素的正整数 a 与 b 使得由

$$w_0 = a, \quad w_1 = b, \quad w_{n+1} = w_n + w_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

给出的序列 $w_0, w_1, w_2, \cdots$ 不含素数; 最近吴克俭与孙智伟利用覆盖证明有 80 位的正整数 a 与 M 使得 $x \equiv a \pmod M$ 时 $x^2 - F_{3n}/2$ 至少有两个不同素因子. Selfridge 利用覆盖系证明 $78557 \times 2^n + 1$ 总为合数, 人们猜想 78557 是最小的正整数 k 使得 $k2^n + 1$ 总为合数. 1975 年 F. Cohen 与 Selfridge 利用覆盖系构造了不能表成 $\pm 2^a \pm p^b$ 形式 (其中 p 为素数, a 与 b 为非负整数) 的一个 94 位正整数, 2000 年孙智伟证明剩余类

$$47867742232066880047611079 \pmod{66483084961588510124010691590}$$

中每个数都不能 $\pm p^a \pm q^b$ 的形式 (其中 p 与 q 为素数, a 与 b 为非负整数); 2008 年 T. Tao 利用 Selberg 上界筛法证明对每个整数 $a > 1$, 素数集都有个正密率子集使其中每个素数表成 a 进制后无论改变哪一位都变成了合数 ($a = 2$ 时这一结果蕴涵于 Cohen-Selfridge 与孙智伟的工作中).

剩余类 a(mod n) 实际上是加法循环群 $\mathbf{Z}$ 的指标为 n 的子群 $n\mathbf{Z}$ 的陪集 $a+n\mathbf{Z}$, 因此整数环的同余覆盖系概念可推广成一般的群的左陪集覆盖. 关于群覆盖的一个基本结果是下述 Neumann-Tomkinson 定理：如果群 G 的有限个左陪集 $a_1\mathrm{G}_1, \cdots, a_k\mathrm{G}_k$(其中 $a_1, \cdots, a_k$ 为 G 的元素, $\mathrm{G}_1, \cdots, \mathrm{G}_k$ 为 G 的子群) 构成 G 的极小覆盖 (即无多余覆盖系), 则诸指标 n_1=[G:G$_1$], $\cdots$, n_k=[G:G$_k$] 都是有穷的. 1974 年 Herzog 与 Schönheim 提出下述猜想：如果群 G 的有限个左陪集 $a_1\mathrm{G}_1, \cdots, a_k\mathrm{G}_k (k > 1)$ 构成 G 的不相交覆盖, 则诸指标 n_1=[G:G$_1$], $\cdots$, n_k=[G:G$_k$] 不可能两两互异. M. A. Berger, A. Felzenbaum 与 A. S. Fraenkel 证明这个猜想在 G 为有限幂零群与超可解群时正确; 孙智伟证明 $\mathrm{G}_1, \cdots, \mathrm{G}_k$ 在 G 中次正规时猜想正确, 而且诸指标

n_1=[G:G$_1$], $\cdots$, n_k=[G:G$_k$] 中每个至多重复出现 M 次时最小指标的自然对数不超过

$$(\mathrm{e}^{\gamma}/\ln 2)M\ \ln^2 M+\mathrm{O}(M\ \ln M\ \ln\ln M),$$

这里与 O 有关的常数是绝对的. 孙智伟的下述猜想远未解决：如果群 G 的有限个左陪集 a_1G$_1$, $\cdots$, a_kG$_k$ 两两不相交且诸指标 [G:G$_1$], $\cdots$, [G:G$_k$] 都是有穷的, 则必有 $1 \leqslant i < j \leqslant k$ 使得 [G:G$_i$] 与 [G:G$_j$] 的最大公因子至少为 k.

参 考 文 献

[1] Berger M A, Felzenbaum A, Fraenkel A S. Ther Herzog-Schönheim conjecture for finite nilpotent groups. Canad Math Bull, 1986, 29: 329-333

[2] 陈永高. On integers of the form k^{r}-2n and $\mathrm{k}^{\mathrm{r}}2^{\mathrm{n}}$+1. J Number Theory, 2003, 98: 310-319

[3] Filaseta M, Ford K, Konyagin S, Pomerance C, Yu G. Sieving by large integers and covering systems of congruences. J Amer Math Soc, 2007, 27: 495-517

[4] 郭嵩, 孙智伟. On odd covering systems with distinct moduli. Adv in Math, 2005, 35: 182-187

[5] Guy R K. Unsolved Problems in Number Theory. 3rd Edition. New York: Springer-Verlag, 2004, Sections A19, B21, F13, F14

[6] Kim S. Covering systems in number fields. J Number Theory, 2008, to appear, http://dx. doi.org/10.1016/j.jnt.2008.05.013

[7] 孙智伟. On integers not of the form $\pm\mathrm{p}^{\mathrm{a}}\pm\mathrm{q}^{\mathrm{b}}$. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 997-1002

[8] 孙智伟. On the Herzog-Schönheim conjecture for uniform covers of groups. J Algebra, 2004, 273: 153-175

[9] Tao T. A remark on primality testing and decimal expansions. J Aust Math Soc, 2008, to appear. http://arxiv.org/abs/0802.3361

[10] 朱婉婕. On Sun's conjecture concerning disjoint cosets. Int J Mod Math, 2008, 3: 197-206

撰稿人：孙智伟
南京大学

关于倒数和发散序列的厄尔多斯–图兰 (Erdös-Turán) 猜想

Erdös-Turán Conjecture on Sequence with The Sum of Reciprocals Divergent

1936 年 Erdös 与 Turán 提出了下述一般猜想：如果 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ 为递增的正整数序列且级数 $\sum\limits_{i\geqslant 1} 1/a_i$ 发散, 那么该序列包含任意长的非平凡算术级数 (即公差不为零的等差数列). 鉴于所有素数的倒数和发散, Erdös-Turán 猜想蕴含着素数序列包含任意长的非平凡等差子序列.

1927 年, van der Waerden 建立了下述著名结果：如果所有自然数被分成有限类, 那么其中某一类必包含任意长的非平凡算术级数. van der Waerden 定理是组合数论中的基本结果之一. 受它的启发, Erdös 与 Turán 猜测自然数集的子集 A 具有正的上密率时 A 必包含任意长的非平凡算术级数. 令

$$r_k(n)=\max\{|A| : A \text{ 为 } \{1,\cdots,n\} \text{ 的子集且 } A \text{ 不包含长为 } k \text{ 的非平凡算术级数}\},$$

上述猜测相当于说当 n 趋向于无穷时 $r_k(n)/n$ 趋向于 0. 关于倒数和发散序列的 Erdös-Turán 猜想比这还要强, 因为自然数集的子集 A 具有正的上密率时级数 $\sum\limits_{a\in A} 1/a$ 发散.

1953 年, Roth 得到了 Erdös-Turán 问题的第一个非平凡结果. 他证明了 $r_3(n) = O(n/\log\log n)$. Roth 的证明是基于解析数论中的 Hardy-Littlewood 圆法. 1975 年, Szemerédi 完全证明了 Erdös-Turán 关于具有正的上密率集的猜测, 此结果现在叫 Szemerédi 定理. Szemerédi 的证明是纯组合的, 关键的技巧是 Szemerédi 正则化引理. Szemerédi 正则化引理现在已经成为图论中的重要工具之一. 1970 年, Furstenberg 利用遍历理论的方法, 给出了 Szemerédi 定理的新证明. 目前遍历方法已成为研究 Szemerédi 型问题最强有力的工具. 另一方面, 遍历方法虽然能证明 $r_k(n)/n$ 趋向于 0, 但却不能给出关于 $r_k(n)$ 的非平凡的界. Szemerédi 的组合方法虽然能够给出 $r_k(n)$ 的界, 但这个界的增长远超过任何原始递归函数. 1998 年, Gowers 推广了 Roth 的方法, 并结合和集理论中深刻 Freiman 定理与 Balog-Szemerédi 定理, 给出了 Szemerédi 的第三个证明以及 $r_k(n)$ 的较好的上界. Gowers 证明的一个

重要之处在于引入了 Gowers 范数这一概念. 最近, Rödl 等人与 Gowers 分别独立将 Szemerédi 正则化引理推广到超图上, 从而给出了 Szemerédi 定理的第四个证明.

2005 年, Green 与 Tao 利用 Furstenberg 证明的思想, 并结合了 Goldston、Pintz 与 Yildirim 的关于素数分布的一个结果, 证明了素数中包含了任意长的非平凡算术级数. Green 与 Tao 的证明中关键的部分是一个转换原理, 将素数集转换成自然数的一个正密率子集, 然后运用 Szemerédi 定理.

Green-Tao 定理的证明中需要运用到关于黎曼 ζ 函数的一些性质, 所以他们的方法尚难以直接用于处理关于倒数和发散序列的 Erdös-Turán 猜想. 此猜想的难点在于如何运用序列倒数和发散这一条件. 不过, Tao 指出只要对某个 $\varepsilon > 0$ 有 $r_k(n) = O(n/(\log n)^{1+\varepsilon})$, 就可以推出上述猜想. 事实上, Erdös 甚至认为 $r_k(n) = O(n/(\log n)^A)$ 对任意的 $A > 0$ 都成立. 关于 $r_k(n)$ 的界, 目前仅对 $r_3(n)$ 得到一些比较好的结果. Behrend 证明了 $r_3(n) \geqslant \exp(-C(\log n)^{1/2})n$, 这里 C 是一个正常数. 最近, Bourgain 证明了 $r_3(n) = O(n(\log\log n)^2/(\log n)^{2/3})$. $k > 3$ 时对 $r_k(n)$ 的上界所知甚少, Green 与 Tao 宣称他们可以证明 $r_4(n) = O(n/(\log n)^c)$ 对某个 $c > 0$ 成立.

参 考 文 献

[1] Erdös P, Turán P. On certain sequences of integers. J London Math Soc, 1936, 11: 261-264

[2] Furstenberg H. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J Analyse Math, 1977, 31: 204-256

[3] Gowers W T. A new proof of Szemerédi's theorem. GAFA, 2001, 11: 465-588

[4] Gowers W T. Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem. Ann of Math, 2007, 166: 897-946

[5] Green B. Roth's theorem in the primes. Ann of Math, 2005, 161: 1609-1636

[6] Green B, Tao T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann of Math, 2008, 167: 481-547

[7] Rödl V, Skokan J. Regularity lemma for k-uniform hypergraphs. Random Structures Algorithms, 2004, 25: 1-42

[8] Roth K F. On certain sets of integers. J London Math Soc, 1953, 28: 245-252

[9] Szemerédi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith, 1975, 27: 299-345

[10] Tao T, Vu V H. Additive Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006

撰稿人：孙智伟 潘 颢
南京大学

关于奇数阶阿贝尔 (Abel) 群的 Snevily 猜想

Snevily's Conjecture on Abelian Groups of Odd Orde

1999 年 H. S. Snevily 提出下述猜想：对于奇数阶 (乘法)Abel 群 G 的 k 元子集 A $= \{a_1, \cdots, a_k\}$ 与 B $= \{b_1, \cdots, b_k\}$, 必有 $\{1, \cdots, k\}$ 的置换 σ 使得 $a_1b_{\sigma(1)}, \cdots, a_kb_{\sigma(k)}$ 两两不同.

大家知道群论中对有限 Abel 群的结构早已研究清楚, 要想提出关于 Abel 群的难题似乎不太容易了. Snevily 的上述猜想一经提出, 就因其简洁优美与富有挑战性而受到组合数论界的广泛关注. 这个猜想是关于调序的众多组合难题中最典型的例子.

1952 年 M. Hall 证明了 G. Cramer 关于 $\mathrm{Z}_n = \mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ 的一个猜想, 并把它推广成下述关于有限 Abel 群的结果：设 G $= \{a_1, \cdots, a_n\}$ 为 n 阶 Abel 群, $b_1, \cdots, b_n$ 为它的 (可重复) 元素, 则存在 $\{1, \cdots, n\}$ 的置换 σ 使得 $a_1b_{\sigma(1)}, \cdots, a_nb_{\sigma(n)}$ 两两不同 (即 G $= \{a_1b_{\sigma(1)}, \cdots, a_nb_{\sigma(n)}\}$) 当且仅当 $b_1 \cdots b_n$ 等于 G 的单位元 e. Snevily 受此结果启发提出了他的关于奇数阶 Abel 群的猜想.

为何猜想中要求 Abel 群 G 的阶数为奇数呢？首先注意, 奇数阶 Abel 群没有二阶元, 因而它的所有元素之积恰为单位元 (每个元与它的逆元乘在一起等于单位元). 其次, 偶数阶群 G 必有二阶元 g, 取 A=B=$\{$e,$g\}$即知没有要求的结论.

对于 n 阶群 G $= \{a_1, \cdots, a_n\}$, 它的 Cayley 乘法表是个 n 阶方阵 M, 其 i 行 j 列元为 a_ia_j, 显然 M 是个 n 阶拉丁方 (其每行元素各不相同, 每列元素也各不相同). 一个 n 阶拉丁方包含拉丁横截指它的某 n 个位置上所填的元素互异, 而且这 n 个位置中没有两个同行也没有两个同列. Snevily 猜想等价于说奇数阶 Abel 群乘法表的每个 k 阶子方阵都包含拉丁横截.

2000 年 Noga Alon 使用域上多项式方法证明了 Snevily 猜想对奇素数阶循环群成立. 事实上, Alon 证明了下述更强的结论：设 p 为素数, A $= \{a_1, \cdots, a_k\}$ 为 Z_p 的 k 元子集, $b_1, \cdots, b_k \in Z_p$, 而且 $k < p$, 则有 $\{1, \cdots, k\}$ 的置换 σ 使得 $a_1 + b_{\sigma(1)}, \cdots, a_k + b_{\sigma(k)}$ 两两不同. 2001 年 Dasgupta, Karolyi, Serra 与 Szegedy 用多项式方法对奇数阶循环群证明了 Snevily 猜想；他们还把 Alon 的结果推广到素数幂阶循环群与初等 Abel 群上, 并提出下述 DKSS 猜想: G 为有限 Abel 群且 $|\mathrm{G}| > 1$ 时, 对于 G 的 k 元子集 A $= \{a_1, \cdots, a_k\}$(其中 k 小于 $|\mathrm{G}|$ 的最小素因子 p(G)) 与 G 中 (可重复) 元 $b_1, \cdots, b_k$, 必有 $\{1, \cdots, k\}$ 的置换 σ 使得 $a_1b_{\sigma(1)}, \cdots,$

$a_k b_{\sigma(k)}$ 两两不同. 2003 年孙智伟注意到对于挠子群循环的 Abel 群 G 的 k 元子集 A=$\{a_1, \cdots, a_k\}$与 B=$\{b_1, \cdots, b_k\}$, 只要 B 中元都是奇数阶的 (不必要求 G 是奇数阶的) 就有 $\{1,\cdots,k\}$ 的置换 σ 使得 $a_1 b_{\sigma(1)}, \cdots, a_k b_{\sigma(k)}$ 两两不同. 2004 年高维东与王殿军用群环方法证明 Abel p- 群 G 上 DKSS 猜想在 $k^2 < 2p$ 时成立, 而且 Abel 群 G 上 Snevily 猜想在 $k^2 < p(\mathrm{G})$ 时成立. 2008 年冯涛、孙智伟与向青利用外代数与 Abel 群的特征证明关于 Abel 群 G 的 DKSS 猜想在如下的三种情形下成立：① G 为 p- 群, ② |G| 的第二小素因子大于 $k!$, ③ A 形如 $\{a, a^2, \cdots, a^k\}$(其中 $a \neq \mathrm{e}$).

2006 年孙智伟证明了下述类似于 Snevily 猜想的结果：设 G 为具有循环挠子群的 Abel 群 (不要求 G 是奇数阶的), A=$\{a_1, \cdots, a_k\}$, B=$\{b_1, \cdots, b_k\}$, C=$\{c_1, \cdots, c_k\}$都是 G 的 k 元子集, 则有 $\{1,\cdots,k\}$ 的置换 σ 与 τ 使得 $a_1 b_{\sigma(1)} c_{\tau(1)}, \cdots, a_k b_{\sigma(k)} c_{\tau(k)}$ 两两不同. 因此, n 阶循环群的立方乘法表的每个 k 阶立方子块都包含拉丁横截. 孙注意到这一结果不能推广到一般的有限 Abel 群上, 事实上对于 Klein 四元群 $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ 它就是不对的.

Snevily 猜想在组合数论中有着基本的重要性. 目前所用的研究方法都无法彻底解决它, 这使得 Snevily 猜想极富挑战性. 预计最终解决它的方法将有力地推动组合数论的发展.

最后指出, Snevily 的另一个调序相加猜想也未解决：设 $a_1, \cdots, a_k$ 为整数且 $k < n$, 则有 $\{1,\cdots,k\}$ 的置换 σ 使得 $\mathrm{a}_1 + \sigma(1), \cdots, a_k + \sigma(k)$ 模 n 两两不同余. 2002 年 Kezdy 与 Snevily 证明了 $k \leqslant (n+1)/2$ 时此猜想正确, 孙智伟与叶永南对此做了推广.

参 考 文 献

[1] Alon N. Combinatorial Nullstellensatz. Combin Probab Comput, 1999, 8: 7-29

[2] Alon N. Additive Latin transversals. Israel J Math, 2000, 117: 125-130

[3] Dasgupta S, Karolyi G, Serra O and Szegedy B. Transversals of additive Latin squares. Israel J Math, 2001, 126: 17-28

[4] 冯涛, 孙智伟, 向青. Exterior algebras and two conjectures on finite abelian groups. http://arxiv.org/abs/0808.2753

[5] 高维东, 王殿军. Additive Latin transversals and group rings. Israel J Math, 2004, 140: 375-380

[6] Hall M Jr. A combinatorial problem on abelian groups. Proc Amer Math Soc, 1952, 3: 584-587

[7] Kezdy A E, Snevily H S. Distinct sums modulo n and tree embeddings. Combin Probab Comput, 2002, 11: 35-42

[8] Snevily H S. The Cayley addition table of Zn. Amer Math Monthly, 1999, 106: 584-585

[9] 孙智伟. On Snevily's conjecture and restricted sumsets. J Combin Theory Ser A, 2003, 103: 291-304

[10] 孙智伟. An additive theorem and restricted sumsets. http://arxiv.org/abs/math.CO/0610981

撰稿人：孙智伟
南京大学

关于有限域上代数曲线点数的 Drinfeld-Vladt 界

The Drinfeld-Vladt Bound on Numbers of Points of Algebraic Curves over Finite Fields

F_q 设是 q 元有限域, 其中 q 是某个素数的方幂. 对于 $F_q[x,y]$ 中每个不可约多项式 $f(x,y)$, 我们有一条 (不可约) 代数曲线 $C: f(x,y)=0$. 以 $N_q(C)$ 表示曲线 C 上坐标属于 F_q 的点的个数 (包括曲线 C 在 F_q 上的无穷远射影点). 1941 年, A. Weil 提出猜想：若 C 是绝对不可约的非奇异曲线, 则 $|N_q(C)-(q+1)| \leqslant 2g\sqrt{q}$, 其中 $g=g(C)$ 是曲线 C 的亏格 (genus). Weil 本人于 1948 年证明了这个猜想, 证明采用了他建立的代数几何新概念, 这些概念将代数几何的研究推进到一个新的水平. 事实上, A.Weil 对于有限域上高维代数簇提出了更一般的猜想, 高维 Weil 猜想由 P.Deligne 于 1973 年证明, 并获得 1978 年菲尔兹数学奖.

数论和代数几何的上述结果, 在通信的代数编码理论中得到令人振奋的重大应用. 1970 年代, 前苏联数学家 Goppa 基于 Riemann-Roch 定理, 构作了新型的纠错码, 叫做代数几何码. 1982 年, 三位代数几何学家 Tsfasman,Vladut 和 Zink 采用模曲线构作代数几何码, 其纠错性能达到甚至超过了 1952 年的 Gilbert-Varshamov 界, 是纠错理论的一个重大突破. 后来 Garcia, Stichtenoth 和邢朝平等人利用更初等的 Artin-Schreier 曲线族给出类似的结果, 使经典和量子纠错码的渐进界不断加以改进.

纠错码所使用的代数曲线 C, 希望其上有较多的点, 即希望 $N_q(C)$ 的值愈大愈好. 代数几何码的应用提出以下一个数学问题：对于每个固定的整数 $g \geqslant 0$, 以 $A(q,g)$ 表示 $N_q(C)/g(C)$ 的最大值, 其中 C 过亏格为 g 的 F_q 上全部代数曲线. 再令 $A(q)=\overline{\lim\limits_{g\to\infty}} A(q,g)$. 问题：$A(q)=?$

这个来源于应用的问题引起一些著名数学家的兴趣. 这个问题是 Ihara 于 1981 年提出的, 由上述的 Weil 定理可得到 $A(q) \leqslant 2\sqrt{q}$. 1983 年, Drinfeld(菲尔兹奖获得者) 和 Vladut 改进了 Ihara 的思想, 证明了 $A(q) \leqslant \sqrt{q}-1$. 而 Tsfasman,Vladut 和 Zink(以及 Ihara) 利用模曲线理论给出：当 q 为平方数时 (即 $q=p^{2n}$ 为素数的偶次方幂时), $A(q)=\sqrt{q}-1$. 剩下的问题是：如果 $q=p^{2n+1}$, 其中 p 为素数, 目前只知 Gilbert-Varshamov 界 $A(q) \leqslant \sqrt{q}-1$, 不知 $A(q)$ 的确切值. 在下界方面, J.-P.Serre 于 1983 年得到：$A(q) \geqslant c\log q$, 其中 c 是正实数. 后来下界有所改进, 但是 Serre 所采用的方法 (函数域类域的无限序列) 仍旧是研究此问题的一个重要手段.

除了上述 Gilbert-Varshamov 界的问题之外, 明显的构作一批 F_q 上的曲线 C, 使得点数 $N_q(C)$ 达到 Weil 的上界 $N_q(C)=1+q+2g(C)\sqrt{q}$ (这时 C 叫做极大曲线) 也是信息应用领域中感兴趣的问题.

参 考 文 献

[1] Drinfeld V G and Vladut S GF. The number of points of an algebraic curve. Funktsional Anal: Prilozhen, 1983, 17: 68-69. [Functional Anal Appl 1983, 17: 53-54]

[2] Ihara Y. Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields. J Fac Sci Tokyo, 1981, 28: 721-724

[3] Niederreiter H and Xing C P. Rational Points of Curves over Finite Fields. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2001

[4] Serre J -P. Sur le nombre des points rationelles d'une courbe algebrique sur une corps fini. C R Acad Sci Paris, 1983, 296 397-402

[5] Tsfaman V G, Vladut S G and Zink T. Modular curves, Shimura cueves and Goppa codes better than the Varshamov-Gilbert bound. Math Nachr, 1982, 109: 21-28

[6] Garcia A and Stichtenoth H ed. Topics in Geometry. Coding Theory and Cryptography. Berlin: Springer-Verlag, 2007

撰稿人：冯克勤

清华大学

朗兰兹 (Langlands) 纲领

Langlands Program

一、历史背景与中心思想

Riemann(1859) 猜想 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \mathrm{Re}s>1$$

在解析延拓至全复平面后, 所有非显然零点的实部均为 1/2[39]. 文献 [45] 提出了有限域上 n 维光滑射影簇上的 Riemann 猜想, 并同时证明了有限域上代数曲线与阿贝尔簇的 Riemann 猜想成立. Deligne[6] 最终证明了 Weil 所提出的 Riemann 猜想[21].

Weil 和 Deligne 的证明有一大特点, 即不是对单一的一个 ζ 函数证明 Riemann 猜想, 而是对一族 ζ 函数来证明的. Weil 的证明启发了 Langlands 对 Riemann ζ 函数、Artin L- 级数与 Hecke L- 级数进行推广, 形成了关于自守 L 函数理论的猜想 (见文献 [31]~[33]). 为了构造这些自守 L 函数, Langlands 利用了 Harish-Chandra(1923-1983) 关于半单李群表示的理论, Borel(1923-2003) 与 Harish-Chandra 关于线性代数群的算术理论, 及文献 [17] 关于 Whittaker 函数的理论[32]. Langlands 同时构造了 L 群的概念, 并发展了 Eisenstein 级数理论 (1965).

自守 L 函数是通过自守群表示定义的. Langlands 猜想这些自守 L 函数之间满足某些和谐的关系, 并存在唯一的因式分解. 反映到自守群表示上, 这就是自守群表示之间的函子性, 这种函子性猜想可以完全由 L 群之间的映射来确定. 给定一个线性代数群, 它在基域上的自守群表示与某一个扩域上的群表示之间的关系称作基变换, 是函子性的一个特例.

Langlands 函子性猜想第一个被验证的实例是代数数域上 GL_2 的自守表示与四元数代数的乘法子群的表示之间的函子性[18]. 这部经典著作中所证明的函子性同时也提出了 Artin 猜想的原始形式与函子性猜想的关系, Artin 猜想也被重新表述为 Galois 群的二维复表示与 GL_2 自守群表示之间的函子性猜想.

Artin 猜想[2] 指出 Galois 群上构造的 Artin L 函数为全纯. Langlands 猜想这些 Artin L 函数实质上都应该是自守群表示的 L 函数. 这样, 通过文献 [10] 关于自守 L 函数的理论与全纯性的证明, Artin L 函数的全纯性就可由其函子性推出.

设 E 为 $\mathbb{Q}$ 上的一个椭圆曲线, 我们可以定义椭圆曲线 E 的 Hasse-Weil L 函数 $L(s,E)$. Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想 $E(\mathbb{Q})$ 的 Mordell-Weil 秩等于 $L(s,E)$ 在 $s=1$ 处的零点的阶. Shimura-Taniyama-Weil 猜想 $L(s,E)$ 等于某个自守 L 函数 (1950s). 这个猜想最终被 Taylor-Wiles[43] 与 Breuil-Conrad-Diamond-Taylor[5] 证明. Taylor-Weil[43] 的证明在 Wiles[46] 对 Fermat 大定理的证明中起了关键性的作用.

上述结果进一步地支持了 Langlands 关于 L 函数的猜想, 即最一般的 L 函数都应该是代数数域上 GL_n 的自守 L 函数, 而这些自守 L 函数均可唯一地分解为“标准”L 函数的乘积. 这里, 标准 L 函数指 $\mathbb{Q}$ 上 GL_m 的自守尖点表示所对应的 L 函数. 这里分解的唯一性可以通过群表示论的方法或分析方法来证明.

在几何方面, 设 X 为一个光滑的、射影的、几何上不可约的、在有限域上的代数曲线, $\pi_1(X)$ 为其étale 基本群. Langlands 猜想 $\pi_1(X)$ 的任意 n 维不可约的 ℓ 进表示均可一一对应于函数域上 GL_n 的自守表示. 这个函数域上的 Langlands 对应在 GL_2 的情况下由 Drinfeld[7] 证明, 而一般情况由 Lafforgue[28] 证明. 几何 Langlands 猜想更进一步预见 $\pi_1(X)$ 的 n 维不可约 ℓ 进表示均对应于 Hecke 尖点特征层[29,35].

二、自守群表示

设 $\mathbb{F}$ 为一代数数域, v 为 $\mathbb{F}$ 的一个 Archimedes 或非 Archimedes 赋值, $\mathbb{F}_v$ 为 $\mathbb{F}$ 在该赋值下的完备化扩域. $\mathbb{F}$ 的阿代尔环由限制乘积 $\mathbb{F}_{\mathbb{A}}=\Pi'_v\mathbb{F}_v$ 定义. 设 G 为一可简约线性代数群, 则我们有 $G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$ 及其有理点 $G(\mathbb{F})$. 记 G 的中心子群为 Z. 例如 $G=GL_n$, 则 $Z=\left\{\begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z\end{pmatrix}\right\}$. 设 w 为 $\mathbb{F}$ 的伊代尔群 $\mathbb{F}_{\mathbb{A}}^*$ 上的一个非平凡特征, 其在 $\mathbb{F}^*$ 上平凡, 则 w 又可被看作 $Z(\mathbb{F})\backslash Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$ 上的一个特征.

考虑函数空间 $L^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)$, 其中的函数对有理点左不变：$f(\gamma g)=f(g),\gamma\in G(\mathbb{F}),g\in G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$；以 w 为中心特征：$f(zg)=w(z)f(g),z\in Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),g\in G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$；并且积分

$$\int_{Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})}|f(g)|^2dg<\infty.$$

记 $L^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)$ 中对所有非平凡抛物子群的幂单根式子群 N 满足

$$\int_{N(\mathbb{F})\backslash N(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})}f(ng)dn=0,\quad \text{对几乎所有 } g\in G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$$

的函数 f 所构成的子空间为 $L_0^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)$. 例如对于 $G=GL_n$, 非平

凡抛物子群可取为

$$P=\left\{\begin{pmatrix} GL_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & GL_{n_r}\end{pmatrix}\right\}, \text{则} N=\left\{\begin{pmatrix} I_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{n_r}\end{pmatrix}\right\}.$$

定义群 $G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})$ 在空间 $L^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)$ 上的右正则表示为

$$\rho: G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})\to \mathrm{End}(L^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)),\ (\rho(g)f)(h)=f(hg).$$

ρ 在子空间 $L_0^2(Z(\mathbb{F}_{\mathbb{A}})G(\mathbb{F})\backslash G(\mathbb{F}_{\mathbb{A}}),w)$ 上有离散谱分解, ρ 在 L_0^2 上任意一个不可约子表示 π 被称为自守尖点表示. ρ 在 L_0^2 之外的连续谱分解可以用 Eisenstein 级数理论得出.

自守尖点表示 π 可以分解成局部表示的乘积 $\pi=\otimes_v\pi_v$, 其中 π_v 为 $G(\mathbb{F}_v)$ 的光滑, 可容许不可约表示. π_v 可以用 Weil 群或 Weil-Deligne 群的连续同态来描述. 记 $\bar{\mathbb{F}}_v$ 为 $\mathbb{F}_v$ 的代数闭域, $\mathbb{F}_{ur}$ 为 $\mathbb{F}_v$ 的最大非分歧扩域, 则 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{ur}/\mathbb{F}_v)$ 同构于 $\Pi_p\mathbb{Z}_p=\hat{\mathbb{Z}}$. 定义 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)\xrightarrow{\sigma}\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{ur}/\mathbb{F}_v)$ 为从 $\bar{\mathbb{F}}_v$ 到 $\mathbb{F}_v$ 的限制. 记 $\mathbb{Z}$ 为 $\hat{\mathbb{Z}}\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{ur}/\mathbb{F}_v)$ 由 Frobenius 元素 $\mathbb{F}_r$ 生成的无限循环子群, 则 Weil 群 $W_{\mathbb{F}_v}$ 为 $\mathbb{Z}$ 在这个 σ 下的逆像, 而 Weil-Deligne 群 $W'_{\mathbb{F}_v}$ 为 $W_{\mathbb{F}}$ 与 $\mathbb{C}$ 的一个半直积. 利用群 G 的根系, 可以定义群 G 的 L 群 ${}^LG$[4]. L 群为一个复可简约群 ${}^LG^0$ 半直积一个 Galois 群：${}^LG={}^L(G/\mathbb{F})={}^LG^0\rtimes\Gamma_{\mathbb{F}}$,其中$\Gamma_{\mathbb{F}}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. 例如 ${}^L(GL_n/\mathbb{F})=GL_n(\mathbb{C})\rtimes\Gamma_{\mathbb{F}}$.

局部 Langlands 对应猜想指出 $G(\mathbb{F}_v)$ 所有可容许不可约表示可被分拆成有限非空子集“L 小包”, 而这些 L 小包均可用从 $W_{\mathbb{F}_v}$ 或 $W'_{\mathbb{F}_v}$ 到 ${}^LG$ 的连续同态唯一描述. GL_2 的局部 Langlands 猜想由 Kutzko[27] 证明. GL_n 的局部 Langlands 猜想由 Harris-Taylor[13] 与 Henniart[14] 独立证明. 对于一般线性可简约代数群, 这个猜想尚未得以证明.

局部 Langlands 对应可以用来构造局部 Langlands L 因子 $L(s,\pi_v)$, 从而定义 L 函数：

$$L(s,\pi)=\Pi_{v\text{有限}}L(s,\pi_v),\Lambda(s,\pi)=\Pi_{\text{所有}v}L(s,\pi_v).$$

Langlands[33] 证明了对于自守尖点表示 π, 定义 $L(s,\pi)$ 与 $\Lambda(s,\pi)$ 的无穷乘积当 $\mathrm{Re}s$ 充分大时收敛.

Godement-Jacquet[10] 亦定义了 L 函数 L^{GJ} 与 Λ^{GJ}, 其方法不同于以上局部 Langlands 对应的方法. L^{GJ} 与 Λ^{GJ} 有很好的解析性质与函数方程. 由局部 Langlands 猜想的证明可得出对于 GL_n, 它们与 $L(s,\pi)$、$\Lambda(s,\pi)$ 相等.

Langlands 对 Artin 猜想的重新表述可以写作 Langlands 互反律猜想：设 σ 为 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ 或相对 Weil 群到 ${}^LG$ 的一个连续同态. 这样的 σ 的等价类应该与群 G

的自守表示 π 对应, 并有着同样的 L 函数 $L(s,\sigma)=L^{GJ}(s,\pi)$[4]. 对于 $G=GL_n$, Langlands 互反律猜想当 $n=1$ 时即为类域论. 当 $n=2$ 时, 如果 Galois 群的二维表示是四面体群或八面体群的类型, 这个猜想被 Langlands[30] 与 Tunnell[44] 证明. 而当这个二维表示为二十面体类型, 或当 G 不是 GL_1, GL_2 时, Langlands 互反律猜想仍然未知.

利用 L 群的概念, Langlands 函子性猜想可作如下描述. 设 G 与 H 为域 $\mathbb{F}$ 上两个可简约线性代数群, G 为拟分裂的. 设 $\psi: {}^LH\to {}^LG$ 为一个 L 同态. 这里一个连续同态 $\psi: {}^LH\to {}^LG$ 被称为一个 L 同态, 如果 $\psi|{}^LH^0$ 是一个复解析同态: ${}^LH^0\to {}^LG^0$. 对于 $\mathbb{F}$ 的任意赋值 v, 设 ψ_v 为 ψ 限制到 ${}^L(H(\mathbb{F}_v))\to {}^L(G(\mathbb{F}_v))$ 的映射. 利用局部 Langlands 猜想, 设 $(\psi_v)_*$ 为从 $H(\mathbb{F}_v)$ 的局部群表示到 $G(\mathbb{F}_v)$ 的局部群表示的对应. 设 $\pi=\otimes_v\pi_v$ 为 $H(\mathbb{F}_\mathbb{A})$ 的一个自守表示. Langlands 猜想利用 $\Pi_v\in(\psi_v)_*(\pi_v)$ 可以构造一个 $G(\mathbb{F}_\mathbb{A})$ 的自守表示 $\Pi=\otimes_v\Pi_v$. 同时有问题：当 π 为自守尖点表示时, 在什么条件下 Π 亦为尖点表示?

例一, 设 $H=\{1\}, G=GL_n$, 则 ${}^LH=\{1\}\rtimes\Gamma_\mathbb{F}, {}^LG=GL_n(\mathbb{C})\rtimes\Gamma_\mathbb{F}$. 又设 σ 为 $\Gamma_\mathbb{F}$ 的一个 n 维复表示, $\sigma:\Gamma_\mathbb{F}\to GL_n(\mathbb{C})$. 定义 L 同态 $\psi(1,\gamma)=(\sigma(\gamma),\gamma), \gamma\in\Gamma_\mathbb{F}$. 对于这个 L 同态, 函子性猜想就是 Langlands 互反律猜想.

例二, 设 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{F}$ 的一个 m 阶 Galois 扩域, 设 H 为 $\mathbb{F}$ 分裂. 又设 $G=R_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}H$, 即 G 由 H 从 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{F}$ 限制基域而得出, $G(\mathbb{F})=H(\mathbb{E})$. 则 ${}^LH={}^LH^0\rtimes\Gamma_\mathbb{F}$,

$$ {}^LG=(\underbrace{{}^LH^0\times\cdots\times{}^LH^0}_{m\text{ 个}})\rtimes\Gamma_\mathbb{F}. $$

定义 L 同态 $\psi: {}^LH\to {}^LG, \psi(x,\gamma)=(x,\cdots,x,\gamma), x\in {}^LH^0, \gamma\in\Gamma_\mathbb{F}$, 其在 ${}^LH^0$ 上为对角线映射. 对这个 ψ 的函子性叫作基变换.

当 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{F}$ 的可解 Galois 扩域时, $H=GL_2$ 的基变换由 Saitō[40] 与 Langlands[30] 证明, $H=GL_n$ 的基变换由 Arthur-Clozel[1] 证明. 当 $\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{F}$ 的二次扩域时, GL_n 的基变换可以由某个 L 函数在 $s=1$ 点的解析性质来描述, 或由群表示空间的函数在酉群上的积分来描述. 这种二次扩域基变换的存在与描述, 由 Jacquet et. al(1986-2005) 利用相对迹公式证明. 当 $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ 非可解时, 或当 H 非 GL_n 时, 基变换的存在仍然未知.

例三, 设 $H=GL_2, G=GL_{m+1}$, 则 ${}^LH=GL_2(\mathbb{C})\rtimes\Gamma_\mathbb{F}, {}^LG=GL_{m+1}(\mathbb{C})\rtimes\Gamma_\mathbb{F}$. 记 $\mathrm{Sym}^m: GL_2(\mathbb{C})\to GL_{m+1}(\mathbb{C})$ 为群 $GL_2(\mathbb{C})$ 的 m 次对称幂表示, 其作用在 m 次对称张量空间上. 则 L 同态 $\psi: {}^LH\to {}^LG, \psi(x,\gamma)=(\mathrm{Sym}^m x,\gamma)$ 预见了从 GL_2 自守表示 π 到 GL_{m+1} 自守表示 $\mathrm{Sym}^m\pi$ 的函子性, 并且当 π 是尖点表示时, $\mathrm{Sym}^m\pi$ 除特殊情况外亦为尖点表示, $L(s,\mathrm{Sym}^m\pi)$ 为全纯函数.

对于 $\mathrm{Sym}^2\pi$, Shimura[42] 证明了 $L(s,\mathrm{Sym}^2\pi)$ 为全纯. Gelbart-Jacquet[9] 证明

了 $\mathrm{Sym}^2\pi$ 的函子性并确定了 $\mathrm{Sym}^2\pi$ 为尖点表示当且仅当 π 非二面体型. 对于 $\mathrm{Sym}^3\pi$, 其函子性与尖点表示的条件由 Kim-Shahidi[25] 证明. $\mathrm{Sym}^4\pi$ 的函子性为 Kim[22] 证明, 其尖点表示条件由 Kim-Shahidi[24] 得出.

利用 $\mathrm{Sym}^4\pi$ 的函子性, Kim-Sarnak[23] 证明了对 $GL_2(\mathbb{Q}_{\mathbb{A}})$ 的尖点表示 π, 当 π_p 为非分歧的时候, $|\alpha_\pi(j,p)| \leqslant p^{7/64}$; 当 π_∞ 为非分歧时, $|\mathrm{Re}\mu_\pi(j)| \leqslant 7/64$. 这里 $\alpha_\pi(j,p), \mu_\pi(j), j=1,2$, 由 π 的 L 函数给出:

$$\Lambda(s,\pi) = L(s,\pi_\infty)L(s,\pi), \qquad L(s,\pi_\infty) = \prod_{j=1}^{2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_\pi(j)),$$

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \qquad L(s,\pi) = \prod_p L(s,\pi_p),$$

$$L(s,\pi_p) = \prod_{j=1}^{2}(1-\alpha_\pi(j,p)p^{-s})^{-1}.$$

同时他们还证明了对于同余子群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$, 上半平面 $\mathbb{H}$ 模 Γ 上的非欧 Laplace 算子的第一个正特征值 $\lambda_1 \geqslant 1/4 - (7/64)^2$.

对于 GL_n 的广义 Ramanujan 猜想预见 $|\alpha_\pi(j,p)| = 1, \mathrm{Re}\mu_\pi(j) = 0, j = 1,\cdots,n$, 当 π_p 与 π_∞ 为非分歧时成立. 如果对任意 $m, \mathrm{Sym}^m\pi$ 的函子性能够建立, 则 GL_2 的广义 Ramanujan 猜想就得以证明. Selberg 特征值猜想预见 $\lambda_1 \geqslant 1/4$, 上述 $\lambda_1 \geqslant 1/4 - (7/64)^2$ 亦为迄今最好的结果.

对任意 $m, \mathrm{Sym}^m\pi$ 的函子性还可以推出对 GL_n 自守表示 π 的 Lindelöf 猜想:

$$L(1/2+it,\pi) \ll_\varepsilon c(\pi,t)^\varepsilon,$$

这里[16]

$$c(\pi,t) = N_\pi \prod_{j=1}^{n}\prod_{v=\infty}(1+|\mu_\pi(j,v)+it|^{d(v)})$$

为 $L(s,\pi)$ 的解析前导子, N_π 由 $L(s,\pi)$ 的函数方程 $\Lambda(1-s,\tilde{\pi}) = \bar{\varepsilon}_\pi N_\pi^{s-1/2}\Lambda(s,\pi)$ 给出, $\tilde{\pi}$ 为 π 的逆步表示, $|\varepsilon_\pi| = 1, d(v) = 1$ 如果 $\mathbb{F}_v = \mathbb{R}$, $d(v) = 2$ 如果 $\mathbb{F}_v = \mathbb{C}$.

$L(1/2+it,\pi)$ 的平凡上界可由 Phragmén-Lindelöf 凸性原理推出, 故称为凸性界:

$$L(1/2+it,\pi) \ll_\varepsilon c(\pi,t)^{1/4+\varepsilon}.$$

超越凸性界的非平凡上界称作次凸性界. 对于 GL_2 尖点表示, $L(1/2+it,\pi)$ 的次凸性界在 t 的方面由 Good[11] 与 Meuramn[36] 得出, 在谱 $\mu_\pi(j)$ 的方面由 Ivić[15] 与 Peng[38] 得出, 在 t 与 $\mu_\pi(j)$ 同时由 Jutila-Motohashi[19] 得出, 在前导子 N_π 方面由 Duke-Friedlander-Iwaniec[8] 得出. 这些次凸性界最好的指数可以达到 $1/3+\varepsilon$.

$GL_4 L$ 函数的次凸性界结果仅限于 Rankin-Selberg L 函数 $L(s, f\times g)$, 其中 f 与 g 为尖点形式, g 固定. 在 $\mu_f(j)$ 方面的次凸性界由 Sarnak[41] 与 Lau 等 [34] 得

出, 在 t 与 $\mu_f(j)$ 方面由 Jutila-Motohashi[20] 得出, 在前导子 N_f 方面, 由 Kowalski-Michel-VanderKam[26], Michel[37], Harcos-Michel[12] 得出. 这里在 $\mu_f(j)$ 方面最好的上界亦为 $1/3+\varepsilon$. 前导子 N_f 方面的次凸性界可以用来解决 $\mathbb{Q}$ 上某一类 Shimura 曲线上 Heegner 点的不完全轨道的一致分布问题[47].

GL_8L 函数的次凸性界结果仅限于三重乘积 L 函数 $L(s,f\times g\times h)$, 其中 f,g,h 均为尖点形式. 当 f 为二面体尖点形式时, $L(1/2+it,f\times f\times h)$ 的次凸性界由 Sarnak[41] 与 Lau 等 [34] 得出. 这个结果可用来推出测度 $|f(z)|^2dxdy/y^2$ 在 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上的一致分布性, 在量子物理上有重要的应用. 当 g 与 h 固定时, $L(1/2+it,f\times g\times h)$ 对于 $\mu_f(j)$ 的次凸性界由 Bernstein-Reznikov[3] 得出.

对于其他的 L 函数, 未知次凸性界.

参 考 文 献

[1] Arthur J, Clozel L. Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula. Princeton: Princeton University Press, 1989

[2] Artin E. Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper (German). Math Ann, 1923, 89: 147-156

[3] Bernstein J, Reznikov A. Periods, subconvexity of L-functions and representation theory. J Diff Geom, 2005, 70: 129-141

[4] Borel A. Automorphic L-functions. Proc Sympos Pure Math, 1979, XXXIII: 27-61

[5] Breuil C, Conrad B, Diamond F and Taylor R. On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises. J AMS, 2001, 14: 843-939

[6] Deligne P. La conjecture de Weil I (French). Inst Hautes études Sci Publ Math, 1974, No. 43: 273-307

[7] Drinfeld V G. Langlands' conjecture for GL(2) over functional fields. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1978, 565-574

[8] Duke W, Friedlander J and Iwaniec H. Bounds for automorphic L-functions. Invent Math, 1993, 112: 1-8

[9] Gelbart S, Jacquet H. A relation between automorphic representations of GL_2 and GL_3. Ann Sci École Norm Sup, 1978, 11(4): 471-542

[10] Godement R, Jacquet H. Zeta Functions of Simple Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1972

[11] Good A. Cusp forms and eigenfunctions of the Laplacian. Math Ann, 1981, 255: 523-548

[12] Harcos G, Michel P. The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II, Invent Math, 2006, 163: 581-655

[13] Harris M, Taylor R. The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties. Princeton: Princeton University Press, 2001

[14] Henniart G. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique (French). Invent Math, 2000, 139: 439-455

[15] Ivić A. On sums of Hecke series in short intervals. J Th Nombres Bordeaux, 2001, 13: 453-468

[16] Iwaniec H, Sarnak P. Perspectives on the analytic theory of L-functions. Geom Funct Anal, 2000, 705-741

[17] Jacquet H. Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley (French). Bull Soc Math France, 1967, 95: 243-309

[18] Jacquet H, Langlands R P. Automorphic Forms on GL(2). Berlin: Springer-Verlag, 1970

[19] Jutila M, Motohashi Y. Uniform bound for Hecke L-functions. Acta Math, 2005, 195: 61-115

[20] Jutila M, Motohashi Y. Uniform bounds for Rankin-Selberg L-functions // Multiple Dirichlet series, automorphic forms, and analytic number theory. Proc Sympos Pure Math, 2006, 243-256

[21] Katz N M. An overview of Deligne's work on Hilbert's twenty-first problem. Proc Sympos Pure Math AMS, 1976, XXVIII: 537-557

[22] Kim H H. Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2. J AMS, 2003, 16: 139-183

[23] Kim H, Sarnak P. Appendix 2: refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures. Journal of the American Mathematical Society, 2003, 16: 175-181

[24] Kim H H, Shahidi F. Cuspidality of symmetric powers with applications. Duke Math J, 2002, 112: 177-197

[25] Kim H H, Shahidi F. Functorial products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2. Ann of Math, 2002, 155(2): 837-893

[26] Kowalski E, Michel P and VanderKam J. Rankin-Selberg L-functions in the level aspect. Duke Math J, 2002, 114: 123-191

[27] Kutzko P. The Langlands conjecture for GL_2 of a local field. Ann of Math, 1980, 112(2): 381-412

[28] Lafforgue L. Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands (French). Invent Math, 2002, 147: 1-241

[29] Langlands R P. Automorphic representations. Shimura varieties and motives Proc Symp Pure Math, 1979, XXXIII: 205-246

[30] Langlands R P. Base Change for GL(2). Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1980

[31] Langlands R P. Euler Products. Yale University Press, New Haven, Conn London, 1971

[32] Langlands R P. http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/

[33] Langlands R P. Problems in the Theory of Automorphic Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1970

[34] Lau et al. A new bound $k^{2/3+\epsilon}$ for Rankin-Selberg L-functions for Hecke congruence subgroups. IMRP Int Math Res Pap, 2006, 1-78

[35] Laumon G. Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions (French). Duke Math J, 1987, 54: 309-359

[36] Meurman T. On the order of the Maass L-function on the critical line // Number Theory. I(1987), Colloq Math Soc János Bolyai, 1990, 325-354

[37] Michel P. The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. Ann of Math, 2004, 160(2): 185-236

[38] Peng Z. Zeros and central values of automorphic L-functions. Ph D thesis. New Jersey: Princeton University, 2001

[39] Sabbagh K. The Riemann Hypothesis. The Greatest Unsolved Problem in Mathematics. New York: Farrar, Straus and Giroux, 2003

[40] Saitō Y. Eigenfunction expansions for differential operators with operator-valued coefficients and their applications to the Schrödinger operators with long-range potentials // International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Kyoto Univ, 1975, 476-482

[41] Sarnak P. Estimates for Rankin-Selberg L-functions and quantum unique ergodicity. J Funct Anal, 2001, 184: 419-453

[42] Shimura G. On the holomorphy of certain Dirichlet series. Proc London Math Soc, 1975, 31(3): 79-98

[43] Taylor R, Wiles A. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann of Math, 1995, 141(2): 553-572

[44] Tunnell J. Artin's conjecture for representations of octahedral type. Bull AMS, 1981, 5: 173-175

[45] Weil A. Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull AMS, 1949, 55: 497-508

[46] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann of Math, 1995, 141(2): 443-551

[47] Shou-Wu Zhang. Gross-Zagier formula for GL(2). II // Heegner Points and Rankin L-series, Math Sci Res Inst Publ, Cambridge Univ Press, 2004, 191-214

撰稿人：[1] 叶扬波 [2] 刘建亚

1 The University of Iowa

2 山东大学

类数 1 实二次域的高斯猜想

Gauss Conjecture on Real Quadratic Number Fields with Class Number One

高斯在 1801 年出版的《数论研究》(Disquisitions Arithmeticae) 一书的第五章中系统地讨论了二次型表示整数的问题, 对于给定的不全为零的整数 a,b,c, 不定方程 $ax^2+bxy+cy^2=n$ 对哪些整数 n 方程有整数解 (x,y). 这个问题起源于费马 (Fermat) 在 17 世纪的一个猜想：每个被 4 除余 1 的素数 p 都可表示为两个整数的平方和, 即方程 $x^2+y^2=p$ 必有整数解. 高斯把这个方程写成 $p=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$, 然后考虑所有形如 $a+\mathrm{i}b$ 的复数, 其中 a 和 b 都是整数 (后人称这样的复数为高斯整数). 所有高斯整数组成的集合 $Z[\mathrm{i}]$ 是一个 (交换) 环, 后人称为高斯整数环 (其中 Z 表示通常整数形成的环). 高斯把通常整数环 Z 中素数的定义推广到环 $Z[\mathrm{i}]$ 中, 后人称为高斯素数：一个高斯整数 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 是高斯素数, 是指 α 不为 $0,\pm1$ 和 $\pm\mathrm{i}$, 并且 α 不是绝对值均小于 $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$ 的两个高斯整数的乘积. 利用这些概念, 上述费马猜想可以表述为：每个被 4 除余 1 的素数 p 都不是高斯素数 (即 p 为两个共轭的高斯素数的乘积). 高斯发现在环 $Z[\mathrm{i}]$ 中也有唯一分解性质, 即每个高斯整数 $\alpha(|\alpha|\geqslant 2)$ 均可表示成有限个高斯素数的乘积, 并且表示法本质上是唯一的. 利用环 $Z[\mathrm{i}]$ 的这个性质, 高斯不仅证明了费马的上述猜想, 而且完全决定了对哪些正整数 n, 方程 $x^2+y^2=n$ 有整数解, 甚至还决定了整数解 (x,y) 的个数.

高斯整数环 $Z[\mathrm{i}]$ 的分式域是 $Q[\mathrm{i}]=Q[\sqrt{-1}]$, 它是有理数域 Q 的二次扩域, 即实二次数域. 在研究任意不定方程 $ax^2+bxy+cy^2=n$ 的整数解时, 需要研究一般的二次数域 $K=Q[\sqrt{d}]$, 其中 d 为整数, $d\neq 1$ 并且 d 不被任何素数 p 的平方所除尽. 二次数域 K 的代数整数环为 $O_K=Z[d]$(当 $d\equiv 2,3(\bmod 4)$ 时), 或 $Z\left[\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ (当 $d\equiv 1(\bmod 4)$ 时). 高斯的问题是：对哪些二次数域 $K=Q[\sqrt{d}]$, 环 O_K 具有唯一因子分解性质？

当 $d>0$ 时, $K=Q[\sqrt{d}]$ 叫做实二次域 (因为 K 是实数域的子域), 当 $d<0$ 时, K 叫虚二次域. 高斯发现 $d=-1,-2,-3,-7,-11,-19,-43,-67$ 和 -163 时, O_K 具有唯一因子分解性质, 并且再没有发现其他虚二次域有此性质. 而对于实二次域 K, 发现有许多 O_K 具有唯一因子分解性质. 于是他提出如下的猜想：

(I) 只有上述 9 个虚二次域 K, O_K 具有唯一因子分解性质;

(II) 存在无穷多个实二次域 K, 使得 O_K 具有唯一因子分解性质.

高斯的这项研究成为数论的一个新分支代数数论的起点. 代数数论研究代数数域 (即有理数域的有限次扩域, 简称为数域) 和它的 (代数) 整数环 O_K 的性质. 数域 K 中的分式理想群 $I(K)$ 有一个子群 $P(K)$, 叫做主分式理想群, 商群 $C(K) = I(K)/P(K)$ 叫做数域 K 的理想类群 (简称为类群), 这是一个有限交换群. 群 $C(K)$ 的阶数 $h(K) = |C(K)|$ 叫做数域 K 的理想类数 (简称为类数). 可以证明：$h(K) = 1$ 当且仅当环 O_K 中每个理想都是主理想, 也当且仅当 O_K 具有唯一因子分解性质. 于是, 高斯上述两个猜想可以重新叙述为：

(I$'$) 类数为 1 的虚二次域只有 9 个;

(II$''$) 类数为 1 的实二次域有无穷多个.

猜想 (I$'$) 于 1967 年由英国数学家 Baker 和美国数学家 Stark 分别独立给予证明. 前者使用了超越数论的工具, 而后者则采用了模形式理论中的深刻结果. 而高斯关于实二次域的猜想 (II$''$) 至今未能解决.

代数数域的类群和类数问题是经典代数数论的核心问题之一. 1983 年, H.Cohen 和 H.W.Lenstra 甚至提出了更大胆的猜想：对于许多种类型的数域, 对于给定的有限交换群 G, 在判别式 $D(K) \leqslant x$ 的所有这类数域中, 类群为 G 的所占比例当 $x \to +\infty$ 时存在极限 α, 并且它们给出非负实数 α 的猜想值. 大量数据计算支持他们的猜想的正确性. 以实二次域 $K = Q[\sqrt{d}]$ 为例, 它的判别式为 $D(K) = 4d$(当 $d \equiv 2, 3 (\mathrm{mod} 4)$ 时), 或 $D(K) = d$(当 $d \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ 时). 高斯已经证明了当 $D(K)$ 不是素数时, K 的类数为偶数, 从而 $h(K) \geqslant 2$. 按照 Cohen-Lenstra 猜想, 当 $D(K)$ 通过所有的素数时, 所有 $D(K) \leqslant x$ 的实二次域当中类数为 1 的比例 (当 $x \to +\infty$ 时存在极限值) 为 76%. 在 H.Cohen 和 H.W.Lenstra 提出猜想的时候, 只知道对实三次域的一种情形这个猜想是正确的. 目前, 已经证明了这个猜想对许多情形是对的[2], 但是对实二次域的情形仍没有本质性的突破.

参 考 文 献

[1] Cohen H. Advanced Topics in Computational Number Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2000

[2] Cohen H. Constructing and counting number fields. Proceeding of the ICM(Beijing, 2002), Vol.II: Invited lectures. Beijing: Higher Education Press, 2002, 129-138

[3] Cohen H and Lenstra Jr H W. Heuristics on class groups of number fields. Number theory. Noordwijkerhout(1983). Berlin: Springer-Verlag, 1984, 33-62

撰稿人：冯克勤
清华大学

黎曼 (Riemann)zeta 函数在奇正整数点处值的超越性

Transcendence of Values of Riemann Zeta Function
at Odd Positive Integers

黎曼 zeta 函数在奇正整数点处值的超越性猜想是超越数论发展过程中的重要问题之一.

不满足任何非零有理系数多项式方程的实数或复数被称为超越数. 超越数论是现代数论的重要分支和组成部分, 在数学的其他分支和领域均有重要的应用. 该理论有着非常悠久的历史, 最早的研究可追溯到法国数学家 Liouville 在 1844 年的工作. 超越数论早期的标志性成果是 Hermite 在 1873 年所证明的 e 的超越性以及 Lindemman 在 1882 年所证明的 π 的超越性, 后者还导致了著名的古希腊化圆为方问题的解决, 而 Hilbert 的 23 个问题中的第 7 个问题就是关于超越数论的. 经过许多数学工作者的不懈努力, 超越数论目前已发展得十分深刻和丰富, 与丢番图几何的交汇和融合更是其当前发展的一个显著特点和趋势, 但悬而未解的问题还有很多, 而黎曼 zeta 函数值的超越性问题则是其中最为著名的问题之一.

对任意实数 $s>1$, 定义

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^s}.$$

这就是著名的黎曼 zeta 函数. Euler 在 18 世纪就是借助该函数得到了素数个数无限性的一个漂亮证明. 而 Riemann 则在 1859 年创造性地将之解析延拓成复变量函数使之成为数论特别是解析数论中最基本的算术函数之一. 可以证明, 对任意整数 $n\geqslant 1$, 都有 $\zeta(2n)=b_n\pi^{2n}$, 其中 b_n 为非零有理数. 由此立刻可知 $\zeta(2n)$ 为超越数. 于是人们自然会猜想:

对任意整数 $n\geqslant 1$, $\zeta(2n+1)$ 也为超越数.

Apéry 在 1978 年证明了 $\zeta(3)$ 为无理数, 但直到 2000 年, Rivoal 才证明了有无数多个 $\zeta(2n+1)$ 为无理数. 后者还证明了在 $\zeta(5),\zeta(7),\cdots,\zeta(21)$ 这 9 个数中至少有一个为无理数, 而 Zudilin 则将之改进成前八个数中至少有一个为无理数. 然而到目前为止, 人们还不知道这些数中是否有一个是超越的, 现有的工具和方法暂时还无法让人看到一线曙光, 必须要有全新的思想和手段.

参 考 文 献

[1] Baker A. Transcendental Number Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[2] Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques. C R, 1844, 18: 883-885, 910-911

[3] Rivoal T. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 2000, 331: 267-270

[4] Waldschmidt M. Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Berlin: Springer-Verlag, 2000

[5] Waldschmidt M. Un demi-siècle de transcendance. Development of mathematics, 1950-2000, 1121-1186, Birkhäuser, Basel, 2000

撰稿人：姚家燕
清华大学

黎曼 (Riemann) 猜想

Riemann Conjecture



黎曼

黎曼猜想是解析数论中最重要的猜想之一, 它是关于黎曼 zeta 函数零点分布的一个假设, 研究黎曼猜想的目的是为了研究素数的分布规律.

由算术基本定理可知, 每个正整数都可以表示成素数因子的乘积, 如果不考虑素数因子的排列顺序, 那么这种表示是唯一的. 因此, 素数构成了正整数的基本元素, 只有弄清楚素数的分布规律, 才能对于正整数有更深入的了解. 所以, 研究素数的分布规律是解析数论的基本任务.

从素数表中我们可以看出, 单个的素数是很难找到规律的, 只有在平均或统计的意义之下, 素数才会呈现出某种规律性. 在解析数论中, 人们通常研究函数 $\pi(x)$, 它表示不超过 x 的素数的个数. 当 x 充分大时, 关于 $\pi(x)$ 性态的研究是解析数论的中心问题之一.

为了推断 $\pi(x)$ 的规律, 大数学家高斯和 Legendre 都做过大量的数值计算. 他们分别猜测, 当 $x\to\infty$ 时, $\pi(x)\sim x/\ln x$, 这里 "$\sim$" 表示两个函数之比趋向 1, $\ln x$ 为 x 的自然对数. 这个猜测后来被证明, 人们称之为素数定理.

欧几里得用初等方法证明了素数有无穷多个, 即当 $x\to\infty$ 时, $\pi(x)\to\infty$. 但是, 如果研究仅局限在整数或有理数的范围里, 那么, 工具只有加、减、乘、除, 很难得出深刻的结论. 因此, 人们试图在实数的范围里用高级的工具来处理问题.

欧拉引入了一个乘积公式：当 $x>1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^x}\right)^{-1},$$

其中乘积里的 p 跑遍所有素数. 欧拉乘积公式实质上是算术基本定理的解析表达形式, 它为用微积分或实分析研究整数问题提供了可能性.

大约在 1850 年前后, 俄国数学家 Chebyshev 对于 $\pi(x)$ 的研究取得了重要的突破. 他证明了存在着两个正的常数 $c_1(<1)$ 和 $c_2(>1)$, 使得 $c_1x/\ln x\leqslant\pi(x)\leqslant c_2x/\ln x$. Chebyshev 运用了实分析中的有力工具, 进一步发展他的方法可以改善常数 c_1 和 c_2, 但却无法达到 1, 就是说 Chebyshev 的方法无法证明素数定理.

1859 年, 德国数学家黎曼发表了题为《论不超过一个给定值的素数的个数》的文章, 他将 $\pi(x)$ 与一个复变函数的零点联系起来, 对于这些零点的分布他提出了一个假设, 这就是后来非常有名的黎曼猜想. 黎曼将研究从实直线提升到复平面, 使得复分析中的许多工具得以应用, 从而为 $\pi(x)$ 的研究开辟了一条新的途径. 下面我们简单地叙述黎曼的作法.

首先, 黎曼将欧拉乘积公式中无穷级数里的实指数 x 替换为复指数 s. 用 $\mathrm{Re}(s)$ 记 s 的实部, $\mathrm{Im}(s)$ 记 s 的虚部. 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时, 黎曼引入函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

它后来被称为黎曼 zeta 函数. 这个级数是绝对收敛的, 因而当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时, 它是 s 的解析函数, 而且欧拉乘积公式仍然成立.

黎曼将 $\zeta(s)$ 解析延拓到整个复平面, 除在 $s=1$ 有一阶极点之外, $\zeta(s)$ 处处解析. $s=-2,-4,-6,\cdots$ 是 $\zeta(s)$ 的一阶零点, 称为显然零点. 其余的零点均在带状区域 $0\leqslant\mathrm{Re}(s)\leqslant 1$ 中, 称为非显然零点, 这个区域称为临界区域. 由 $\zeta(s)$ 的函数方程知, 非显然零点关于直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 对称, 这条直线称为临界直线. 黎曼猜想, $\zeta(s)$ 全部的非显然零点均在临界直线上.

经过大量计算所得到的所有非显然零点均在临界直线上, 但理论上的进展甚微. 目前最好的结果是, 如果 $s=\sigma+\mathrm{i}t$, 则在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{\ln^{2/3}(|t|+2)\ln\ln^{1/3}(|t|+10)}$$

中, $\zeta(s)$ 没有零点. 这个结果与黎曼猜想相差太远, 其原因在于, 虽然 $\zeta(s)$ 可以解析延拓到临界区域, 但它在这个区域中的表达式太差, 难以有效地确定零点的位置.

其次, 运用复分析中的一些基本方法, 可以得到表达式

$$\sum_{p\leqslant x}\ln p=x-\sum_{|Im(\rho)|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+\text{ 次要的余项},$$

其中 p 为素数, ρ 为 $\zeta(s)$ 的非显然零点, $2\leqslant T\leqslant x$. 这样, 关于素数的一个和式就与 $\zeta(s)$ 的非显然零点联系起来, 由这个和式容易推出关于 $\pi(x)$ 的结论. 从表达式中可以看出, $\mathrm{Re}(\rho)$ 越小, 则余项的估计就越好. 因此, 研究 $\zeta(s)$ 零点的分布对于研究素数的分布规律是非常重要的.

正是沿着黎曼所指引的方向, 1896 年, 法国数学家 Hadamard 和 Vallée Poussin 独立地证明了 $\mathrm{Re}(\rho)<1$, 并由此推出素数定理. 关于 $\pi(x)$, 目前可以做到

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}+O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right),$$

其中 A 为任意大的常数, 这里的余项还可以好一点, 但好不过 $O(x^{1-\varepsilon})$.

在黎曼猜想下, 可以得到

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\right).$$

反过来讲, 由这个渐近公式也可以推出黎曼猜想, 这就是说, 素数分布的某种规律也蕴含了复变函数 $\zeta(s)$ 零点分布的重要信息. 因此, 黎曼猜想与素数分布的关系是非常紧密的.

在研究与素数分布有关的课题时, 人们常常在黎曼猜想下得出一个结果, 然后再做无条件的结果. 在目前所得到的无条件结果中, 只有极少数与在黎曼猜想下得到的结果一样, 而绝大多数还相差甚远. 即使在无条件结果的证明里, 也要大量地用到 $\zeta(s)$ 的各种性质, 比如, $\zeta(s)$ 零点不存在的区域, $\zeta(s)$ 在临界长条上函数值的上界估计和均值估计等等. 因此, 关于 $\zeta(s)$ 研究的每一次实质性进展, 都会给素数分布理论带来很大的影响和推动.

在黎曼猜想提出后的一百多年当中, 它一直是数学界所关心的最重要的问题之一, 解决黎曼猜想是许多著名数学家梦寐以求的事情. 如今, 黎曼猜想作为千禧问题之一推荐给 21 世纪的数学家, 它也将受到广泛的重视和喜爱.

参 考 文 献

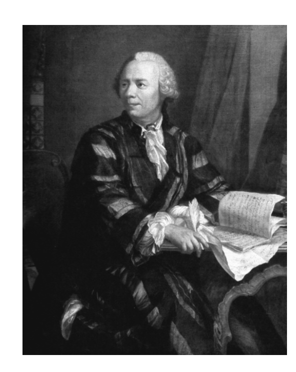
[1] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1997

撰稿人：贾朝华
中国科学院数学与系统科学研究院

欧拉常数的超越性

Transcendence of The Euler's Constant

欧拉常数的超越性问题是超越数论发展中最为著名和古老的问题之一.



欧拉

不满足任何首 1 的整系数多项式方程的实数或复数被称为超越数. 超越数论是现代数论的重要分支和组成部分, 在数学的其他分支和领域均有极其重要的应用. 该理论有着非常悠久的历史, 最早的研究可追溯到法国数学家 Liouville 在 1844 年的工作, 而著名的 Hilbert 的 23 个问题中的第 7 个问题就是关于超越数论的. 在超越数论发展的初期, 人们对一些著名的常数比较感兴趣, 其标志性成果是 Hermite 在 1873 年所证明的 e 的超越性, 以及 Lindemman 在 1882 年所证明的 π 的超越性, 后者还导致了著名的古希腊化圆为方问题的解决. 经过许多数学工作者的不懈努力, 超越数论目前已发展得十分深刻和丰富, 与丢番图几何的交汇和融合更是其当前发展的一个显著特点和趋势, 但悬而未解的问题还有很多, 欧拉常数的超越性问题就是其早期研究中遗留下来的最为著名的问题之一.

对任意的整数 $n \geqslant 1$, 定义 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. 由柯西判别准则可知序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 收敛于某个实数 γ. 该常数 γ 最初由欧拉在 1734 年引入, 因此通常被称为欧拉常数. 可以证明 $\gamma \approx 0.577215664\cdots$. 欧拉常数 γ 在数论 (特别是解析数论) 和分析中起着十分重要的作用. 比如说, 关于素数分布的 Mertens 公式就是

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \quad (x \geqslant 2),$$

其中 $p \geqslant 2$ 为素数. 基于该常数的重要性以及有关的各种数值计算, 人们猜想:

欧拉常数为无理数, 甚至是超越数.

借助于丢番图逼近及其他各种方法和手段, 人们曾对此问题进行过许多有益的尝试但均没有取得任何实质性的进展, 连 γ 是否为无理数均不知道. 事实上, 对该问题研究的任何些微进展都必然伴随着超越数论中的新思想与新方法的涌现. Hilbert 认为该问题是如此难于处理以至数学家们在它面前感到束手无策. 关于欧拉常数,

人们目前所知的结果都是数值上的, 比如说 S. Kondo 将 γ 精确到了 20 亿位, 而 T. Papanikolaou 则证明了若 γ 为既约有理数 r/s, 则其分母 $s > 10^{242080}$.

参 考 文 献

[1] Baker A. Transcendental Number Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[2] Havil J. Gamma: Exploring Euler's Constant. Princeton: Princeton University Press, 2003

[3] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1957

[4] Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques. C. R. 1844, 18: 883-885, 910-911

[5] Waldschmidt M. Un demi-siècle de transcendance. Development of mathematics 1950-2000, 1121-1186, Birkhäuser, Basel, 2000

撰稿人：姚家燕

清华大学

椭圆曲线的 BSD 猜想

The BSD Conjecture on Alliptic Curves

设 a 和 b 是整数, $4a^3+27b^2\neq 0$, 方程 $E: y^2=x^3+ax+b$ 叫作定义在有理数域 Q 上的一条椭圆曲线. 以 $E(Q)$ 表示此曲线上的全部有理数点加上一个无穷远点, 可以在其上引入一个加法运算使 $E(Q)$ 为交换群 (无穷远点为零元素). 英国数学家 Mordell 于 1922 年证明了群 $E(Q)$ 是有限生成的, 从而有直和分解 $E(Q)=E(Q)_f\oplus E(Q)_t$, 其中 $E(Q)_t$ 是 $E(Q)$ 中有限阶元素构成的有限子群; $E(Q)_f$ 是自由交换群, $E(Q)_f$ 的秩也叫作椭圆曲线 E 的秩, 表示成 $r(E)$. 于是 $r(E)$ 为非负整数, 并且 $r(E)=0$ 当且仅当不定方程 $y^2=x^3+ax+b$ 只有有限个有理数解.

关于椭圆曲线有两个大猜想, 一个是谷山 (Taniyama)、志村 (Shimura) 和 A.Weil 于 20 世纪 50 年代和 70 年代从不同角度提出的本质上彼此等价的猜想. 在 A.Wiles 1994 年证明费马猜想的推动之下, 它在 20 世纪末已被证明. 另一个猜想是英国数学家 Birch 和 Swinnerton-Dyer 于 1963-1965 年通过大量计算, 猜想椭圆曲线有理点群 $E(Q)$ 和一个复变函数 (叫 E 的 L 函数) 解析性质之间的联系. 这个猜想至今未能解决, 被认为是 21 世纪的七大数学难题之一.

对于每个素数 p, 如果 $4a^3+27b^2$ 不被 p 除尽, 则 $y^2=x^3+ax+b$ 是定义在有限域 F_p 上的一条椭圆曲线, 以 N_p 表示此方程在 F_p 中的解数 (加上一个无穷远点), 则椭圆曲线 E 的 L 函数定义为 $L(E,s)=\prod\limits_p L_p(E,s)$, 其中当 p 不是 $4a^3+27b^2$ 的素因子时, $L_p(E,s)=(1-(1+p-N_p)p^{-s}+p^{1-2s})^{-1}$; 而当 p 为 $4a^3+27b^2$ 的素因子时, $L_p(E,s)=(1-a_pp^{-s})^{-1}$, 其中 $a_p=0,1$ 或 -1(具体 a_p 值由椭圆曲线 E 更精细的代数几何性质所确定). 由已被证明的谷山 – 志村 –Weil 猜想可知 $L(E,s)$ 可开拓成关于 s 的全纯函数, 并且与某种模形式有密切联系. 以 $R(E)$ 表示 $L(E,s)$ 于点 $s=1$ 的零点阶数, 则 BSD 猜想是说:

(BSD1) $r(E)=R(E)$;

(BSD2) 如果 $R(E)=0$(即 $L(E,1)\neq 0$), 则

$$\frac{L(E,1)}{R(E)}=\frac{M\,|SH(E)|}{|E(Q)_t|^2}, \tag{$*$}$$

其中 $R(E)$ 是椭圆曲线 E 的 (实) 周期, $SH(E)$ 是 E 的 Tate-Shafarevich 群, M 为 E 的玉河 (Tamagawa) 数 (讲述这些对象的含义需要关于椭圆曲线的许多知识, 这里从略).

20 世纪 70 年代以来, BSD 猜想不断取得进展. 关于猜想 (BSD1), J. Coates 和

A. Wiles 于 1977 年证明了：若 $r(E) \geqslant 1$, 则 $R(E) \geqslant 1$(即 $L(E,1)=0$). B. Gross 和 D. Zagier 于 1986 年证明了：若 $R(E)=1$, 则 $r(E) \geqslant 1$. 关于猜想 (BSD2), K. Rubin 于 1987 年证明了：对于有复乘的椭圆曲线, 如果 $R(E)=0$, 则 $(*)$ 式两边都是有理数, 并且它们至多相差一个有理数因子 $2^a 3^b$(其中 $a,b \in Z$). 他们的证明采用了 p-adic 方法、模曲线理论和 Kolywagin 的 Euler system 理论.

与 BSD 有联系的有一个古老的数论问题, 叫作同余数 (congruent number) 问题. 一个正整数 n 叫做同余数, 是指 n 是三边 a,b,c 均为有理数的直角三角形的面积. 例如 $n=6$ 和 5 为同余数, 因为 (a,b,c) 可分别取 $(3,4,5)$ 和 $(3/2,20/3,41/6)$. 不难看出, 对每个正整数 m, $m^2 n$ 是同余数当且仅当 n 是同余数, 从而不妨假设 n 是无平方因子的正整数. 同余数问题即是决定出全部同余数 (其余正整数就是非同余数). 这个问题起源于公元 11 世纪的阿拉伯. 至今已决定出许多同余数和非同余数, 但是整个问题没有完全解决. 同余数问题与椭圆曲线之间的联系是：n 为同余数当且仅当椭圆曲线 $E_n: y^2 = x^3 - n^2 x$ 的秩 $\geqslant 1$, 即此方程有无穷多有理数解. 1983 年, Tunnell 利用此曲线的 L 函数 $L(E_n,s)$ 和模形式之间的关系, 给出判别同余数的一个初等方法：一个无平方因子的正整数 N 是同余数, 当且仅当方程 $2x^2+y^2+8z^2=N$ 的整数解 (x,y,z) 个数为方程 $2x^2+y^2+32z^2=N$ 的整数解的 2 倍. 如果 BSD 猜想对于椭圆曲线 E_n 正确, 则反过来也是对的. 比如说, 人们猜想当 $n \equiv 5,6,7 (\mathrm{mod}\, 8)$ 时一定是同余数. 在这些情况下, 不难看出上述两个不定方程有整数解并且解数相同, 所以这个猜想在 BSD 猜想成立的情况下是正确的.

椭圆曲线是一维的阿贝尔代数簇, BSD 猜想已被推广到高维阿贝尔簇上, 成为算术几何与代数 K- 理论的一个重要研究课题.

参 考 文 献

[1] Birch B J. Conjecture concerning alliptic curves. Theory of Numbers. Proceeding Symp Pure Math AMS, Pasadena(1963), 1965, 8: 106-112

[2] Birch B J, Swinnerton-Dyer H P. Note on elliptic curves I, II, J.reine and angew. MATH, 1963, 21: 7-25, 79-108

[3] Coates J, Wiles A. On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. Invint Math 1997, 39: 223-251

[4] Rubin K. Tate-Shafarevich groups and L-functions of elliptic curves with complex multiplication. Invent Math 1987, 89: 527-560

[5] Gross B H, Zagier D. Heegner points and dirivatives of L-series. Invent Math 1986, 84: 225-320

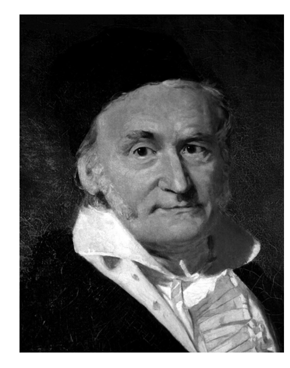
[6] Manin Yu I, Panchishkim A A. Introduction to Modern Number Theory. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, 2005

撰稿人：冯克勤
清华大学

希尔伯特第九问题：高斯二次互反律如何推广

Hilbert Ninth Problem: How to Generalize The Gauss Quadratic Reciprocity Law

设 p 为素数, a 为整数并且 a 不被 p 除尽. a 叫做模 p 的二次剩余, 是指存在整数 b, 使得 $a \equiv b^2 (\mathrm{mod} p)$. 否则, a 叫做模 p 的非二次剩余. Legendre 引入一种符号：当 a 是模 p 的二次剩余时记为 $(a/p) = 1$, 否则记为 $(a/p) = -1$. 高斯在 1801 年《数论研究》一书中证明了：对于任意两个不同的奇素数 p 和 q, $(p/q)(q/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$. 后人称之为高斯二次互反律. 高斯非常喜欢这个互反律, 在书中给出了六个证明. 有人统计, 二次互反律的证明目前已经超过了一百个.



高斯

希尔伯特的第九问题不是一个具体的猜想, 它表明希尔伯特一种洞察的眼光, 认为二次互反律应当有深厚的内涵. 对于高斯互反律的不同观点, 可以有不同的推广方式. 一个直接的推广是将模 p 的二次剩余改成 k 次剩余 ($k \geqslant 3$). 事实上, 早在 1844 年 Eisenstein 就给出三次互反律, Kummer 于 1850-1859 年就研究过 k 次剩余的互反律. 高斯本人也研究过三次和四次互反律. 这个方向上的研究目前还在继续 (在 Lemmermeyer 的书[8] 中有详尽的论述和丰富的参考文献), 统称为 “有理” 互反律, 因为它们都是有理数域 Q 上的互反律. 希尔伯特的主要意图是问：高斯二次互反律以何种方式能够推广到任意的代数数域?

每个代数数域 K 都可以表示成 $Q(\alpha)$, 其中 α 是 $Z[x]$ 中首 1 不可约多项式 $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 的一个根 ($a_i \in Z$), $g(x)$ 的次数 n 就是扩张 K/Q 的次数 (即 K 作为有理数域 Q 上向量空间的维数). $g(x)$ 叫做 α 在 Q 上的最小多项式. 以 O_K 表示 K 中代数整数全体构成的集合, Dedekind 证明了 O_K 是一个 (交换) 整环, 并且有理想的唯一分解性, 即 O_K 中每个非零理想都可以唯一地表成有限个素理想的乘积, 并且若不计素理想的次序, 这个分解是唯一的. 特别的, 每个素数 p 在 O_K 中生成的主理想 pO_K 可以表成 $pO_K = P_1^{e_1} \cdots P_s^{e_s}$, 其中 $P_1, \cdots, P_s$ 是 O_K 的不同的素理想, $e_i \geqslant 1$. 进而, O_K/P_i 是 $F_p = Z/pZ$ 的有限次扩域, 即 O_K/P_i 是 p^{f_i} 元域, f_i 叫做 P_i 的剩余类域扩张次数. 我们称 $[e_1, \cdots, e_s; f_1, \cdots, f_s]$

为素数 p 在 O_K 中的分解模式. 经典代数数论的一个重要问题是：对于一个给定的代数数域 K, 如何由 K 的自身性质来决定每个素数 p 在 O_K 中的分解模式？

经典代数数论的一个结果是说：p 在 O_K 中的分解模式和 α 的最小多项式 $g(x)$ 在有限域 F_p 上的分解模式是一样的. $g(x)$ 在 $Z[x]$ 中是不可约的, 但是把 $g(x)$ 的系数模 p 之后看成是 $F_p = Z/pZ$ 上的多项式, 可以在 $F_p[x]$ 中分解成 $g(x) = g_1(x)^{e_1}\cdots g_s(x)^{e_s}(\mathrm{mod} p)$, 其中 $g_1(x),\cdots,g_s(x)$ 是 $F_p[x]$ 中的首 1 不可约多项式. 令 $g_i(x)$ 的次数为 $f_i(1\leqslant i\leqslant s)$, 则 $e_1f_1+\cdots+e_sf_s=n$, 称 $[e_1,\cdots,e_s;f_1,\cdots,f_s]$ 为 $g(x)(\mathrm{mod} p)$ 的分解模式. 可以证明：除了有限个素数之外, 每个素数 p 在 O_K 中的分解模式等于 $g(x)$ 在 $F_p[x]$ 中的分解模式.

现在考虑二次数域 $K=Q(\sqrt{q})$, 其中 q 为奇素数, $\alpha=\sqrt{q}$ 的最小多项式为 $g(x)=x^2-q$. 由于 $g(x)\equiv x^2(\mathrm{mod} q)$, 可知素数 q 在 O_K 中的分解为 $qO_K=Q^2$ 即是一个素理想的平方, 这称作 q 在 K 中分歧. 如果 p 是奇素数并且 $p\neq q$, 则当 $(q/p)=1$ 时, q 为模 p 的二次剩余, 即 $q\equiv a^2(\mathrm{mod} p)$, 从而 $x^2-q\equiv(x-a)(x+a)(\mathrm{mod} p)$, 于是 $pO_K=P_1P_2$, 这是两个不同素理想 P_1 和 P_2 的乘积, 称 p 在 K 中分裂. 当 $(q/p)=-1$ 时, q 为模 p 的非二次剩余, 这时 $x^2-q(\bmod p)$ 仍不可约, 于是 pO_K 为 O_K 的素理想, 称 p 在 K 中惰性. 综合上述, 可知每个奇素数 $p(\neq q)$ 在 O_K 中的分解模式由 (q/p) 的值所决定. 但是由二次互反律 $(q/p)\,(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}=(p/q)$, 而右边只依赖于 p 模 q(当 $q\equiv 1(\bmod 4)$ 时) 或 p 模 $4q$(当 $q\equiv 3(\bmod 4)$ 时) 的同余类. 换句话说, 奇素数 $p(\neq q)$ 在二次域 $K=Q(\sqrt{q})$ 中的素理想分解模式只依赖于 p 模 D 的同余类, 其中 $D=q$ 或 $4q$ 叫做是 K 的判别式. 事实上, 利用高斯二次互反律可以证明：对于任意二次域 $K=Q(\sqrt{d})$, p 在 O_K 中的分解模式 (分歧、分裂、惰性) 都只依赖于 p 模 $D(K)$ 的同余类来决定, 其中 $D(K)$ 是 K 的判别式, 即 $D(K)=|d|$ (当 $d\equiv 1(\bmod 4)$ 时) 或 $D(K)=4\,|d|$(当 $d\equiv 2,3(\bmod 4)$ 时). 从这个观点来看, 对于每个数域的扩张 L/K, 如果用这个扩张的某种自身特性来刻画 O_K 中每个素理想 $\wp$ 在 O_L 中的素理想分解模式, 都可以看成是高斯二次互反律的推广.

到目前为止, 当 L/K 是数域的阿贝尔扩张时, 这个问题已有满意的答案. 所谓阿贝尔扩张 L/K 即指 L/K 为伽罗瓦扩张, 并且它的伽罗瓦群是阿贝尔群 (交换群). 1920 年, 高木贞治发展了关于数域阿贝尔扩张的系统理论, 叫做类域论. 利用这个理论, Artin 于 1925 年给出用阿贝尔扩张 L/K 的自身特性来刻画素理想分解, 叫做 Artin 互反律. 如果数域扩张 L/K 不是阿贝尔扩张, 甚至都不是伽罗瓦扩张, 目前还没有满意的互反律. Artin 已经认识到, 数域伽罗瓦扩张 L/K 和它的伽罗瓦群 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ 的表示有关. 当 L/K 是阿贝尔扩张时, G 是有限交换群, G 的不可约表示都是一次表示 (叫做 G 的特征标). 而当 G 是非交换群时, G 有高次的不可约表示, 这种表示和一般线性群 $GL(n,K)$ 的某种自守表示有密切的联系, 其中 $n\geqslant 2$, 而 $GL(n,K)$ 是元素属于 K 的 n 阶可逆方阵构成的乘法群. 群表示成

为数论的工具, 是现代数论的一个重要标志. 关于自守表示理论的 Langlands 猜想, 是当前纯粹数学一个核心研究领域. 从某种角度来看, 类域论是 Langlands 猜想的一维情形, 即 Langlands 猜想为类域论的高维推广, 而 Langlands 猜想的一些重要内容可看成是高斯互反律的极大推广. 正如德国著名数论学家 Hecke 所说："现代数论是由二次互反律的发现开始的, 只有在代数数论上观察它, 才能对二次互反律有深入的理解. ”

参 考 文 献

[1] Collison M J. The origins of the cubic and biquadratic reciprocity laws. Arch History Exact Sci, 1977, 17: 63-69

[2] Cox D A. Quadratic reciprocity: the conjecture and application. Amer Math Monthly, 1988, 95: 442-448

[3] Edwards H M. Kummer, Eisenstein, and higher reciprocity laws. Number theory related to Fermat's last theorem, Progress in Math 26(ed. By Koblitz N), 1983, 31-43

[4] Evans R. Rational reciprocity laws. Acta Arith, 1981, 39: 281-294

[5] Gerstenhaber M. The 152nd proof of the law of quadratic reciprocity. Amer Math Monthly, 1963, 70: 397-398

[6] Tate J. Problem 9: The general reciprocity law. Proc Symp Pure Math, 1976, 28: 311-322

[7] Wyman B F. What is a reciprocity law. Amer Math, Monthly, 1972, 79: 571-586

[8] Lemmermeyer F. Reciprocity laws, from Euler to Eisenstein. Berlin: Springer-Verlag, 2000

撰稿人：冯克勤
清华大学

希尔伯特第十二问题：构作数域的最大阿贝尔扩域

Hilbert Twelfth Problem: Constructing the Maximal Ablelian Extension of Number Fields



希尔伯特

1900 年, 希尔伯特在第二届国际数学家大会 (巴黎) 上提出了著名的二十三个数学问题, 其中第十二问题是：对每个 (代数) 数域 K, 如何明显地构作出它的最大阿贝尔扩域？

数域 K 是指有理数域 Q 的有限次扩域, 即域 K 是 Q 上的有限维向量空间. 设 L 和 K 均是数域, 并且 $K \subseteq L$. 域 L 的一个自同构 φ 叫做 $K-$ 自同构, 是指 φ 把 K 中每个元素均保持不动. L 的全体 K 自同构形成一个群, 表示成 $\mathrm{Gal}(L/K)$, 叫做数域扩张 L/K 的伽罗瓦群. 熟知 $|\mathrm{Gal}(L/K)| \leqslant [L:K]$($[L:K] = \dim_K L$ 为 L 作为 $K-$ 向量空间的维数, 也叫做扩张 L/K 的次数). 当 $|\mathrm{Gal}(L/K)| = [L:K]$ 时, L/K 叫做数域的伽罗瓦扩张. 如果 L/K 是伽罗瓦扩张, 并且 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 是 (有限) 阿贝尔群 (即交换群), 则称 L 是 K 的阿贝尔扩域. 如果 L_1 和 L_2 均是 K 的阿贝尔扩域, 则合成 L_1L_2(即复数域中同时包含 L_1 和 L_2 的最小子域) 也是 K 的阿贝尔扩域. 所以从理论上来说, K 的最大阿贝尔扩域是存在的, 它就是 K 的所有有限阿贝尔扩域的合成 K^{ab}, 这是 K 的无限次扩域. 希尔伯特所问的是：对于一个数域 K, 如何把 K^{ab} 具体构作出来？也就是说, 在 K 之上添加哪些复数, 就可以生成 K^{ab}？

代数数论于 19 世纪初由高斯开创, 至 19 世纪末已形成系统的理论. 1893 年, 德国数学会邀请希尔伯特和闵柯夫斯基共同准备一份数论进展报告. 这份报告后来由希尔伯特单独完成. 经过几年的努力, 希尔伯特于 1897 年 4 月将报告写成一本书《代数数论理论》正式发表. 这本书成了系统总结代数数论百年历史的经典著作, 其中包括希尔伯特本人发展的重要理论, 即希尔伯特分歧理论. 在希尔伯特提出第十二问题的时候, 只对于有理数域 Q 构作了它的最大阿贝尔扩域 Q^{ab}, 关键性的工具就是希尔伯特分歧理论.

1853 年, Kronecker 就提出一个论断：有理数域 Q 的最大阿贝尔扩域 Q^{ab} 是所有分圆域的并. 所谓分圆域即是 $Q_m = Q(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{m}})$, 其中 m 为正整数. Q_m/Q 是伽罗瓦扩张. 运用分歧理论, Weber 证明了上述论断, 即 $Q^{ab} = \bigcup\limits_{m \geqslant 2} Q_m = Q(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{m}}; m \geqslant 2)$. 由于任意两个分圆域 Q_m 和 Q_n 的合成也是分圆域 $Q_{[m,n]}$, 其中 $[m,n]$ 是 m 和 n

的最小公倍数, 所以上述结果也可以表述成：数域 K 是 Q 的阿贝尔扩域当且仅当 K 是某个分圆域的子域, 这叫做 Kronecker-Weber 定理.

在希尔伯特第十二问题的刺激之下, 数域的阿贝尔扩张理论在 20 世纪初得到发展, 这个理论由高木贞治 (Tagaki) 于 1920 年完成, 叫做类域论 (class field theory). 作为类域论的一个应用, 高木给出任意虚二次数域 $K = Q(\sqrt{-d})(d \geqslant 1)$ 的最大阿贝尔扩张 K^{ab} 的明显构作方法, 即对于任意虚二次数域解决了希尔伯特第十二问题. 对于虚二次数域 K, 如何构作 K^{ab} 是由 Kronecker 于 1880 年就提出的一个猜想, 被后人称为 "Kronecker 青春之梦", 因为在这一年他给另一个代数数论学家 Dedekind 的信中, 把它称作是 "我最迷恋的青春之梦". 四十多年以后高木圆了 Kronecker 的这个梦想.

Kronecker-Weber 定理的一种看法是：将周期为 1 的实变函数 $e^{2\pi ix}$ 的所有在有理点 n/m 处的值 $e^{2\pi i\frac{n}{m}}$ 添加到有理数域 Q 中, 就是 Q 的最大阿贝尔扩域 Q^{ab}. 而 Kronecker 青春之梦是说：虚二次数域 K 的最大阿贝尔扩张, 应当是把某个双周期复变函数 $f(z)$ 在所有有理点处的值 $f\left(\dfrac{n}{m}\right)$ 添加到 K 中而得到. 一个复变函数 $f(z)$ 叫做双周期函数, 也叫做椭圆函数, 是指存在着两个非零复数 ω_1 和 ω_2(并且不存在实数 $\alpha, \omega_1 = \alpha\omega_2$), 使得对每个复数 $z, f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$. 于是对任意整数 n_1 和 n_2, 均有 $f(z+n_1\omega_1+n_2\omega_2) = f(z)$. 全体 $n_1\omega_1+n_2\omega_2(n_1, n_2 \in Z)$ 形成复平面上一个 (二维的) 加法子群, 叫做一个格, 表示成 $L = L(\omega_1, \omega_2)$. 显然对每个整数 $n, nL \subseteq L$. 如果有复数 $\alpha = a + bi(a$ 和 b 为实数, $b \neq 0)$ 使得 $\alpha L \subseteq L$, 称 L 具有复乘法 α. Kronecker 猜想, 对每个虚二次数域 K, 存在 $\alpha \in K$, 具有复乘法 α 的格 L 和以 L 为双周期的椭圆函数 $f(z)$, 使得 $K^{ab} = K(f(a) : a \in Q)$, 即将 $f(z)$ 在所有有理数 $a = n/m$ 处的值添加到 K 中即得到 K 的最大阿贝尔扩域 K^{ab}.

到目前为止, 除了有理数域和虚二次数域之外, 所有其他数域 K 均未能具体构作出 K 的最大阿贝尔扩域. 换句话说, 近年来尽管希尔伯特第十二问题取得一些进步, 但只有有理数域和虚二次数域的情形得到解决.

参 考 文 献

[1] Manin Yu I, Panchishkim A A. Introduction to Modern Number Theory. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, 2005

[2] Neukirch J. Algebriac Number Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1999

[3] Lang S. Elliptic Functions. Second edition. Berlin: Springer-Verlag, 1987

撰稿人：冯克勤

清华大学

岩泽 (Iwasawa) 理论的主猜想

The Main Conjecture of Iwasawa Theory

设 p 是一个素数, 对于有理数 a, b, 设 p^x 恰好整除 $a-b$, 则定义它们之间的 p 进距离 $|a-b|_p = p^{-x}$. 由此距离将 $\mathbb{Q}$完备化, 我们得到一类新的数, 称为 p 进数. 所有这些数构成域 $\mathbb{Q}_p$, 而整数 $\mathbb{Z}$ 在此完备化下得到 p 进整数环 $\mathbb{Z}_p$. 我们有

$$\mathbb{Z}_p = \{a_0 + a_1 p + \cdots a_n p^n + \cdots : \ 0 \leqslant a_i \leqslant p-1\}.$$

举例说, 序列 $1, 1+3, 1+3+3^2, \cdots$ 是 $\mathbb{Z}$ 上在 3 进距离意义下的柯西序列, 在 $\mathbb{Z}_3$ 中它的极限就是 $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$! 熟知这个等式在实数上是荒谬的. 所以我们得到了与实数规律完全不同的规律. 用现代数论的话来说, 实数世界和 p 进数的世界它们每一个都是有理数世界的万千面孔中的一张面孔.

对于每个正整数 n, 对环 $\mathbb{Z}_p$ 中的元素 $x = \sum_i a_i p^i$ 模 p^n 剩余, 即截掉其高于 p^n 次的项得到 $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$, 这样就得到从 $\mathbb{Z}_p$ 到 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的满同态. 将所有这些同态综合起来, 我们得到 $\mathbb{Z}_p$ 是系 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n \geqslant 1)$ 的射影极限. 同样地, 如果我们有一组对象 $(A_n)_{n\geqslant 1}$(比如说集合、群、环等), 且从 A_{n+1} 到 A_n 有 (自然) 映射, 均可得到系 (A_n) 的射影极限.

岩泽理论是日本数学家岩泽健吉在 1950 年末期发展起来的一套研究数域 (即 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张) 的 $\mathbb{Z}_p$ 扩张的算术性质的理论, 最常见的 $\mathbb{Z}_p$ 扩张是所谓的分圆 $\mathbb{Z}_p$ 扩张. 具体说来, 设 n 次单位根 $\zeta_n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$. 可以看出 $1, \zeta_n, \cdots, \zeta_n^{n-1}$ 将单位圆 n 等分, 故大家称数域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 为分圆域, 其整数环是 $\mathbb{Z}[\zeta_n] = \{a_0 + a_1\zeta_n + \cdots + a_{n-1}\zeta_n^{n-1} : a_i \in \mathbb{Z}\}$. 这类域是德国数学家库默尔为证明费马大定理而首先研究的. 事实上, 如果整数环 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ 是唯一分解环, 那么在证明费马大定理的征途中就不会遇到那么多的困难. 分圆 $\mathbb{Z}_p$ 扩张就是下述分圆域的扩张:

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_p) \subset \cdots \subset K_n = \mathbb{Q}(\zeta_p^{n+1}) \cdots \subset K_\infty = \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}),$$

其中 K_n/K 的伽罗瓦群 G_n 就是循环群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$: 对任意 $a \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\sigma_a(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^a$. 由伽罗瓦理论, K_∞/K 的伽罗瓦群 G 是 G_n 的射影极限, 即 p 进整数环 $\mathbb{Z}_p$.

考虑群环 $\mathbb{Z}_p[G_n]$ 构成的系, 由于 G_n 到 G_{n-1} 之间存在自然限制映射, 此系也存在射影极限 Λ, 事实上, Λ 同构于以 $\mathbb{Z}_p$ 为系数的幂级数环 $\mathbb{Z}_p[[T]]$, 它被称做岩泽

代数, 而其上的有限生成模则称为岩泽模. 我们称岩泽模 A拟同构于 B, 如果存在 A 到 B 的同态使得其核与余核都是有限模. 尽管岩泽代数 Λ 不是主理想整环, 但是任一岩泽模 M 均拟同构于 Λ^r 与形如 $\Lambda/(p^k)$ 和 $\Lambda/(f)$ 这样的模的直和, 其中 f 是首一多项式且同余于 T^n 模 p. 所有这些 f 的乘积 $\mathrm{ch}(M)$, 称为岩泽模 M 的特征多项式, 它是系数在 $\mathbb{Z}_p$ 上的首一多项式.

回到分圆 $\mathbb{Z}_p$ 扩张的情形. 首先 K_n 的理想类群是有限交换群, 记其 p 部分是 A_n. 一方面, 由于它是 p 阶群, 自然有 $\mathbb{Z}_p$ 的作用; 另一方面 K_n/K 的伽罗瓦群作用在它上面, 故 A_n 是环 $\mathbb{Z}_p[G_n]$ 的有限模. 由于 K_{n+1} 到 K_n 有自然的映射, 我们可以得到 A_{n+1} 到 A_n 的自然映射, 这样就得到它们的射影极限 $\mathcal{A}$, 这是一个岩泽模. 其次, 对于环 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}]$, 可以验证 $\pm\zeta_{p^n}$ 和 $1-\zeta_{p^n}^i/1-\zeta_{p^n}$ (其中 p 不整除 i) 是其上的乘法单位, 称为分圆单位. 所有的分圆单位构成群 C_n, 它是单位群 E_n 的满秩子群, 即 E_n/C_n 是有限交换群. 考虑它的 p 部分, 与理想类群的情况类似, 系 $(E_n/C_n)_p$ 存在射影极限 $\mathcal{E}/\mathcal{C}$, 它也是一个岩泽模.

岩泽主猜想(或称主猜想, 即岩泽理论的主要猜想) 是说: $\mathrm{ch}(\mathcal{A})=\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$. 可以看出, $\mathcal{A}$ 说明的是数域的理想类群, 是一个纯粹的代数对象. 而分圆单位本质上是一个解析对象. 事实上, 令 $\zeta(p,s)=\zeta(s)\cdot(1-p^{-s})=\sum\limits_{p\nmid n}\dfrac{1}{n^s}$, 此函数称为 p 进 ζ 函数, 它是 $\mathbb{Z}_p$ 上是连续函数, 并且其在负整数处的值可以用 $\mathbb{Z}_p[T]$ 的一个首一多项式的插值来表示. p 进 ζ 函数是 p 进 L 函数的一个例子, 它体现了对应数域的解析性质. Coates-Wiles 和 Coleman 在明显互反律的工作表明上述多项式和 $\mathrm{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ 只是相差一个固定多项式. 所以我们知道主猜想是关于分圆域的代数性质和解析性质的深刻联系的猜想.

岩泽理论从诞生一开始就是数论研究的重要工具. 在 1972 年, Mazur 建立了椭圆曲线的岩泽理论, 并提出了虚二次域上的主猜想. 后来人们又提出了许多其他形式的主猜想, 包括 motive 上的主猜想等. p 进伽罗瓦表示上的岩泽理论的研究 (Fontaine, Colmez 等) 对于 p 进 BSD 猜想、Serre 猜想等都非常重要.

1983 年, Mazur 和 Wiles 使用深刻的代数几何办法证明了岩泽主猜想. 利用 Kolyvagin 的欧拉系的办法, Rubin 证明了虚二次域上的主猜想, 并给出了分圆域主猜想一个新的证明. 而其他形式的主猜想依旧是数论和算术代数几何研究的热点内容.

参 考 文 献

[1] Iwasawa K. On Γ-extensions of algebraic number fields. Bull Amer Math Sco, 1959, 65: 183-226

[2] Mazur B and Wiles A. Calss fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$. Invent Math, 1984, 76: 179-330

[3] Rubin K. The main conjecture of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields. Invent Math, 1991, 103: 25-68

撰稿人：欧阳毅
中国科学技术大学

有限阿贝尔 (Abel) 群的 Davenport 常数

Davenport's Constants for Finite Abelian Groups

有限 Abel 群 G 的 Davenport 常数 D(G) 是具有下述性质的最小正整数 k：任何长为 k 的 G 中元序列 $a_1, \cdots, a_k$ 都包含非空的零和子序列, 即有 $\{1, \cdots, k\}$ 的非空子集 I 使得 $\sum\limits_{i \in I} a_i=0$. 如何根据 Abel 群 G 的结构决定出 Davenport 常数 D(G) 是组合数论中富有挑战性的著名难题.

设 G 为 n 阶加法 Abel 群, 任给 $a_1, \cdots, a_n \in$G, 由于 G 中只有 n 个不同元素, 部分和

$$s_0 = 0, \quad s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \cdots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

中必有两个相等, 即有 $0 \leqslant i < j \leqslant n$ 使得 $0 = s_j - s_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$. 因此 D(G) 存在而且 D(G)$\leqslant$ |G|.

Davenport 常数起源于 H. Davenport 在 1966 年的一项工作：对于理想类群为有限 Abel 群 G 的代数数域 K, 其整数环中不可约元的素理想因子总个数的最大值就是 Davenport 常数 D(G).

对于 n 阶加法循环群 $\mathbf{Z}_n$=$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, 易见 D($\mathbf{Z}_n$) $= n$. Olson 证明了 D($\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$) $= 2n - 1$, 并猜测 G 为 r 个 $\mathbf{Z}_n$ 的直和时 D(G)=1 + $r(n-1)$; 这个困难的猜测至今仍未解决且进展甚微. 阶大于 1 的有限 Abel 群 G 在同构的意义下可唯一地表成 $\mathbf{Z}n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}n_r$ 的形式, 其中 $1 < n_1 | n_2 | \cdots | n_r$, r(G)=r 与 exp(G)=n_r 分别叫做 G 的秩与幂指数, 我们还定义 d*(G)=$\sum\limits_{i=1}^{r}(n_i - 1)$. 对于 Abel p 群 G, 1969 年 Olson 用群环工具证明了 D(G)=1+d*(G); 1992 年 A. Geroldinger 与 R. Schneider 指出有无穷多个秩为 4 的有限 Abel 群 G 适合 D(G)>1+d*(G); 1969 年 P. van Emde Boas 与 D. Kruyswijk 证明对阶大于 1 的有限 Abel 群 G 有不等式 D(G)$\leqslant$exp(G)(1+ln(|G|/exp(G))); 1994 年 W. R. Alford, A. Granville 与 C. Pomerance 利用这个结果证明有无穷多个 Carmichael 伪素数.

零和方面的第一个重要结果是 P. Erdös, A. Ginzburgh 与 A. Ziv 在 1961 年建立的下述著名的 EGZ 定理：长为 $2n-1$ 的 $\mathbf{Z}_n$ 中元序列 $a_1, \cdots, a_{2n-1}$ 必包含长为 n 的零和子列. 高维东证明了 Caro 的下述猜想：对于有限 Abel 群 G, D(G)+|G|-1 是最小的正整数 k 使得长为 k 的 G 中元序列必有长为 |G| 的零和子列. 考虑到 D($\mathbf{Z}_n$) $= n$, 这个结果蕴涵着 EGZ 定理. 2007 年 C. Reiher 通过综合运用代数与组

合方法证明了 1983 年提出的 Kemnitz 猜想：加法群 $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$ 中长为 $4n-3$ 的元素序列必包含长为 n 的零和子列.

EGZ 定理有许多不同的推广. Olson 证明对任何 n 阶乘法群 G 中长为 $2n-1$ 的元素序列 $a_1, \cdots, a_{2n-1}$ 都可找到 n 个不同的下标 $i_1, \cdots, i_n$ 使得乘积 $a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ 等于 G 的单位元 e, 他还猜测可进一步要求 $i_1 < \cdots < i_n$. Grynkiewicz 证明了下述加权 EGZ 定理：设 $a_1, \cdots, a_{2n-1} \in \mathbf{Z}_n$ 且 $w_1, \cdots, w_n$ 为 $\mathbf{Z}_n$ 中元的零和子列, 则有 n 个不同的下标 $i_1, \cdots, i_n$ 使得加权和 $w_1 a i_1 + \cdots + w_n a i_n$ 等于零. 孙智伟获得了 EGZ 定理的下述覆盖式推广：设剩余类系$\{a_1(\text{mod } n_1), \cdots, a_k(\text{mod } n_k)\}$ 覆盖每个整数的次数为 $2q-1$ 或者 $2q$, 这儿 q 为素数幂, 则对任给的 $c_1, \cdots, c_k \in \mathbf{Z}_q$ 都有$\{1, \cdots, k\}$的非空子集 I 使得 $\sum_{i \in I} c_i = 0$ 且 $\sum_{i \in I} 1/n_i = q$. 注意 $k = 2q-1$ 且 $n_1 = \cdots = n_k = 1$ 时此结果就是 $\mathbf{Z}_q$ 上的 EGZ 定理.

参 考 文 献

[1] Alford W R, Granville A, Pomerance C. There are infinitely many Carmichael numbers. Ann of Math, 1994, 139: 703-722

[2] Erdös P, Ginzburg A, Ziv A. Theorem in the additive number theory. Bull Research Council Israel, 1961, 10: 41-43

[3] 高维东. A combinatorial problem on finite abelian groups. J Number Theory, 1996, 58: 100-103

[4] 高维东, Geroldinger A. Zero-sum problems in finite abelian groups: a survey. Expo Math, 2006, 24: 337-369

[5] Geroldinger A, Schneider R. On Davenport's constant. J Combin Theory Ser A, 1992, 61: 147-152.

[6] Grynkiewicz D J. A weighted Erdös-Ginzburg-Ziv theorem. Combinatorica, 2006, 26: 445-453

[7] Olson J E. A combinatorial problem on finite abelian groups. I J Number Theory, 1969, 1: 8-10

[8] Olson J E. A combinatorial problem on finite abelian groups. II J Number Theory, 1969, 1: 195-199

[9] Reiher C. On Kemnitz' conjecture concerning lattice-points in the plane. Ramanujan J, 2007, 13: 333-337

[10] 孙智伟. Unification of zero-sum problems, subset sums and covers of **Z**. Electron Res Announc Amer Math Soc, 2003, 9: 51-60

撰稿人：孙智伟
南京大学

Cheeger-Goresky-MacPherson 猜想

Cheeger-Goresky-MacPherson Conjecture

Hodge 理论在紧复流形特别是代数流形理论中处于核心地位. 人们自然想问：对于代数簇是否也有相应的理论. 1982 年, Cheeger-Goresky-MacPherson 对代数簇上的 L2 上同调以及交叉上同调群 (intersection cohomology group) 进行了奠基性的研究, 并且提出了一系列重要的猜想. 核心问题是：

设 V 是复射影空间中的一个代数簇, V' 是 V 的正则点组成的集合. V' 上相对于 Fubini-Study 度量的 Lˆ2-de Rham 上同调群是否与 V 的交叉上同调群是同构的?

由 Cheeger, Hsiang, Pati 和 Nagase 等人的工作可知, 以上猜想在 V 的维数不超过 2 时是成立的. 研究上问题的主要难点在于 Fubini-Study 度量在交叉上同调群是一个非完备的 Kaehler 度量, 以至于完备 Kaehler 流形上的 Lˆ2 理论无法直接应用到 V' 上. 应用 Donnelly-Fefferman 的 Lˆ2 估计, T. Ohsawa 成功地克服了这一困难, 并证明了当奇点是孤立情形的 Cheeger-Goresky-MacPherson 猜想. 当奇点不孤立时, 情形就异常复杂, 虽然也有一些部分的结果.

参 考 文 献

[1] Cheeger J, Goresky M and MacPherson R. L2-cohomology and intersection homology for singular varieties. Ann Math Stud 102 Seminar on Differential Geometry, 1982, 303-340

[2] Ohsawa T. Cheeger-Goresky-MacPherson conjecture for varieties with isolated singularities. Math Z, 1991, 206: 219-224

撰稿人：陈伯勇
同济大学

Chern-Moser 的一个问题

Problem of Chen-Moser

由 Cartan-Chern-Moser 定理[2], 一个强拟凸的实解析超曲面 M$\subset C^n$ 的芽, 在局部双全纯等价映射下, 由一组完备的不变量所完全决定, 这些不变量能由联络的曲率和曲面正规型的系数表示出来. 当 $n \geqslant 3$ 时, Chern-Moser[2] 中的四阶拟共形曲率张量 S 非常重要, 因为它通过微分产生其他的不变量. 现在我们知道 $S \equiv 0$ 当且仅当 M 局部双全纯等价于球面 ∂B^n; 当 $n = 2$ 时, 上述四阶曲率张量恒为零, 其角色由 Cartan 的第六阶不变曲率张量 P[1] 所取代. 在这两种情形下, M 中使 Chern-Moser 张量 S(或 $n = 2$ 时的 Cartan 曲率张量 P) 为零的点, 被称为一个 (CR) 脐点 (umbilical point)[2]. 脐点为 M 的双全纯微分不变量. 关于紧的强拟凸超曲面 M 的 CR 脐点的研究, 为它所包含的域全纯结构和 M 内在的 CR 结构, 提供了非常有用的信息. 然而, 与经典几何不同的是, 除了在球面, 即 S 或 $P \equiv 0$ 的情形, 脐点的计算似乎是一个非常困难的问题. 这是因为基本的 Cartan-Chern-Moser 曲率张量的显示公式非常复杂. 事实上, 即使是在最简单的非球面情形 —— 当 M 是一个椭圆体 (ellipsoid) 时就已经不平凡. 最近, Webster 基于早先他对一些实椭圆体的复动力学性质的工作, 证明了 $n \geqslant 3$ 时 C^n 中几乎所有的实椭圆体没有任何脐点. 由文献 [5], 一个自然问题是 C^2 中的一个实椭圆体是否也有这一性质. 与 Webster 的定理截然不同的是, 在文献 [4] 中, 我们证明了 C^2 中的一个实椭圆体至少有 4 个脐点.

Hamburger 的一个定理[3] 表明 $\mathbf{R}^3$ 中的任何紧的实解析凸曲面有至少两个脐点. 我们不知道是否存在一个 CR 型的 Hamburger 定理. 确切地说, 我们关注于下面的问题:

问题 1　C^2 中任何紧的强凸的超曲面是否至少有两个 CR 脐点?

由 Chern-Moser 在他们著名的文献 [2] 中提出的下面的问题 2, 现在仍然没有解决:

问题 2　是否存在任何可嵌入的三维紧的 CR 流形, 它没有 CR 脐点?

正如 Cartan-Chern-Moser-Webster 给出的那样, 对于一个可嵌的强拟凸的流形, 在一个非脐点附近, 存在一个内蕴的向量场, 它的积分曲线是双全纯不变量. 这一内在定义的向量场在脐点附近带有奇性. 研究这类不变曲线的动力学性质和流形的 CR 结构间千丝万缕的联系, 将是一个非常有意义的问题.

参 考 文 献

[1] Cartan E. Sur les vari\'et\'es pseudo-conformal des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. Ann Mat Pura Appl, 1932, 11(4): 17-90

[2] Chern S S and Moser J K. Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math, 1974, 133: 219-271

[3] Hamburger H. Beweis einer Caratheodoryschen vermutung. Teil I Ann of Math, 1940, 41: 63-86; II. Acta Math, 1941, 73: 175-228; III. Acta Math, 1941, 73: 229-332

[4] Huang X and Ji S. Every real ellipsoid in C^2 admits CR umbilical points. Trans Amer Math. Soc. 2007, 359: 1191-1204

[5] Webster S. Holomorphic differential invariants for an ellipsoidal real hypersurface. Duke Math J, 2000, 104(3): 463-475

撰稿人：黄孝军
Rutgers University, 武汉大学

CR 型的 Bonnet 刚性问题和 Siu 的孤立复正规奇点的超刚性问题

CR Type Bonnet Rigidity Problem and The Supper Rigidity Problem of Siu's Isolate Sigularity Point

假设 M 和 M' 是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个浸入曲面, 它们分别由 f 和 g 通过 $U \subset \mathbf{R}^2$ 参数化. 如果 M 和 M' 相互等距同构, 并且假设第二基本形式在对应点相同, 那么 M 和 M' 相差一个刚性运动. 即存在一个欧氏变换 T, 使得 $T(M) = M'$, 这就是经典的 Bonnet 刚性定理. 在 CR 几何中, 浸入子流形的类似是 Levi 非退化的 CR 子流形, 欧氏空间的类似是球. 在这一方面, S. Webster 在 1977 年证明了下述 CR 型的 Bonnet 刚性定理:

假设 (M_1, p_1) 和 (M_2, p_2) 是 ∂B^n 中两个余维数为 1 的强拟凸的 CR 子流形的芽, 这里 $n \geqslant 5$. 如果 (M_1, p_1) 和 (M_2, p_2) 是 CR 同胚, 那么它们相互间相差一个刚性运动. 即存在 $T \subset Aut(\partial B^n)$ 使得 $T(p_1) = p_2$ 且 $T(M_1) = M_2$.

这里, 对于 C^n 中的一个子流形 M 和对任意 $p \in M$, 我们定义 M 在 p 点的 CR 维数 $CR_M(p)$ 为 $T_p^{(1,0)}M$ 的复维数. 当 $CR_M(p)$ 与 p 点无关节时, 我们称 M 是一个 CR 流形; 当 M 的实维数是 $2CR_M+1$ 时, 我们称 M 是一个超曲面型的 CR 子流形. 对于两个 CR 子流形 M_1 和 M_2, 且 $p_j \in M_j$, 我们称 (M_1, p_1) CR 等价于 (M_2, p_2), 如果存在一个从 (M_1, p_1) 到 (M_2, p_2) 光滑同胚 F, 使得 $F_*(T^{(1,0)}M_1) = T^{(1,0)}M_2$. 假设 $M \subset \partial B^n$ 是一个超曲面型的 CR 子流形, 我们称 M 的 CR 余维数为 l, 如果 $l = n - 1 - CR_M$. 文献 [1]、[2] 中, 我们建立了 $k < (n-1)/2$ 时的 CR 型 Bonnet 刚性定理.

然而, 还不清楚这里关于余维数的限制 $k < (n-1)/2$[1,2] 是否必要. 我们当然相信, 球与球之间全纯映射的刚性问题中, k 相对于 n 不能太大. 然而, 我们甚至在 $k = (n-1)/2$ 时都找不到一个反例. 更确切地说, 下面的问题仍然没有解决:

问题 1 假设 (M_1, p_1) 和 (M_2, p_2) 是嵌入在 ∂B^n 中余维数为 k 的两个 CR 等价的子流形. 那么对于任意的 k, 是否一定有 (M_1, p_1) 和 (M_2, p_2) 间相差一个刚性变换?

关于 CR 子流形在球面中的嵌入的研究的一个动机就是, 这些流形自然地来自于孤立复奇点的链接 (links). 因此, 对这类子流形的研究能被用来得到关于孤立

复奇点的复结构的一些相关结果. 由文献 [3] 的一个结果, 我们得到 CR 结构的链接, 比起理解它界住的奇点的复结构需要更多的信息. 另一方面, 一般说来, 如果我们仅仅知道它们的 ε 链接光滑同胚, 我们不能推出 $(V_1,0)$ 和 $(V_2,0)$ 双全纯等价. 然而, 对于带有 Kaehler 度量且有一定的关于曲率张量的强负性条件的紧致复流形, Y. T. Siu 根据他著名的超刚性定理, 提出了下面的问题：

问题 2(Y. T. Siu) 假设 $(V_j, 0) \subset C^n$ 是复解析簇的芽, 在 0 点具有孤立的正规奇性且维数至少为 3. 假设 $M_{j,\varepsilon} = V_j \cap \{|z| = \varepsilon\}$ 为相应的链接. 假设 $V_2 \backslash \{0\}$带有一个在奇点 0 处完备的 Kaehler 度量, 且与文献 [4] 中有相同的负曲率条件. 假设 $M_{1,\varepsilon}$ 微分同胚于 $M_{2,\varepsilon}$, 那么是否有 V_1 与 V_2 双全纯等价？

参 考 文 献

[1] Ebenfelt P, Huang X and Zaitsev D. The equivalence problem and rigidity for hypersurfaces embedded into hyperquadrics. Amer Jour of Math, 2005, 127: 129-168

[2] Ebenfelt P, Huang X and Zaitsev D. CR submanifolds embedded in hyperquadrics. Comm in Analysis and Geometry, 2004, 12(3): 629-668

[3] Huang X. On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces in complex spaces of different dimensions. Annales de L'Institut Fourier, 1994, 44: 433-463

[4] Siu Y T. The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kaehler manifolds. Ann of Math, 1981, 112: 73-111

撰稿人：黄孝军

Rutgers University, 武汉大学

格里菲思 (Griffiths) 问题

Problem of Griffiths

研究复几何的最重要的工具之一是大量的消灭定理. 历史上, K. Kodaira 首先应用调和形式得到了关于紧复流形上正全纯线丛的消灭定理. 为了把 Kodaira 的定理推广到全纯向量丛情形, Nakano 与 Griffiths 分别引入了两种不同的正定性概念并得到了相应的消灭定理. Griffiths 正定指的是向量丛的 Chern 曲率张量作用在任何一个非零的切向量与该向量丛的非零向量的张量积上是正定的. 而 Nakano 正定指的是曲率张量作用在切丛与该向量丛的任何一个非零向量上是正定的. 从 Nakano 正定可推出 Griffiths 正定, 反之则不然, 而两者在线丛情形是一样的. 在 1969 年, P. Griffiths 提出了下面的问题：

若一个紧复流形上的向量丛是丰富 (ample) 的, 那么其必定是 Griffiths 正定的.

Griffiths 问题在曲线情形已由 Umemura 在 1973 年解决, 而一般情形则显得非常难. 直到最近 B.Berndtsson, Mourougane-Takayama 有了实质性的突破, 他们证明了该向量丛与它的行列式丛 (determinant bundle) 的张量积是 Griffiths 正定的.

参 考 文 献

[1] Griffiths P A. Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global Analysis, papers in honor of K Kodaira. Princeton: Princeton Univ Press, 1969, 181-251

[2] Berndtsson B. Curvature of vector bundles and subharmonicity of the Bergman kernel. arXiv:math/0505470v1

撰稿人：陈伯勇

同济大学

哈茨霍恩 (Hartshorne) 猜想

Hartshorne's Conjecture

向量空间在流形上的自然推广就是所谓的向量丛, 它是将开集上的向量空间通过适当的函数 (连续, 光滑, 全纯, 多项式) 粘合起来而得到. 和流形的定义一样, 依据粘合函数的性质, 向量丛又分为拓扑、光滑、全纯和代数向量丛. 向量空间的维数称为向量丛的秩. 复射影流形上全纯向量丛一定是代数向量丛. 秩 1 全纯向量丛称为线丛, 它对应于复流形上的超曲面和除子 (超曲面的代数和). 一个构造秩 r 向量丛的方法就是将 r 个已知线丛作直和 (对应于向量空间的直和), 这种向量丛称为是分裂的. 但是, 即使在复射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上, 人们还没有有效的方法构造不分裂秩 2 向量丛.

在高维复射影空间 $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 4)$ 上构造不分裂秩 2 代数向量丛是一个非常困难的问题. Horrocks 和 Mumford[1] 于 1973 年发现了 $\mathbb{P}^4$ 上第一个不可分裂秩 2 代数向量丛. 到目前为止, 人们还不知道在 4 维以上的复射影空间上是否存在不分裂秩 2 向量丛. Mumford 在他的专著[2] 第 181 页上称该存在性问题是射影 (代数) 几何中最有意思的问题. 1974 年, Hartshorne 提出了下述著名猜想[3,4].

Hartshorne 猜想 当 $n \geqslant 7$ 时, 复射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上的任何秩 2 代数向量丛都是两个线丛的直和.

文献 [5] 详细介绍了该猜想的背景和一些相关的研究. 该猜想的一个等价形式是当 $n \geqslant 7$ 时, $\mathbb{P}^n$ 中维数为 $n-2$ 的光滑代数子流形 $X \subset \mathbb{P}^n$ 一定是完全交, 即 X 是两个超曲面 H_1 和 H_2 的横截交, 也就是说这两个超曲面在 X 的所有点 p 上都是光滑的, 并且它们在 p 处的切超平面是正常相交的. 用代数的语言来说, X 是完全交当且仅当定义它的齐次素理想 $I(X)$ 正好可以由 2 个齐次多项式生成, 这里 $I(X)$ 是在 X 上恒为零的齐次多项式的集合. Hartshorne 甚至猜想只要光滑代数子流形 X 的维数 $d > \dfrac{2}{3}n$, 那么, X 就是 $n-d$ 个超曲面的完全交.

Barth 和 Van de Ven[6] 证明如果对所有 $n \geqslant 1$, 存在 $\mathbb{P}^n$ 上的秩 2 向量丛 E_n, 使得 E_n 是 E_{n+1} 在超平面 $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 上的限制, 那么所有的 E_n 都是分裂的. 这个结论增强了人们对 Hartshorne 猜想的信心. Grauert 和 Schneider[7] 曾经猜测 $n \geqslant 5$ 时, $\mathbb{P}^n$ 上的非半稳定秩 2 向量丛一定是分裂的. 他们在文献 [8] 中给出个一个证明, 但证明有漏洞. $n \geqslant 5$ 时, 拓扑学家构造了一些不分裂的秩 2 拓扑向量丛, 满足不等式 $c_1^2 > 4c_2$. 如果这个猜测成立, 那么这些拓扑向量丛上没有复结构.

Horrocks 给出了一个向量丛是分裂的上同调判别法[5]. 他证明 $\mathbb{P}^n$ ($n \geqslant 2$) 上的向量丛 E 是分裂的当且仅当对任意整数 k, $H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$, 这里 $i = 1, \cdots, n-1$, $E(k) = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$. 作为一个推论, E 是分裂的当且仅当 E 限制在某个平面 $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$ 上是分裂的. 还有一些人也给出了其他的上同调判别法, 但人们仍然不知道如何利用这些判别法去证明 Hartshorne 猜测.

Hartshorne 猜想有几个初等形式. 根据向量丛的定义, Hartshorne 猜想可以转化成一组矩阵的问题, 矩阵的元素是多项式, 但是这个初等问题仍然很困难. 下面我们介绍一个大学生可以看懂的等价形式 (见文献 [9]).

设 F_1, F_2, F_3 是 $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]$ 中三个齐次多项式. 如果存在 6 个齐次多项式 P_{11}, $P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}$ 使得 $F_1 = P_{12}P_{23} - P_{13}P_{22}$, $F_2 = P_{11}P_{23} - P_{13}P_{21}$, $F_3 = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$, 即 F_1, F_2, F_3 是 2×3 矩阵 (P_{ij}) 的三个极大子式, 则称 F_1, F_2, F_3 是齐次行列式的.

如果 F_1, F_2, F_3 不一定是齐次的, 也不要求 P_{ij} 是齐次的, 但上面三个等式仍然成立, 那么我们就称 F_1, F_2, F_3 是行列式的.

Hartshorne 猜想的初等形式 设 $n \geqslant 7$, F_1, F_2, F_3 是 $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]$ 中两两没有公因子的非零齐次多项式. 如果对任何 i, $F_1|_{x_i=1}$, $F_2|_{x_i=1}$, $F_3|_{x_i=1}$ 是行列式的, 那么 F_1, F_2, F_3 是齐次行列式的.

人们估计当 $n \gg r$ 时, $\mathbb{P}^n$ 上的秩 r 向量丛一定是分裂的. 近年来, N. Mohan Kumar 等人在特征值为 2 的域上的 5 维射影空间上构造了不分裂的秩 2 向量丛.

参 考 文 献

[1] Horrocks G and Mumford D. A rank 2 vector bundle on $\mathbb{P}^4$ with 15,000 symmetries. Topology, 1973, 12: 63-81

[2] Mumford D and Fogarty J. Geometric invariant theory. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1982

[3] Hartshorne R. Varieties of small codimension in projective space. Bull Amer Math Soc, 1974, 80: 1017-1032

[4] Hartshorne R. Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list. Topology, 1979, 18: 117-128

[5] Okonek C, Schneider M and Spindler H. Vector bundles on complex projective space. Progress in Math 3. Birkhauser, 1980

[6] Barth W, van de Ven A De. A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces. Invent Math, 1974, 25: 91-106

[7] Schneider M. Vector bundles and submanifolds of projective space: nine open problems//Algebraic Geometry, Bowdoin 1985. Proc Symposia in Pure Math, 46, AMS,

1987, 101-107

[8] Grauert H, Schneider M. Komplexe Unterräume und holomorphe Vektorraumbündel vom Rang zwei. Math Ann, 1977, 230: 75-90

[9] Tan S L. Integral closure of a cubic extension and applications. Proc Amer Math Soc, 2001, 129: 2553-2562

撰稿人：谈胜利
华东师范大学

饭高 (Iitaka) 猜想：$C_{n,m}$

Iitaka Conjecture: $C_{n,m}$

复代数几何中一个关于代数簇分类的中心问题之一是由日本数学家饭高茂 (Iitaka Shigeru) 提出的猜想：$C_{n,m}$ (见文献 [1]), 该猜想内容如下：如果 $\pi: V \to W$ 是光滑代数簇之间的正常 (proper) 态射, $n = \dim(V)$ 且 $m = \dim(W)$. 假设 π 的一般纤维 $V_w := \pi^{-1}(w)$ 是连通的, 则有下列不等式：$\kappa(V) \geqslant \kappa(W) + \kappa(V_w)$, 这里 κ 表示小平 (Kodaira) 维数.

"小平维数" 在代数几何中是一个十分基本的概念. 如果 X 是一个光滑射影代数簇, 设 ω_X 是 X 的典范线丛, 对任意正整数 $m > 0$, 考虑 $\omega_X^{\otimes m}$ 的整体截面空间 $\Gamma(X, \omega^{\otimes m})$. 如果对任意 $m > 0$, 都有 $\Gamma(X, \omega^{\otimes m}) = 0$, 这时我们定义 X 的小平维数为 $\kappa(X) = -\infty$. 否则, 我们总可以假设存在一个正整数 $m > 0$ 使 $\Gamma(X, \omega^{\otimes m}) \neq 0$, 取这个 $\mathbb{C}-$ 向量空间的一组基 $s_0, \cdots, s_{N+1}$ $(N \geqslant 0)$, 则可以将 X 映入射影空间 $\mathbb{P}^N$(这个映射 φ_m 在 X 的 Zariski 开子集上有定义, 这样的映射又称为有理映射). 我们定义 X 的小平维数 $\kappa(X)$ 为当 m 跑遍所有正整数时, X 在映射 φ_m 下的像的闭包簇的最大维数, 根据定义 $-\infty \leqslant \kappa(X) \leqslant \dim(X)$. 如果 $\kappa(X) = \dim(X)$, X 叫做一般型的簇.

$C_{2,1}$ 是 Enriques 和小平邦彦 (Kodaira) 关于代数曲面的分类理论 (见文献 [1]). 当 $\pi: V \to W$ 是解析纤维丛时, $C_{n,m}$ 已被日本数学家 I. Namikawa 和 K. Ueno 所证明 (见文献 [1]). 在文献 [2] 中, 当 π 是具有局部半纯截面的椭圆曲线类时, Ueno 证明了 $C_{3,2}$. 德国著名数学家 Viehweg 在文献 [3] 中证明了 $C_{n,n-1}$. 在文献 [4] 中, 日本数学家川又雄二郎 (Kawamata Yujiro) 首次证明了一些极小模型的存在性可以推出 $C_{n,m}$. 随后, 匈牙利著名数学家 Janos Kollár (Princeton 大学) 证明了当 π 的一般纤维是一般型时, $C_{n,m}$ 正确 (见文献 [5]).

虽然目前的研究现状距离最终证明 Iitaka 猜想还有很大差距, 至今仍不断在出现一些新的研究进展. 例如, 日本学者 Fujino 在文献 [6] 中证明了当 π 的充分一般纤维具有最大的 Albanese 维数时, $C_{n,m}$ 成立, 他最近还放宽了对一般纤维的 Albanese 维数的要求 (见文献 [7]).

由于复代数几何的极小模型理论近年来取得了突破性进展, 因而 $C_{n,m}$ 在很多情况下是正确的. 总的来说, 人们相信 Iitaka 猜想的正确性. 我们希望有一天中国学者能在这个猜想的研究方面作出重要贡献.

参 考 文 献

[1] Ueno K. Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1975

[2] Ueno K. Classification of algebraic varieties I. Comp Math, 1973, 27: 277-342

[3] Viehweg E. Canonical divisors and the additivity ···. Comp Math, 1977, 35: 197-223

[4] Kawamata Y. Minimal models and the Kodaira dimension ···. J Reine Angew Math, 1985, 363: 1-46

[5] Kollár J. Subadditivity of the Kodaira dimension: fibers of general type. Algebraic geometry, Sendai, 1985, 361-398, Adv Stud Pure Math, 10, 1987

[6] Fujino O. Algebraic fiber spaces whose general fibers are of maximal Albanese dimension. Nagoya Math J, 2003, 172: 111-127

[7] Fujino O. Remarks on algebraic fiber spaces. J Math Kyoto Univ, 2005, 45(4): 683-699

撰稿人：陈　猛
复旦大学

长田 (Nagata) 猜想

Nagata's Conjecture

在代数几何中, 平面代数曲线是最简单也是最具体的代数簇, 然而在这个领域内还是有一些著名的难题没有解决, Nagata 猜想就是其中之一.

设 $f(x,y)$ 是含两个变量的复系数多项式, 它在二维的复空间 $\mathbb{C}^2$ 中的零点集合 C 叫做一条平面代数曲线. 设 d 是 $f(x,y)$ 的次数, 则称 C 为一条 d 次平面曲线, 简称 d 次曲线. 对 C 上任意一点 $P=(a,b)$, $f(a+x,b+y)$ 的展开式是一些单项式的和, 这些单项式的次数的最小值定义为 C 在 P 点的重数. 显然 C 上每点的重数大于零, 凡重数大于 1 的点都称为奇点.

设 d,m,n 是给定的三个自然数, $P_1,\cdots,P_n$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上处于一般位置的点, 即满足无三点共线, 无六点在同一条二次曲线上等条件的点. 我们问是否存在一条 d 次曲线, 其在 $P_1,\cdots,P_n$ 的每一点的重数不小于 m. 容易看出, 当 d 太小时这样的曲线不一定存在. 例如当 $n=3, m=1$ 时不存在一次曲线 (即直线) 满足条件.

Nagata 在 1959 年[4] 证明了当 n 是一个大于 9 的完全平方数 r^2 时, 满足上面条件的 d 次曲线存在的一个必要条件是 $d>mr$. 利用这个结论 Nagata 构造了一个例子给出了 Hilbert 第十四问题的否定的回答. 这是一项有重大影响的数学成果.

要注意 $n>9$ 这个条件不能去掉. 例如当 $n=4$ 时, 总存在一个二次多项式 $g(x,y)$ 使 P_1,P_2,P_3,P_4 都是 $g(x,y)$ 的零点. 令 C 为由 $g(x,y)$ 定义的二次曲线, 则 C 在 P_1,P_2,P_3,P_4 点的重数都不小于 1, 因此 $d>mr$ 不成立. 根据同样的道理, $n=9$ 时, 结论也不成立. Nagata 在同一篇文章的最后提出下面猜想：当 $n>9$ 时满足上面条件的 d 次曲线存在的一个必要条件是 $d>m\sqrt{n}$. 这里 n 不一定是完全平方数. 这是经典的 Nagata 猜想. 后来其他数学家又将它推广成如下猜想：

$P_1,\cdots,P_n$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上处于一般位置的点, $m_1,\cdots,m_n$ 是一组自然数. 假如存在一条 d 次曲线 C, 对每个 $1\leqslant i\leqslant n$, C 在 P_i 点的重数都不小于 m_i, 则 $d^2\geqslant m_1^2+\cdots+m_n^2$.

于是大家把这个更一般的猜想称为 Nagata 猜想.

Nagata 猜想有如下特点：① 如前所述, 在历史上它在解决 Hilbert 第十四问题中起了关键作用；② 它是代数几何中为数非常少的可以让大学生理解的问题；③ 在更深的代数几何前沿研究中, 有些问题的解决依赖于 Nagata 猜想的解决.

自 Nagata 的经典论文问世近 50 年来不少数学家试图证明这个猜想都没有获

得成功, 也没有人能找到反例来推翻它, 甚至经典的 Nagata 猜想迄今为止仍是个谜. 文献中所列的一些文章的结果都是 Nagata 猜想的不等式的各种逼近. 文献 [5] 只用微积分知识就得到一个非常好的不等式, 值得有兴趣的读者阅读.

参 考 文 献

[1] Evain L. Une minoration du degré de courbes planes à singulartités imposées. Bulletin de la SMF, 1998, 126: 525-543

[2] Ciliberto C, Miranda R. Degenerations of planar linear systems. J Reine Angew Math, 1998, 501: 191-220

[3] Harbourne B. On Nagata's conjecture. preprint, arXiv:math.AG/9909093v1(1999) 1-6

[4] Nagata M. On the 14-th problem of Hilbert. Amer J Math, 1959, 81: 766-772

[5] Xu G. Curves in $\mathbb{P}^2$ and symplectic packings. Math Ann, 1994, 299: 609-613

撰稿人：杨劲根

复旦大学

Tate-Oort 问题

The Tate-Oort Problem on Group Schemes

设 G 为一个 n 阶群, 则对任意 $g \in G$ 都有 $g^n = e$, 这是群论中的一个简单事实. 我们可以换一个方式叙述这个事实：令 $n_G : G \to G$ 为映射 $g \mapsto g^n$, 则 n_G 的象为 $\{e\}$.

这个命题的几何化就给出这样一个问题：

问题　设 $G \to S$ 为有限平坦群概形, 次数为 n, 令 $n_G : G \to G$ 为取 n 次幂的态射, 是否有 $n_G = 0$ (即 n_G 经过 S)?

这就是 Tate-Oort 问题 (见文献 [3], 关于群概形的定义和性质可参看文献 [1] 和文献 [2]).

这个问题用代数的语言可以这样理解：

定义　设 R, A 为有单位元的环, 其中 R 为交换环. 记 $\mu : A \otimes_R A \to A$ 为环同态 $a \otimes_R b \mapsto ab$ (即为 A 的乘法). 设 $\delta : R \to A$ 为环的单同态 (由此将 R 看作 A 的子环), $\iota : A \to A$, $\nu : A \to A \otimes_R A$, $\varepsilon : A \to R$ 为 R- 代数同态 (即为环同态且将 R 的元保持不变), 满足

(i) $(\mathrm{id}_A \otimes_R \nu) \circ \nu = (\nu \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ \nu : A \to A \otimes_R A \otimes_R A$ (“余结合律”);

(ii) $(\varepsilon \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ \nu = (\mathrm{id}_A \otimes_R \varepsilon) \circ \nu = \mathrm{id}_A : A \to R \otimes_R A \cong A$ (“余单位元”);

(iii) $\mu \circ (\iota \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ \nu = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes_R \iota) \circ \nu = \delta \circ \varepsilon : A \to A$ (“余逆元”),

则称 A 为 R 上的一个Hopf 代数. 如果此时还有

(iv) $\eta \circ \nu = \nu : A \to A \otimes_R A$, 其中 $\eta(a \otimes_R b) = b \otimes_R a$,

则称 A 为余交换的.

例如, 设 G 是一个群, $A = R[G]$, 即 G 在 R 上的群代数 (其中的元素形如 $a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r$, $a_i \in R$, $g_i \in G$, 加法按分量系数相加, 乘法用群 G 的乘法), 则 A 具有一个 Hopf 代数结构.

注　我们可以这样理解公理 (i), (ii) 和 (iv)：设 A 作为 R 模同构于 R^n, 令 $A^D = \mathrm{Hom}_R(A, R)$, 即 A 的对偶模, 则 ν 的对偶给出 A^D 的“乘法”$\nu^D : A^D \otimes_R A^D \to A^D$, ε 的对偶给出 $\varepsilon^D : R \to A^D$, (i) 说明乘法 ν^D 满足结合律, 而 (ii) 说明 $\varepsilon^D(1)$ 为 A^D 的单位元, 条件 (iv) 等价于 A^D 是交换环.

一个群概形等价于一个交换 Hopf 代数.

设 A 为 R 上的一个 Hopf 代数. 对任意正整数 n, 令 $\mu_n : A\otimes_R \overset{n}{\cdots} \otimes_R A \to A$ 为映射 $a_1 \otimes_R \cdots \otimes_R a_n \mapsto a_1a_2\cdots a_n$, 它可由 μ 归纳地给出. 类似地, 由 ν 可以归纳地给出 $\nu_n : A \to A\otimes_R \overset{n}{\cdots} \otimes_R A$. 令 $n_A = \mu_A \circ \nu_A : A \to A$. 上述 Tate-Oort 问题用 Hopf 代数的语言就可以表达为：

问题 ′ 设 A 为 R 上的一个交换 Hopf 代数. 若 A 作为 R 模同构于 R^n, 是否有 $n_A(A) = R$?

Tate-Oort 问题在 $G \to S$ 为交换群概形的情形 (用代数的语言就是 (iv) 成立) 有肯定的答案, 证明是 Deligne 给出的, 其中包含了高超的技巧. 对于一般情形, 尽管有很多杰出学者付出了艰苦的努力, 经过近四十年仍无实质性的进展.

除了上述交换群概形的情形外, Tate-Oort 问题在下列情形也有肯定的答案：

(A) S 为 $\mathbb{Q}$- 概形 (用代数的语言, R 是 $\mathbb{Q}$ 的扩环);

(B) S 为约化概形 (用代数的语言, R 是整环).

参 考 文 献

[1] Demazure M, Grothendieck A. Schemas en Groupes I-III (SGA 3). Berlin: Springer-Verlag, 1970

[2] Oort F. Commutative Group Schemes, Berlin: Springer-Verlag, 1966

[3] Tate J, Oort F. Group schemes of prime order. Ann Sc Ecole Norm Sup, 1970, 3: 1-21

撰稿人：李克正

首都师范大学

Tate 猜想

Tate Conjecture

代数簇中的闭子代数簇定义出上同调群类, 代数几何中的一个重要问题是刻画上同调群中闭子代数簇的上同调类生成的子空间, 复代数几何中的 Hodge 猜想就是这方面的重要问题, 算术代数几何中这个方面的问题是 Tate 猜想.

设 k 是有限生成的域, $\overline{k}$ 是 k 的可分代数闭包, X 是 k 上的 n 维光滑投影代数簇, ℓ 是与 k 的特征互素的素数, $H^i(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$ 是 $X \otimes_k \overline{k}$ 的 i 阶 ℓ adic 上同调群. 若 Y 是 X 的定义在 k 上余维数为 j 的闭子代数簇, 我们有标准映射

$$\mathrm{Tr} : H^{2(n-j)}(Y \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(n-j) \to \mathbb{Q}_\ell,$$

这里 $(n-j)$ 是 $n-j$ 次 Tate twist $-\otimes \mathbb{Q}_\ell(n-j)$. 这个映射与限制映射

$$H^{2(n-j)}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(n-j) \to H^{2(n-j)}(Y, \mathbb{Q}_\ell)(n-j)$$

复合, 得到线性映射

$$H^{2(n-j)}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(n-j) \to \mathbb{Q}_\ell.$$

根据 Poincaré 对偶定理

$$\mathrm{Hom}(H^{2(n-j)}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(n-j), \mathbb{Q}_\ell) \cong H^{2j}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(j),$$

上面的线性映射对应着 $H^{2j}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(j)$ 中的一个元素, 我们称这个元素是 Y 定义的上同调类. $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 作用在 $H^{2j}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(j)$ 上. 不难证明 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 在 $H^{2(n-j)}(Y \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(n-j)$ 上的作用平凡, 而且上面的映射 Tr、限制映射和 Poincaré 对偶定理都与 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 的作用相容, 所以 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 在 Y 定义的上同调类上的作用也平凡. 设 $A^j(X)$ 是 $H^{2j}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(j)$ 中由 X 的余维数为 j 的定义在 k 上的闭子代数簇的上同调类生成的 $\mathbb{Q}$ 向量空间. $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 在 $A^j(X)$ 上的作用平凡. Tate(文献 [1]) 猜想 $H^{2j}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(j)$ 中具有平凡 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 作用的元素一定是 $A^j(X)$ 中元素的 $\mathbb{Q}_\ell$ 线性组合.

设 A_1 和 A_2 是 k 上的 Abel 簇, Tate 猜想的一个推论是映射

$$\mathrm{Hom}_k(A_1, A_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(H^1(A_2, \mathbb{Q}_\ell), H^1(A_1, \mathbb{Q}_\ell))$$

是双射. 这个推论被 Faltings(文献 [1], 特征值 0) 和 Zahrin(文献 [3]、[4], 特征值 p) 证实. Faltings 的这项工作是他证明 Mordell 猜想中关键的一步.

参 考 文 献

[1] Faltings G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zhalkörpern. Invent Math 1983, 73: 349-366

[2] Tate J. Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arithmetic Algebraic Geometry, New York: Harper and Row, 1965, 288-295

[3] Zarhin J. Isogenies of abelian varieties over fields of finite characteristics. Math USSR-Sb, 1974, 24: 451-461

[4] Zarhin J. A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields of finite characteristic. Math USSR-Izv, 1974, 8: 477-480

撰稿人：扶　磊
南开大学

调和丛的上同调

Cohomologies on Harmonic Bundles

设 $\mathbf{V}$ 是复流形 M^m 上秩 n 的复平坦向量丛；等价地, 这相应于 M^m 的基本群的一线性表示：

$$\rho : \pi_1(M^m) \to Gl(n, \mathbf{C}).$$

如果 M^m 是紧凯勒流形且 ρ 是半单的表示, 据 Donaldson 和 Corlette 的结果, $\mathbf{V}$ 上有唯一的调和度量 u. 设 D 是 $\mathbf{V}$ 上的平坦联络. 使用调和度量 u, Cartan 分解以及 M^m 上的复结构, 人们能分解平坦联络如下：

$$D = \partial + \overline{\partial} + \theta + \overline{\theta},$$

其中 $\partial, \overline{\partial}$ 分别是 $(1,0)$, $(0,1)$ 型微分算子, 而 $\theta, \overline{\theta}$ 分别是取值于 $\mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ 的 $(1,0)$ 形式, $(0,1)$ 形式.

令 $D''_u = \overline{\partial} + \theta$, 称它为 Higgs 算子. 据萧荫堂的 Bochner 公式, 人们有

$$(D''_u)^2 = 0.$$

特别地, $(\mathrm{V}, \overline{\partial})$ 形成一全纯向量丛, 记为 E, θ 是 E 上的全纯同态 1 形式, 且 $\theta \wedge \theta = 0$.

现在, 人们有下列各种复形之间的拟同构 (quasi-isomorphism)：

1) $\mathbf{V}^D \to (\{\mathrm{A}^{\cdot}(\mathbf{V}), D\}) = \mathrm{A}^0(\mathbf{V}) \xrightarrow{D} \mathrm{A}^1(\mathbf{V}) \xrightarrow{D} \mathrm{A}^2(\mathbf{V}) \xrightarrow{D} \cdots)$;

2) $\{\Omega^{\cdot}(E), \theta\wedge\} \to \{\mathrm{A}^{\cdot}(E), D_u{}''\}$.

这里, $\mathbf{V}^D$ 是 $\mathbf{V}$ 的平坦截面的层；$\mathrm{A}^i(\mathbf{V})$ 是取值于 $\mathbf{V}$ 的 i 形式的层；$\Omega^i(E)$ 是取值于 E 的全纯 i 形式的层；$\mathrm{A}^i(E)$ 是取值于 E 的 i 形式的层.

注 1 第一个拟同构是 Poincaré引理的推论；第二个拟同构是 Dolbeaut 引理的推论.

问题 如果 M^m 是一拟紧凯勒流形, 即从紧凯勒流形除去一个适当的除子而剩下的空间, 上面情形将是怎样的？

为了解决这个问题, 人们必须修改上面的各种复形：使用相交复形替换 $\mathbf{V}^D$[1]；其余的使用相应的 L^2 形式替换.

注 2 (1) 当 $\mathbf{V}$ 是 Hodge 结构变分, 且 M^m 为代数曲线时, Zucker 给出了完备的回答 (参见文献 [2])；在高维情形, 第一部分被 Cattani-Kaplan-Schmid(参见文献 [3]) 和 Kashiwara-Kawai(参见文献 [4]) 独立证明, 第二部分被 Jost- 杨义虎 -Zuo 证明 (参见文献 [5]).

(2) 当 $\mathbf{V}$ 是 Unipotent 调和丛, 且 M^m 为代数曲线时, 问题被 Jost- 杨义虎 -Zuo 证明 (参见文献 [6]).

(3) 一般情形, 目前还没有任何结果.

参 考 文 献

[1] Cheeger J, Goresky M and MacPerson R. L^2-cohomology and Intersection homology of singular algebraic varieties. Seminar on differential geometry, ed. S T Yau, Ann Math Stuydies, 1982, 102: 303-340

[2] Zucker S. Hodge theory with degenerating coefficients: L^2-cohomology in Poincare metric. Ann Math, 1979, 109: 415-476

[3] Cattani E, Kaplan A, Schmid W. L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure. Inventiones Math, 1987, 87: 217-252

[4] Kashiwara M, Kawai T. The Poincare lemma for variations of polarized Hodge structure. Publ Res Inst Math Sci, 1985, 21: 353-407

[5] Jost J, 杨义虎, Zuo K. Cohomologies of polarized variation of Hodge structure over quasi-compact Kaehler manifolds. Journal of Algebraic Geometry, 2007, 16: 401-434

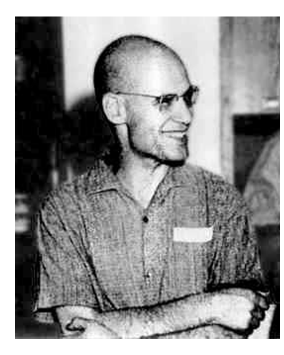
[6] Jost J, 杨义虎, Zuo K. Cohomologies of unipotent harmonic bundles on noncompact curves. Crelle's Journal, 2007, 609: 153-179.

撰稿人：杨义虎

同济大学

格拉腾迪克 (Grothendieck) 标准猜想

The Standard Conjecture of Grothendieck


格拉腾迪克

1949 年, Weil[7] 提出关于有限域上代数簇的 ζ 函数性质的猜想, 即有限域上光滑投影代数簇的 ζ 函数是有理函数, 满足函数方程和黎曼假设. Weil 同时指出, 为了证明这些猜想, 需要发展代数簇的上同调理论. 这个猜想最终被 Dwork[3], Grothendieck 和 Deligne[1] 证明. Grothendieck[5] 在研究 Weil 猜想时提出了标准猜想, 并在该猜想基础上, 建立了 motive 理论. 如今, motive 理论一直指引着算术代数几何的发展.

设 X 是域 k 上光滑投影代数簇, ℓ 是与 k 的特征互素的素数, $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 是 X 的 i 阶 ℓ-adic 上同调群, X 与投影空间的超平面的交集是 X 的子代数簇, 与这个子代数簇的上同调类作 cup 乘积定义出线性映射

$$L: H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)\to H^{i+2}(X,\mathbb{Q}_\ell).$$

记 $H^{2i}(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 中由余维数 i 的子代数簇生成的 $\mathbb{Q}$ 向量空间为 $A^i(X)$. 为了方便, 这里我们忽略 Tate twist. 设 X 的维数是 n.


韦伊

标准猜想由两个部分组成. 第一个部分称为 Lefschetz 标准猜想, Hard Lefschetz 定理 (文献 [2] 4.1) 说映射

$$L^i: H^{n-i}(X,\mathbb{Q}_\ell)\to H^{n+i}(X,\mathbb{Q}_\ell)$$

是同构 $(0\leqslant i\leqslant n)$. Lefschetz 标准猜想说的是映射

$$L^{n-2i}: A^i(X)\to A^{n-i}(X)$$

是同构 $\left(0\leqslant i\leqslant \dfrac{n}{2}\right)$. 第二个部分称为 Hodge 标准猜想, 说的是当 $i\leqslant \dfrac{n}{2}$ 时, $A^i(X)\cap\ker(L^{n-2i+1})$ 上的二次型

$$x\mapsto (-1)^i L^{r-2i}x.x$$

是正定的. 当 X 是代数曲面或复代数簇时, 这个猜想是已知的[4,6].

标准猜想有很多深刻的推论. 它可以推出 Weil 猜想, 而且推出 Frobenius 在光滑投影代数簇的上同调群上的作用是半单的, 它推出代数簇中 algebraic cycle 的 numberical equivalence 和 homological equivalence 是同一个等价关系.

参 考 文 献

[1] Deligne P. La conjecture de Weil I. Publ Math IHES, 1974, 43: 273-307
[2] Deligne P. La conjecture de Weil II. Publ Math IHES, 1981, 52: 313-428
[3] Dwork B. On the rationality of the zeta functions of an algebraic variety. Amer J Math, 1960, 82: 631-648
[4] Griffiths P and Harris J. Principles of Algebraic Geometry. John Wiley & Sons, inc, 1978
[5] Grothendieck A. Standard conjectures on algebraic cycles. Algebraic Geometry, Bombay Colloquium. Oxford, 1969, 193-199
[6] Hartshorn R. Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1979
[7] Weil A. Number of solutions of equations over finite fields. Bull Amer Math Soc, 1949, 55: 497-508

撰稿人：扶 磊
南开大学

关于全纯双截曲率的猜想

Conjecture of Holomorphic Bisectional Curvature

全纯双截曲率在复几何中的地位与 Riemann 截曲率在 Riemann 几何中的地位相同. 若一个紧 Kaehler 流形的全纯双截曲率是严格正的, 那么其必定双全纯同胚于复射影空间, 这是由 Mori, Siu-Yau 证明的 Frankel 猜想. 关于非紧情形, 有下面的重要猜想:

猜想 1 具有正的全纯双截曲率的非紧的完备 Kaehler 流形必定双全纯同胚于复欧氏空间.

猜想 2 具有负的全纯双截曲率的完备的单连通的 Kaehler 流形是一个 Stein 流形.

Frankel 猜想以及上面两个猜想, 可以看作 Poincare-Kobe 单值化定理在高维的对应, 所以有时也称它们为单值化问题. 近年来, 基于 Ricci 流, 猜想 1 的研究取得了一些进展. 例如: Ni 和 Tan[2] 证明在此流形具有极 (pole) 的条件下, 当全纯双截曲率非负时, 该流形是一个 stein 流形. 而对猜想 2, 到目前几乎还没有任何进展, 甚至不知道这样的流形是否一定非紧.

参 考 文 献

[1] 丘成桐, 孙查理. 微分几何讲义. 北京: 高等教育出版社, 2004

[2] Ni L, Tan L T. Plurisubharmoric Functions and structure of complete Kaehler manifolds with nonnegative curvature. J Diff Geom, 2003, 64: 457-524

撰稿人: 陈伯勇
同济大学

紧闭包与局部化相交换的问题

When does Tight Closure Commute with Localization?


诺特

紧闭包 (tight closure) 理论是由 M. Hochster 和 C. Huneke 在 20 年前发展起来的, 此后, 该理论成为交换代数的一个最活跃的研究领域. 因为这个新的理论的出现, 多个交换代数中的同调猜想得到了解决. 近几年, 紧闭包被应用到了代数几何.

现在来解释什么是紧闭包. 设 R 是一个包含特征值 $p>0$ 的域的交换 Noether 整环, I 是 R 的一个理想. I 的紧闭包 I^* 是如下定义的理想：

$$I^*=\{f\in R\mid 存在\ t\neq 0\ 使得对任意\ q=p^e\ 都有\ tf^q\in I^{[q]}\},$$

其中 $I^{[q]}$ 是 R 的由所有 $f^q, f\in I$ 生成的理想. 紧闭包的局部化问题是：设 S 是 R 的任意一个乘法封闭子集, 是否下式成立：

$$(S^{-1}I)^*=S^{-1}(I^*),$$

即紧闭包是否可以与局部化相交换. C. Huneke 在其专著[2] 的第十二章中称, 这是他们在建立紧闭包理论的第一天就想解决的问题, 被认为是紧闭包理论中最大的公开问题之一. 在这 20 年中, 有关这个问题的研究一直没有中断过, 文献 [2] 的第十二章总结了前面的研究工作, 此后, 又有一些这方面的工作, 例如, K. Smith[3] 证明了在 binomial 环中, 该性质是成立的.

该性质是不是总成立? Brenner 和 Monsky 在他们尚未正式发表的文献 [1] 中称, 他们找到了一个反例. 尽管如此, 这个问题仍然值得继续深入研究, 例如, 该性质在什么样的环中是成立的?

参 考 文 献

[1] Brenner H and Monsky P. Tight closure does not commute with localization. arXiv: 0710.2913v2 [math.AC] 29 Oct. 2007

[2] Huneke C. Tight Closure and its Applications. CBMS Lecture Notes in Mathematics No.88, AMS, Providence, 1996

[3] Smith K. Tight closure commutes with localization in binomial rings. Proc Amer Math Soc, 2000, 129: 667-669

撰稿人：唐忠明
苏州大学

局部上同调模的相伴素理想的有限性问题

The Finiteness of The Associated Primes of Local Cohomology Modules

先来解释交换代数中的两个概念. 一是相伴素理想, 二是局部上同调模.

我们总假设 R 是一个有单位元的交换 Noether 环. 设 M 是一个 R 模, $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想, 如果存在 M 的一个元素 m 使得 m 的零化子 $\mathrm{Ann}_R(m)$ 就是 $\mathfrak{p}$, 则称 $\mathfrak{p}$ 是 M 的一个相伴素理想. M 的相伴素理想表现了 M 的许多性质, 例如, M 的相伴素理想的并集就是 M 的所有零因子组成的集合. 当 M 是有限生成的 R 模时, M 只有有限多个相伴素理想. 但对不是有限生成的模, 该结论不一定成立.

再来解释局部上同调模. 假设 R 是一个局部环, I 是 R 的一个理想, M 是一个有限生成的 R 模, M 关于 I 的第 i 个局部上同调模 $H_I^i(M)$ 有几种等价定义方式, 其中的一个是

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n} \mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

局部上同调模与代数几何中的上同调模有密切的关系, 在交换代数中起着重要的作用. 例如, 可以用局部上同调模来刻画模的维数、深度等概念 (局部上同调模理论的参考文献首推文献 [2]). 然而, 作为 R 模, 局部上同调模一般不是有限生成的. 这使得局部上同调模的性质的研究成为交换代数研究的热点.

著名交换代数学家 C. Huneke 在文献 [3] 中提出了有关局部上同调模的一系列公开问题, 他猜测：尽管局部上同调模不一定是有限生成的, 但其相伴素理想一定只有有限个. 这个猜想源于 Grothendieck 的一个关于局部上同调模的类似猜想. 当 R 是包含域的正则局部环时, C. Huneke, R.Y. Sharp 和 G. Lyubeznik 证明这个猜想是对的. 在这方面的研究成果中, 一个有意思的结论是: Brodmann 和 Lashgari[1] 证明了：对 $H_I^0(M), H_I^1(M), \cdots$ 从左向右看, 第一个不是有限生成的局部上同调模只有有限多个相伴素理想.

然而, Katzman[4] 对这个猜想给出了一个反例. 尽管如此, 人们对局部上同调模的相伴素理想的有限性的研究的热情未减, 因为局部上同调模的许多性质的成立都与其相伴素理想的有限性有关. 在什么环上, 这个猜想成立? 即使相伴素理想的个数无限, 极小相伴素理想的个数是否有限? 等等仍是交换代数学家们感兴趣的问题.

参 考 文 献

[1] Brodmann M and Lashgari A. A finiteness result for associated primes of local cohomology modules. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 2851-2853

[2] Brodmann M and Sharp R Y. Local Cohomology - an algebraic introduction with geometric applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1998

[3] Huneke C. Problems on local cohomology, Free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry. Res Notes Math, 2(Boston, MA: Jones and Bartlett), 1992

[4] Katzman M. An example of an infinite set of associated primes of a local cohomology module. J Algebra, 2002, 252: 241-246

撰稿人：唐忠明

苏州大学

Calabi-Yau 模空间的陈数不等式

Chern Number Inequalities on Calabi-Yau Moduli

假设 M 是一个由 3 维卡拉比–丘成桐流形定义的模空间, 维数是 m. 由田刚的结果[7], M 是光滑的. 假设 w 是 M 上的 Weil-Petersson 度量. 在文献 [6] 中, 陆志勤定义了

$$w' = (m+3)\omega + \mathrm{Ric}(\omega\mathrm{ic}),$$

称 w' 为霍奇度量. 这个度量有很多很好的微分几何性质. 研究这个度量也是我们研究模空间局部微分几何的起点.

从模空间局部性质出发可以研究它的整体性质 Calabi-Yau 空间的整体性质是很丰富的. 其中陈–Weil 形式特别重要. Douglas- 陆志勤在文献 [3] 中证明了模空间的陈–Weil 形式的高斯–博涅型定理. 作为一个物理应用, 可以证明, 在一定的假设下, 可以组成宇宙的 Calabi-Yau 3 维流型的个数是有限的. Calabi-Yau 空间的陈–Weil 形式的另一个应用是在 BCOV 猜想[1,2] 的复几何部分. 此部分猜想由方浩–陆志勤–吉川谦一[4] 获得解决. BCOV 猜想的辛几何部分由 Zinger[8] 在 2007 年基于李骏–Zinger 的工作[5] 得到解决.

建立复流形上的陈数不等式历来是复几何的重要问题. 如上所述, 建立 Calabi-Yau 空间的陈数不等式更有物理的背景. 这是一个很重要的问题.

参 考 文 献

[1] Bershadsky M, Cecotti S, Ooguri H and Vafa C. Holomorphic anomalies in topological field theories. Nuclear Phys B, 1993, 405: 279-304

[2] Bershadsky M, Cecotti S, Ooguri H and Vafa C. Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes. Comm Math Phys, 1994: 165: 311-427

[3] M. Douglas and 陆志勤. in preparation

[4] 方浩, 陆志勤, 吉川谦一. Analytic torsion for Calabi-Yau Three-folds. J Diff Geom, 2008, 80: 175-259, math/0601411

[5] Li J, Zinger A. On the Genus-One Gromov-Witten Invariants of a Quintic Threefold. preprint, arXiv: math/0406105

[6] Lu Z Q. On the Hodge Metric of the Universal Deformation Space of Calabi-Yau Three-folds. J Geom Anal, 2001, 11(1): 103-118

[7] Tian G. Smoothnessoftheuniversaldeformationspaceofcompact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric. Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif, 1986), Adv Ser Math Phys, 1987, 1: 629-646

[8] Zinger A. The Reduced Genus-One Gromov-Witten Invariants of Calabi-Yau Hypersurfaces. preprint, arXiv:0705.2397

撰稿人：陆志勤

美国加州大学 Irvine 分校

量子层猜想

Quantum Layer Conjecture

研究一个流形的谱是黎曼几何的一个基本问题. 对于紧致黎曼流形来说, 所有的谱都是点谱, 即拉普拉斯算子的所有的谱都由那些重数为有限的特征值组成. 对于完备非紧流形来说, 情况要复杂的多. 一般来说, 谱可以由两部分组成：点谱和本性谱. 对于一大类完备非紧流形来说, 点谱的集合是一个空集. 例如, n 维欧式空间的点谱集就是一个空集.

在介观物理的研究中, 人们提出了量子层的概念. 量子层是一种带边的完备非紧流形. 它的定义如下：

假设 Σ 是一个三维空间的一个完备非紧的嵌入曲面. 我们假设 Σ 的第二基本形式在无穷远处趋向于零. 假设 α 是一个很小的正数, 则我们定义量子层 Ω 维三维欧式空间中到 σ 距离不大于 α 的点的集合.

σ 是一个带边的完备非紧的黎曼流形. 当考虑关于 Ω 的 Dirichlet 边值条件的拉普拉斯算子的谱的时候, 我们惊讶地发现, 对于很大一类曲面, 点谱的集合非空[1]. 不仅如此, 在这些情况下, 基态是存在的. 显然, 这些结果在物理上是很有用的.

我们现在回到数学. 由 Duclos, Exner, Krejčiřik[1] 等的工作, 我们提出了下列量子层猜想：

猜想 假设 Σ 是一个三维空间的一个完备非紧的嵌入曲面, 在无穷远处第二基本形式趋向于零. 假设 Ω 是用 Σ 定义的量子层. 假设 K 是 Σ 的高斯曲率. 如果

$$\int_{\Sigma} |K| < +\infty,$$

则 Ω 的基态不存在.

在文献 [1] 中, 上述猜想在总曲率

$$\int_{\Sigma} K \leqslant 0$$

的情况下被证明了. 所以我们现在只要证明正总曲率的情形就可以了. 有趣的是, 在总曲率为正的情况下, Σ 的拓扑很简单：它微分同胚于平面. 但这个情形却是最困难的情形. 在这种情形下, 我们需要了解 Σ 在无穷远处的渐进性质. 但是, 对于非紧完备曲面, 除了极小曲面以外, 我们对它们在无穷远处的渐进性质所知甚少.

在文献 [2] 中, 当 Σ 是一个凸曲面的时候, 量子层猜想得到了证实. 在文献 [3] 中, 我们给出了进一步的结果.

参 考 文 献

[1] Duclos P, Exner P and Krejčiřik D. Bound states in curved quantum layers. Comm Math Phys, 2001, 223(1): 13-28

[2] Lin C and Lu Z. Existence of Bound States for Layers Built over Hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$. J Funct Anal, 2007, 244: 1-25

[3] Lu Z. On the ground state of quantum layers. preprint, arXiv:0708.1563

撰稿人: 陆志勤
美国加州大学 Irvine 分校

奇点解消

Resolution of Singularities

奇点解消是代数几何中一个基本的问题. 设 X 是一个不可约的代数簇, S 是它的所有奇点构成的子集. 如果有一个非奇异的不可约代数簇 Y 及正常态射 $f: Y \to X$ 使 f 在 $f^{-1}(X-S)$ 上的限制是从 $f^{-1}(X-S)$ 到 $X-S$ 的同构, 则称 (Y,f) 为 X 的奇点的解消. 由于 S 一定是 X 的真闭子集, f 是一个双有理映射.

一个很自然的问题是奇点解消是否存在, 这就是奇点解消问题. 它的重要性可以从两点得到体现：① 如果奇点解消总是存在的, 那么任何一个代数函数域都有一个非奇异模型, 即一个非奇异的完备代数簇, 其函数域同构于给定的代数函数域; ② 由于非奇异代数簇的数学工具非常丰富, 通过奇点解消把奇异簇上的问题转化成非奇异簇上的相关问题往往有很好的效果.

当 X 的维数是 1 时奇点解消很容易构造, 在一般的代数几何或代数曲线的教科书里都能找到具体的方法. 当 X 的维数是 2 时答案也是肯定的, 对于基域特征为 0 的情形, 20 世纪 30 年代由 Walker 和 Zariski 给出证明, 对于基域特征不为 0 的情形 Abhyankar 在 1956 年给出证明.

在 1964 年 Hironaka 获得重大突破, 他证明了当基域特征为 0 时不管代数簇的维数是多少奇点解消总是存在的. 由于这项杰出的工作 Hironaka 获得了 Fields 奖. 他的原始论文很长, 证明非常复杂, 使读者望而生畏. 后来又有一些代数几何学家对他的证明作了大量的简化, 把 Hironaka 的证明几乎缩短到原来的 1/10.

当基域特征不为 0 时的奇点解消问题迄今为止尚未解决, 目前仍是代数几何最重大的未解决问题之一.

参 考 文 献

[1] Abhyankar, Shreeram S. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic p≠0. Ann of Math. 1956, 63(2): 491-526

[2] Danilov V I. Resolution of Singularities. Kluwer Academic Publishers, 2001

[3] Encinas S, Hauser Herwig. Strong resolution of singularities in characteristic zero. Comment Math Helv, 2002, 77(4): 821-845

[4] Hauser Herwig. The Hironaka theorem on resolution of singularities. Bull Amer Math Soc (N.S.) 2003, 40(3): 323-403

[5] Hironaka Heisuke. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I. Ann of Math, 1964, 79(2): 109-203

[6] Kollar Janos. Lectures on Resolution of Singularities. Princeton: Princeton University Press, 2007

[7] Zariski Oscar. The reduction of the singularities of an algebraic surface. Ann of Math, 1939, 40(2): 639-689

撰稿人：杨劲根
复旦大学

球和代数区域的刚性

Rigidity Problems in Ball and Algebraic Domain

复流形间全纯映射的刚性问题的研究是复分析和复几何中最基本的问题之一. 对于这一问题的研究揭示的不仅仅是这一领域本身的美, 还在于它在经典动力学、微分几何、Lie 群等其他领域的应用中所扮演的重要角色, 而复流形间全纯映射的刚性问题一般只能运用整体不变量. 对于带正则边界的开流形间的映射, 这一问题的研究可以非常方便地转化为研究它们的边界所诱导的 CR 映射. 它们的存在, 即使只是在局部上存在, 要求 CR 不变量满足特定的相容性条件. 如果流形有很好的对称性, 我们可以从 CR 不变量的局部相容性方程, 得到一些整体定义的微分方程. 这就使得硬分析能够用来处理这类问题. 这一想法首先出现在文献 [1] 中, 并被应用解决了一个长期悬而未决的问题. 这也为进一步研究 CR 映射和全纯映射提供了一种思想.

Liouville 定理是一个经典的刚性定理, 它指出当 $n \geqslant 3$ 时, $\mathbf{R}^n$ 中两个开区域间的共形映照一定是 Mobius 变换. 在多复变和 CR 几何范围内, 著名的 Poincaré 刚性问题告诉我们, 任何非常数的全纯映照, 如果把 ∂B^2 中的一片映射到 ∂B^2 中的一片, 那么它一定是一个分式线性映射. 由 Hartogs-Bochner 延拓定理, 任何定义在 ∂B^2 上的 CR(全纯) 函数全纯延拓到球 B^2 上. 因此, Poincaré 的定理说明 B^2 到自身逆紧全纯映照, 如果能全纯延拓至 B^2 的一个领域, 则一定是一个分式线性映照, 且一定是 B^2 的自同构群. 在 1978 年, Alexander[2] 把 Poincaré 的定理进行了推广, 证明了下述著名的定理：当 $n > 1$ 时, 对于 C^n 中的单位球 B^n, 它到自身的逆紧全纯映射是一个自同构.

注意到, 对于一个复的仿射直线 L, 在球上的双曲 Kobayashi 度量下, $L \cap B^n$ 是一条复测地线, 并且 B^n 的自同构群把仿射直线映成仿射直线. 因此 Alexander 的这一结果告诉我们 $B^n (n > 1)$ 到自身的逆紧全纯映照保持 B^n 中的复测地线. 更一般地, 我们说从 B^n 到 B^N 的映射是一个线性映射或全测地嵌入, 如果它把 B^n 中的复测地线映成 B^N 中的复测地线. 文献 [8] 首先研究了复空间中不同维数的球之间的逆紧全纯映射的结构. 他证明了当 $n > 2$ 时, 从 B^n 到 B^{n+1} 的逆紧全纯映射, 如果三次可微到边界, 则一定是一个全测地嵌入. 这里我们要说明的是, 对于不同维数的欧氏空间中的开集, 它们间的共形映射没有 Liouville 刚性定理. 因此, Webster 的定理揭示了在高维情形下, 全纯映射比实共形映射具有更强的刚性. 在

Webster 之后这一方面进一步的工作包括文献 [3]~[5] 等. 在文献 [1] 中, 我们利用与上面提到的工作完全不同的方法, 证明了当 $N < 2n-2$ 时, 任何从 B^n 到 B^N 的逆紧全纯映射, 如果边界有二阶光滑, 一定是线性的. 这就证明了由许多数学家在 20 世纪 80 年代提出的未解决的问题. 这里在边界有二阶光滑条件要求, 是用来建立一些必要的基本 CR 不变量. 关于这方面有下面几个未解决的问题：

问题 1 是否存在一个正数 $\alpha < 2$, 使得任何从 B^n 到 $B^N(N \leqslant 2n-2)$ 的逆紧全纯映射且 C^α 光滑到边界, 一定是线性映射? 满足这一性质的最小的 α 将是什么样?

问题 1 的主要困难在于当 $\alpha < 2$ 时, C^α 光滑的正则假设使得我们很难利用映射的一些几何信息.

在文献 [6] 中, 发现了球与球之间全纯映射的一个新的几何结构和建立了一个新的部分线性定理. 这就对球与球之间逆紧全纯映射的部分线性性质给出了一个完整的描述. 文献 [6] 的结果建立了当 $N \leqslant n(n+1)/2$ 时, 从 B^n 到 B^N 的逆紧全纯映射的边界正则性定理. 然而, 下面这个长期悬而未决的的问题还是没有解决.

问题 2 假设 $M_1 \subset C^n$ 和 $M_2 \subset C^N$ 是球面上的两片开区域, 并且假设 f 是一个从 M_1 到 $M_2(1 < n < N)$ 的 CR 映射. 我们能否找到一个与 $N-n$ 无关的固定常数 t, 使得 f 如果在 M_1 上 C^t 光滑, 那么一定是有理映射? 进一步, 能否取 $t=3$ 或 $t=2$?

问题 2 的关键之处在于能否找到一个与余维数无关的 t. 如果 t 允许依赖于 $N-n$, 问题 2 已经由文献 [7] 所解决.

当 $N \geqslant n(n+1)/2$ 时, 从 B^n 到 $B^N(N \leqslant 2n-2)$ 的逆紧全纯映射不再有部分线性性质. 然而, 这些映射仍然有许多未知的几何结构值得我们去挖掘, 这些将是解决问题 2 的关键.

另一个相关问题研究的是不同维数的复空间中球与球之间有理逆紧映射的次数估计.

问题 3(D'Angelo) 假设 M_1, M_2 和 f 如同问题 2. 假设 f 是有理的. 那么 f 最大可能的次数是多少?

对于问题 3, 文献 [7] 用文献 [8] 中的一个次数计算引理得到了一个界, 文献 [9] 把 Forstneric 的工作改进到了关于 N 的平方次的界. 我们相信这个次数能被一个关于 $N-n$ 的线性函数界住.

参 考 文 献

[1] Huang X. On a linearity problem of proper holomorphic mappings between balls in complex spaces of different dimensions. Jour of Diff Geom, 1999, 51: 13-33

[2] Alexander H. Proper holomorphic maps in C^n. Indiana Univ Math Journal, 1977, 26: 137-146

[3] Cima J and Suffridge T J. A reflection principle with applications to proper holomorphic mappings. Math Ann, 1983, 265: 489-500

[4] Faran J. The linearity of proper holomorphic maps between balls in the low codimension case. J Differential Geom, 1986, 24: 15-17

[5] Forstneric F. A survey on proper holomorphic mappings//Proceeding of Year in SCVs at Mittag-Leffler Institute. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992

[6] Huang X. On a semi-linearity property for holomorphic maps. Asian Jour of Math, 2003, 7(4): 463-492

[7] Forstneric F. Extending proper holomorphic mappings of positive codimension. Invent Math, 1989, 95: 31-62

[8] Webster S. On mapping an $(n+1)$-ball into the complex space. Pac J Math, 1979, 81: 267-272

[9] Meylan F. Degree of a holomorphic map between unit balls from C^2 to C^n. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 1023-1030

撰稿人：黄孝军

Rutgers University, 武汉大学

群作用下全纯映射的刚性问题

Rigidity Problem of The Holomorphic Mapping Under The Group Action

研究这一问题的动机来源于微分几何和遍历理论中的著名超刚性问题：假设 G_1 和 G_2 为二个非紧半单 Lie 群, 且 $\dim(G_2) \geqslant \dim(G_1)$. 假设 $\Gamma_j \subset G_j$ 为 (满足一定的稠密或 co-compact 假设的) 格 (lattice), 并且存在一个单同态 $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. 我们能否把 ϕ 延拓成从 G_1 到 G_2 的整体同态? 当群的实秩至少是 2 时, 由 Mostow, Margulis 和 Mok-Siu-Yeung (参见文献 [4]) 等的工作, 这一问题已经得到了很好的解决. 在秩为 1 的情形, 本质上有四种情形需要考虑：自同构群为实的情形和复的情形、四元双曲空间, 以及双曲 Cayley 平面. 在 Mostow, Gromov-Piastetski-Shaprio, Johnson-Milnor, Corlette, Mok-Siu-Yeung 等的工作后 (文献 [2] 中有相关的参考文献), 还未被解决的重要情形是当 G_1=Aut(B^n), G_2=Aut(B^N) 并且 $1 < n < N$, Γ_1 在 G_1 中 co-compact 且 $\phi(\Gamma_1)$ convex co-compact. (注意到当 $n = 1$ 时, Mostow 构造了反例). 这一问题可运用调和分析理论, 转化为下面的问题 (参见文献 [1]、[2]、[4])：

问题 假设 $B^n \subset C^n$ 且 $B^N \subset C^N$ 为单位球, 且假设 f 是从 B^n 到 $B^N (n, N > 1)$ 的逆紧全纯嵌入. 假设存在一个离散子群 $\Gamma \subset$ Aut(B^N) 使得 Γ 固定 $M = f(B^n)$ 且作用在 M 上 co-compact. 那么 f 是否是一个线性嵌入?

Gromov 等的结果证明了如果群来自于实双曲空间的等距同构群, 那么超刚性不成立. Corlette 的结果表明, 当 $n \geqslant 2$ 时的四元数空间 Q^n 或双曲 Cayley 平面的双曲球的等距同构群, 超刚性确实成立 (文献 [2] 中有对这一问题更详尽的叙述). 因此, 当 $n > 1$ 时, 找出单位球 B^n 中自同构群 Aut(B^n) 的性质就显得非常有意义. 在这一点上, 当 $n \geqslant 2$ 时, 四元数 Q^n 是否有比 C^n 更强的刚性性质? 上述问题的解决, 不管是从复分析的角度, 还是从遍历理论、动力学和 Lie 群等方面的角度来考虑, 都是非常必要的. 我们已经提到, 当 $N \leqslant 2n - 1$ 时, 这一问题已经由 Cao-Mok[1] 给出了肯定的答案. 事实上, 由文献 [1] 的工作, 要回答此问题, 我们只需要证明对于球上的任意点, 至少存在一个复方向, 使得映射 f 在这一方向上是线性的. 当 $N < n(n+1)/2$ 时, 利用边界的 CR 不变量, 对边界 C^3 光滑的映射找到了部分线性性质.

参 考 文 献

[1] Cao H and Mok N. Holomorphic immersions between compact hyperbolic space forms.

Invent Math, 1990, 100(1): 49-61

[2] Corlette K. Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. Ann of Math, 1992, (2)135, 1: 165-182

[3] Huang X. On a semi-linearity property for holomorphic maps. Asian Jour of Math, 2003, 7(4): 463-492

[4] Mok N, Siu Y T and Yeung S K. Geometric superrigidity. Invent Math, 1993, 113: 57-83

[5] Siu Y T. Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semipositive case. Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984). Berlin: Springer-Verlag, 1985, 169-192

撰稿人：黄孝军

Rutgers University, 武汉大学

雅可比猜想

Jacobian Conjecture

设 K 为代数闭域, $f_1, \cdots, f_n$ 为系数在 K 中的 n 元多项式 (即 $f_1, \cdots, f_n \in K[x_1, \cdots, x_n]$), 则 $f_1, \cdots, f_n$ 给出一个从 $V = K^n$ 到自身的代数映射

$$f : V \to V,$$
$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto (f_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, f_n(a_1, \cdots, a_n)).$$

定义 f 的雅可比矩阵为

$$J(f) = J(f_1, \cdots, f_n) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big),$$

其行列式 $\det(J(f))$ 称为 f 的雅可比行列式 (这些定义与实线性空间的可微映射的相应定义一致). 如果 f 是可逆的, 即存在代数映射 $g : V \to V$ 使得 $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_V$ (这等价于 $K[f_1, \cdots, f_n] = K[x_1, \cdots, x_n]$), 则我们知道

$$J(f)J(g) = J(g)J(f) = I_n,$$

因此

$$\det(J(f)) \det(J(g)) = 1.$$

由于 $\det(J(f))$ 和 $\det(J(g))$ 是多项式, 它们的乘积等于 1 只有当它们都是常数 (即在 K 中) 时才有可能.

1939 年, Keller[5] 归结出下面的猜想.

雅可比猜想 设 K 为特征 0 的域, 若 $f_1, \cdots, f_n \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 使得 $\det(J(f_1, \cdots, f_n)) \in K^*$, 则 $K[f_1, \cdots, f_n] = K[x_1, \cdots, x_n]$.

注 1 若将 K 换为特征 $p > 0$ 的域, 则上述猜想对任意 n 都不成立, 这只要看一个例子 $f_1 = x_1 + x_1^p$, $f_i = x_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ 即可知.

注 2 若 K 的特征为 0 而 $n = 1$, 上述猜想显然成立, 因为易见此时 f_1 只能是线性的.

注 3 如果将 $f_1, \cdots, f_n$ 换为解析函数, 则上述猜想对 $n \geqslant 2$ 也不能成立, 这只要看一个例子 $f_1 = x_1 \mathrm{e}^{-x_2}$, $f_2 = \mathrm{e}^{x_2}$, $f_i = x_i$ $(3 \leqslant i \leqslant n)$ 即可知.

对 $n \geqslant 2$ 的情形, 雅可比猜想迄今仍未解决. 关于雅可比猜想的历史和背景可参看文献 [1] 和 [3]. 1998 年 Smale 将雅可比猜想列为 21 世纪待解决的 18 个最重要的数学问题之一.

对任意 n, Keller[5] 证明了雅可比猜想在所谓有理情形是成立的, 即如果加一个条件 $K(f_1, \cdots, f_n) = K(x_1, \cdots, x_n)$ 则猜想成立. Campbell[2] 证明了在伽罗瓦情

形 (即假定 $K(f_1, \cdots, f_n) \subset K(x_1, \cdots, x_n)$ 为伽罗瓦扩张) 猜想成立. Wang[9] 证明了当所有 f_i 的次数 $\leqslant 2$ 时猜想成立. 在 20 世纪 80 年代, Bass, Connell, Wright[1] 和 Jagžev[4] 将问题约化到“三次齐次情形”(即每个 $f_i = x_i + h_i$, 其中 h_i 为三次多项式). 莫宗坚[6] 证明当 $n = 2$ 时, 若 $\max(\deg(f_1), \deg(f_2)) \leqslant 100$ 则猜想成立. 余解台[10] 将问题约化到每个 $f_i = x_i + h_i$, 其中 h_i 为非负实系数 $\leqslant 4$ 次多项式的情形.

值得指出, 由于某些事实的发现 (例如 $K[x, y, z]$ 的自同构群的野性), 现在数学界多数人相信雅可比猜想在 $n \geqslant 3$ 时应该是不成立的.

雅可比猜想的影响巨大不仅因为许多著名数学家投入研究而未取得成功 (事实上在 1950~1960 年已发表了若干错误的“证明”, 发表者有著名数学家 Segre, Gröbner, Shafarevich 等), 而且因为它涉及数学的几乎所有分支：代数、几何、拓扑、微分方程、组合学等等 (参看文献 [1]).

参 考 文 献

[1] Bass H, Connell E and Wright D. The Jacobian conjecture: reduction on degree and formal expansion of the inverse. Bull AMS, 1982, 7: 287-330

[2] Campbell L A. A condition for a polynomial map to be invertible. Math Ann, 1973, 205: 243-248

[3] A van der Essen. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Algbre non commutative, groupes quantiques et invariants (Reims, 1995) Smin Congr 2, Soc Math France, Paris, 1997, 55-81

[4] Jagžev A V. Endomorphisms of free algebras. Sibirsk Math Zh, 1980, 238: 181-192

[5] Keller O. Ganze Cremona-Transformationen. Monatsh Math Phys, 1939, 47: 299-306

[6] Moh T -T. On the Jacobian conjecture and the configuration of roots. J Reine Angew Math, 1983, 340: 140-212

[7] Smale S. Mathematical problems for the next century. Math Intelligencer, 1998, 20: 7-15

[8] Shpilrain V and Yu J T. Polynomial retracts and the Jacobian conjecture. Trans AMS, 2000, 352: 477-484

[9] Wang S S. A Jacobian criterion for separability. J Algebra, 1980, 65: 453-494

[10] Yu J T. On the Jacobian conjecture: reduction of coefficients. J Algebra, 1995, 171: 213-219

撰稿人：余解台
香港大学

霍普夫 (Hopf) 猜想

Hopf's Conjecture

整体微分几何的核心问题之一是研究局部不变量和整体不变量的关系, 研究曲率和拓扑的关系.

我们来考察曲面 S, 它上面有度量, 也就有 Gauss 曲率 K, 如果曲面是紧致无边的话, Gauss 曲率 K 就可以在整个曲面上进行积分. 一个曲面不一定只容有一个度量, 可以有另外一个度量, 换了度量以后, 相应的 Gauss 曲率 K 也就变了, 但积分值与曲面的度量无关, 而只与曲面的 Euler 示性数 $\chi(S)$ 有关. 这就是 Gauss-Bonnet 公式所揭示的深刻内涵. 对高维 Riemann 流形 M, Gauss 曲率可以推广为截面曲率, 它由 Riemann 曲率张量所决定, 被积函数是由曲率张量组成的很复杂的代数式子, 称为 Gauss-Bonnet 被积函数, 它在整个流形上的积分, 应该由这个流形的 Euler 示性数 $\chi(M)$ 所决定. 它的内蕴证明是陈省身得到的, 后来就称为 Gauss–Bonnet–陈公式.

对紧致无边的偶数维流形 $\bar{M}^{2n}$, 如果它容有非正截面曲率的 Riemann 度量, 那么, 它的 Euler 示性数满足

$$(-1)^n\chi(\bar{M}^{2n}) \geqslant 0 \tag{1}$$

(当截面曲率为负时, 上式为严格不等式). 这就是著名的 Hopf 猜想.

当 $n=1$ 时, 根据曲面中的 Gauss-Bonnet 公式, (1) 显然成立.

当 $n=2$ 时, 不难说明, Gauss-Bonnet 被积函数是正的, 因而积分为正, 根据 Gauss-Bonnet- 陈公式, (1) 也成立. (这个事实最早由 J. Milnor 作出的.)

但是, 一般地, 截面曲率的符号并不能决定 Gauss-Bonnet 被积函数的符号, 见 Geroch 的反例[5]. 这说明 Hopf 猜想不能只从纯代数的角度而获证.

为此, Dodziuk 和 Singer[10] 建议还可用 L^2 上同调的方法来研究这个问题.

为了将紧流形上的 Hodge 理论推广到完备非紧流形, M. Atiyah 引入 L^2 上同调理论. 他阐明了：L^2 上同调可用来得到完备流形紧致商的拓扑信息[1].

设 Γ 是自由地作用在我们完备非紧流形 M 上的离散的余紧的等距变换群, 从而 M/Γ 是紧流形. 设 $\mathcal{H}^q(M)$ 是 M 上的 L^2 调和 q 形式的 Hilbert 空间. 利用 Von Neumann 代数, Atiyah 可对无限维空间 $\mathcal{H}^q(M)$ 定义与 Γ 相关的维数, 从而定义了实值的 L^2–Betti 数

$$B_\Gamma^q(M) = \dim_\Gamma \mathcal{H}^q(M).$$

它也满足 Poincaré 对偶性. 再从 L^2-Betti 数的交叉和定义了 L^2-Euler 特征 $\chi(M,\Gamma)$. 更重要的是, Atiyah 证明了从实数交叉和得到的 L^2-Euler 特征是整数, 并且这个整数恰恰是紧商流形 M/Γ 的通常 Euler 特征

$$\chi(M,\Gamma)=\chi(M/\Gamma). \tag{2}$$

关于 L^2- 上同调的完整理论和应用见文献 [9].

Dodziuk-Singer 建议将我们的紧流形 $\bar{M}$ 问题提升到它的通用复盖流形上, 得到完备非紧流形 M. 根据 Atiyah 的定理, 如果我们能在截面曲率的条件下证明除了中间的 L^2 同调群其余都为零：

$$\mathcal{H}^n(M)\neq\{0\},\qquad 且当\ q\neq n\ 时,\quad \mathcal{H}^q(M)=\{0\},$$

也就得到了 Hopf 猜想的证明.

迄今, Hopf 猜想仅在一些附加条件下得到验证, 如截面曲率夹在两个负常数间有工作: Bourguignon-Karcher[3], Donnelly-Xavier[4] 以及 Jost-Xin[8]. Borel 对非紧型秩 1 对称空间证实了猜想. 如果, 流形具有 Kähler 度量, 在负截面曲率情形, 猜想已被 Gromov 所证实[6], 在非正截面曲率情形则被 Jost-Zuo[7] 以及 Cao-Xavier 所证实.

参 考 文 献

[1] Atiyah M F. Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebra. Astérisque 32-33, 1976, 43-72

[2] Borel A. The L^2-cohomology of negtive curved Riemannian symmetric spaces. Ann Acard Sci Fennicae, 1983, 10: 95-105

[3] Bourguignon J P and Karcher H. Curvature operators: Pinching easimates and geometric examples. Ann Sci Éc Norm Sup, 1978, 11: 71-92

[4] Donnelly H and Xavier F. On the differential form spectrum of negative curved Riemannian manifolds. Amer J Math, 1984, 106: 169-185

[5] Geroch R. Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand. Proc A M S, 1976, 54: 267-270

[6] Gromov M. Kähler hyperbolicity and L^2-Hodge theory. J Diff Geom, 1991, 33: 263-292

[7] Jost J and Zuo K. Vanishing theorem for L^2-cohomology on infinite covering of compact Kähler manifolds and applications in algebraic geometry. Comm Geom Annl, 2000, 8: 1-30

[8] Jost J and Xin Y L. Vanishing theorems for L^2-cohomology groups. J Rein angew Math, 2000, 525: 95-112

[9] Lück W. L^2-Invariant: Theory and Applications to Geometry and $K-$Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2002

[10] Singer I. Some remarks on operator theory and index theory. Springer Lect Notes Math, 1977, 575: 128-138

撰稿人：忻元龙
复旦大学

霍普夫 (Hopf) 问题

Hopf Problem

H.Hopf 提出过一个著名问题[1]：在 $S^2 \times S^2$ 上, 是否存在一个黎曼度量, 使得它的截面曲率处处是正的. 这个问题到现在也没有答案, 反映了人们在黎曼度量的认识上和掌握上的不足.

经典的 Gauss-Bonnet 定理告诉我们, 在 $S^1 \times S^1$ 上, 显然没有度量使得它的截面曲率 (此时是 Gauss 曲率) 恒为正, 因为二维环面的 Euler 数为零. 在 $S^1 \times S^2$ 上也不存在这样的度量[2]. 下一个自然的问题就是考虑 $S^2 \times S^2$. 当然, 容易验证乘积度量给出的截面曲率是非负的, 但是有零点. Bourguignon 等证明, 在乘积度量的一个邻域内, 没有正截面曲率的度量.

其实, 到现在为止, 在单连通的紧致四维流形里, 只发现四维单位球面和复投影平面上存在正截面曲率的度量. 人们希望把单连通的紧致的带正截面曲率度量的四维流形进行分类. 这是目前摆在几何拓扑学家面前的一个非常有意思的重要问题.

Hopf 问题可以演化成一个更一般的猜想：两个单位球面的乘积流形上不存在正截面曲率的度量.

参 考 文 献

[1] Yau S T. Problem section, in Lecture on differential geometry. Internatioanl Press, 1994
[2] Hamilton R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. J Diff Geometry, 1982, 19: 255-306

撰稿人：唐梓洲
北京师范大学

非线性狄拉克 (Dirac) 方程解的存在性问题

Existence of Solutions to Nonlinear Dirac Equations

n 维定向黎曼流形 M 称为 Spin 流形, 如果对于 M 上由正定向幺正标架构成的主 $SO(n)$ 丛 Q, 存在一个主 Spin(n) 丛 P, 使得它是 Q 的二重覆盖, 且与 P 和 Q 的群作用相容. 在 Spin 流形上存在主丛 P 的相关丛 (associated bundle) S, 称为旋量丛. 由 M 的 Levi-Civita 联络经过提升得到 S 上的 Spin 联络 ∇, 由此可定义作用在 S 上的一阶椭圆微分算子 —— 狄拉克算子 $D \equiv e_\alpha \cdot \nabla_{e_\alpha}$, 其中 $\{e_\alpha\}$ 是 M 上的局部幺正标架场, "·" 表示 Clifford 乘法[1,5]. 狄拉克方程是 Spin 流形上形如

$$D\psi = f \tag{1}$$

的一阶椭圆型方程组, 其中 $\psi \in \Gamma(S)$, 它们在几何与物理的许多问题中自然地出现. 非线性狄拉克方程的典型情形有

$$D\psi = m\psi + H_{ijk}\langle\psi^j, \psi^k\rangle\psi^l, \tag{2}$$

其中, $\psi = (\psi^1, \cdots, \psi^n)$, $\psi^i \in \Gamma(S)$, $H_{ijk} = (H^1_{ijk}, \cdots, H^n_{ijk})$, 而 m, H^a_{ijk} 是 M 上的数量函数, 一些三维流形中的曲面广义 Weierstrass 表示方程以及相对论粒子模型方程就属于这种类型.

问题 1　非紧流形上狄拉克方程解的存在性

在线性齐次情形 $D\psi = 0$, 通过证明狄拉克算子是带权 Sobolev 空间的连续同构, 可得到满足无穷远边界条件的解的存在性, 这一事实在 E. Witten 关于正质量定理的狄拉克算子方法证明中是一个关键部分[6]. 对一般情形的狄拉克方程, 为求空间对称解, 可以将方程约化到一组常微分方程, 运用变分原理, 可以得到这种解的存在性结果[4], 而关于一般形式的解, 相应的存在性结果如何建立, 是一个重要的几何分析问题, 它们将在几何与物理上具有应用潜力.

问题 2　狄拉克方程边值问题解的存在性

当 M 是紧致带边 Spin 流形时, 利用 Chirality 算子或边界算子的谱投影, 可以提出各种局部和非局部边界条件[2], 这种边值问题解的存在性在广义相对论的许多问题 (如彭罗斯不等式的证明) 中是非常有用的工具. 在线性方程 (1) 情形中, 当非齐次项属于 L^2, 边界值属于 $H^{\frac{1}{2}}$ 的时候, 问题本质上可归结为弱解的正则性估计, 由此可以证明相应的 Fredholm 性质, 得到解的存在性准则. 对于一般非线性方程,

如何得到其边值问题解的一般存在性结果, 同样是一个重要的问题, 其中关键是要建立解的整体 L^p 估计.

问题 3 含狄拉克方程的耦合方程组解的存在性

超对称理论中的许多问题可归结为含狄拉克方程的耦合方程组, 例如超对称非线性 sigma 模型[7] 和超对称 Yang-Mills 场. 以前者为背景, 可引入 Spin 流形上狄拉克方程与二阶椭圆型方程的耦合组[3]:

$$D\psi^i + \Gamma^i_{jk}(\phi)\nabla\phi^j \cdot \psi^k = 0, \qquad \tau^i(\phi) = \frac{1}{2}R^i_{jkl}(\phi)\langle\psi^k, \nabla\phi^j \cdot \psi^l\rangle, \tag{3}$$

其中, ϕ 是黎曼流形 $(M, (g_{\alpha\beta}))$ 到 $(N, (h_{ij}))$ 的映射, $\tau(\phi)$ 是其张力场, R^i_{jkl} 和 Γ^i_{jk} 分别是 N 的曲率张量和联络系数, $\psi^i \in \Gamma(S)$. 利用球面共形映射和 twist 旋量场, 可以构造 (3) 的一批非平凡解. 至于解的一般存在性定理则是一个具有挑战性的问题, 但它的解决对于超对称数学模型所提出的耦合方程组具有普遍的意义.

参 考 文 献

[1] Atiyah M F, Singer I M. The Index of Elliptic Operators: III. Ann of Math, 1968, 87: 546-604

[2] Booss-Bavnbek B, Wojciechowski K P. Elliptic Boundary Problems for Dirac Operatprs. Birkhaeuser, 1993

[3] Chen Q, Jost J, Li J Y, Wang G F. Dirac-harmonic maps. Math Zeit, 2006, 254: 409-432

[4] Esteban M J, Séré E. Stationary states of the nonlinear Dirac equation: a variational approach. Comm Math Phys, 1995, 171: 323-350

[5] Lawson H, Michelsohn M L. Spin Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1989

[6] Witten E. A new proof of the positive energy theorem. Comm Math Phys, 1981, 80: 381-402

[7] Witten E. Supersymmetric form of nonlinear sigma-model in two dimensions. Phys Rew D, 1977, 16: 2991-2994

撰稿人: 陈 群
武汉大学

高维单值化猜测

Higher Dimensional Uniformization Conjecture

Riemann 映射定理是复变函数课程中最基本的定理之一, 它叙述为复平面中的每个单连通区域均可由 1-1 解析映射映成单位圆盘. 该定理是由 Riemann 在 1851 年给出的, 但他当时的证明是不完整的 (因为他用到尚未验证的 Dirichlet 原理). 把 Riemann 映射定理推广成 Riemann 面的单值化定理是 Hilbert 在 1900 年给出的著名 23 个问题中的第 22 问题. 更具体地, 单值化定理叙述为每个单连通 Riemann 面必全纯同胚于复投影空间 CP^1, 或复平面 C, 或单位圆盘 D. 在 1907 年, Poincaré和 Koebe 证明了单值化定理.

在单值化定理的诸多推论中, 我们可以提及如下的一个推论. 给定一个 Riemann 面, 单值化定理告知它的万有覆盖必全纯同胚于 CP^1, 或 C, 或 D. 特别地, 覆盖变换群是模型空间 CP^1, C 或 D 的全纯同构群中的一个离散子群. 从而 Riemann 面的分类问题归结为模型空间中全纯同构群中的离散子群分类问题.

如何把单值化定理推广到高维情形是数学研究中的重要课题之一. 早在 20 世纪初 Poincaré就已证明在每个欧氏空间 $\mathbf{R}^{2n}(n>1)$ 上可赋予无穷多个复结构使得它们彼此之间互不全纯同胚. 这就是说纯粹拓扑条件完全不能区分高维流形上的复结构. 在 20 世纪 70 年代人们方逐步认识到需用几何条件来刻划高维流形上复结构. 高维单值化猜测由如下三个猜测组成:

Frankel 猜测 每个具正全纯双截曲率的紧致 Kähler 流形必全纯同胚于复投影空间 CP^n. 这个猜测已由 Mori 和肖荫堂–丘成桐在 1980 年左右解决.

丘成桐猜测 每个具正全纯双截曲率得完备非紧 Kähler 流形必全纯同胚于复欧氏空间 C^n.

伍鸿熙猜测 每个具负截面曲率的紧致 Kähler 流形均由复欧氏空间的某有界域覆盖.

在 20 世纪 80 年代初期, 莫毅明、肖荫堂和丘成桐等取得过重要进展. 他们利用解 Poincaré-Lelong 方程的方法证明当 Kähler **度规**具有极大体积增长和曲率超二次衰减时上述丘成桐猜测成立. 在 2002 年, 陈兵龙–邓少雄–朱熹平利用 Ricci 流方法证明在极大体积增长条件之下复二维的丘成桐单值化猜测成立. 其后, Chau-Tam 利用 Ricci 流方法把该复二维结果推广到任意高维.

后来, 在莫毅明等工作的基础上, 陈兵龙–朱熹平把极大体积条件改为第一陈类可积条件来给出复二维的高维单值化定理. 同时, 人们猜测该附加的第一陈类可积条件将是自动成立.

最后, 我们讨论一下伍鸿熙猜测. 虽然对此人们已有一些相关工作, 但关于负曲率流形的伍鸿熙猜测仍基本上毫无进展. 人们甚至连这样的流形上是否存在非凡的有界解析函数仍不知道 (如果伍鸿熙猜测成立, 则这样的流形上必存在大量非凡的有界解析函数).

参 考 文 献

[1] Chau A, Tam L F. A survey on the Kahler-Ricci flow and Yau's Uniformization Conjecture. to appear in Surveys in Differential Geometry, J Differential Geometry

[2] Zhu X P. The Ricci flow on complete noncompact Kahler manifolds, Collected Papers on Ricci Flow. Series in Geometry and Topology, Vol 37, International Press, 2003

撰稿人：邓少雄
中山大学

关于 K 等价代数簇的量子上同调环的猜想

Quantum Cohomologies Conjecture on K-equivalence Algebra Varieties

两个代数簇 X 和 X' 称为 K 等价, 如果存在双有理同态 $\phi : Y \to X$ 和 $\phi' : Y \to X'$ 使得

$$\phi^* K_X = \phi^* K_{X'},$$

其中 K_X 表示 X 的典范除子. K 等价的光滑代数簇有相同的 Betti 数 (参见文献 [1]、[2]). 但是一般来说它们有不同的上同调环结构. 那么, 是否存在一个新的合理的环结构使得它们是同构的?

阮勇斌[3] 和 Chin-Lung Wang[4] 于 2001 年提出以下猜想:

两个 K 等价的光滑代数簇有同构的量子上同调环.

类比于量子上同调环, 阮勇斌还提出了一种相对简单的环结构, 现被称为 Ruan 上同调环. 因此一个较弱的猜想是: *两个 K 等价的光滑代数簇有同构的 Ruan 上同调环*. Ruan 还将此类猜想推广到 orbifold 情形.

这些猜想已经构成了研究双有理几何与量子上同调关系的一个重要方向. 目前该问题还没解决, 但是已取得了很多重要进展.

一、李安民和阮勇斌在文献 [5] 中证明: 光滑三维代数簇在光滑 flop 下量子上同调环不变.

二、胡建勋和张皖川在文献 [6] 中证明: 如果两个射影簇通过一系列 Mukai flop 连结, 则它们有同构的 Ruan 上同调.

三、最近 Lee, Lin 和 Wang 在文献 [7] 中证明: n 维光滑代数簇在通常的光滑 flop 变换下量子上同调环不变.

四、最近陈柏辉、李安民、赵国松等研究了一类带有奇点的 flop, 证明了 Ruan 上同调环同构[8], 量子上同调环同构[9].

参 考 文 献

[1] Batyrev V. Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers//New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), Cambridge: Cambridge Univ Press, 1999, 1-11

[2] Wang C L. On the topology of birational minimal models. J Diff Geom, 1998, 50: 129-146

[3] Ruan Y. Cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds. math.AG/0108195

[4] Wang C L. K-equivalence in birational geometry//Proceeding of the Second International Congress of Chinese Mathematicians. International Press, 2003, math.AG/0204160
[5] Li A M and Ruan Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds. Invent Math, 2001, 145: 151-218
[6] Hu J and Zhang W. Mukai flop and Ruan cohomology. Math Ann, 2004, 330(3): 577-599
[7] Lee Y P, Lin H W and Wang C L. Flops, motives and invariance of quantum rings. to appear in Annals of Mathematics
[8] Chen B, Li A M, Zhang Q, Zhao G. Singular symplectic flops and Ruan cohomology. arXiv:0804.3144, to appear in Topology
[9] Chen B, Li A M, Zhao G. Ruan's Conjecture on Singular symplectic flops. arXiv: 0804.3143

撰稿人：李安民
四川大学

六维球面上复结构的存在性问题

The Existence of A Complex Structure on 6-Sphere

一个 $2n$ 维的微分流形叫一个近复流形或有近复结构, 如果存在一个切丛到自身的光滑同态 J, 使得 $J^2 = -1$. 一个微分流形叫 n 维复流形或有复结构, 如果它的每一点的开领域都有到复向量空间 C^n 的开领域的同胚, 使得转移映射是全纯的. 显然, 复流形上有诱导的近复结构.

反过来的问题是, 一个近复结构是否是由某一个复结构诱导而来 (如果是, 我们就叫这个近复结构可积)? 著名的 Newlander-Nirenberg 可积性定理[1] 给出了一个近复结构是可积的充分必要条件.

二维可定向流形存在近复结构, 而且一定可积. 在四维的情形, Ven de Van 给出了几个例子, 这些近复流形上没有复结构[2]. 在六维的时候, 人们最关心的是六维球面. 由 Cayley 数的乘法, 我们可以在六维球面上定义一个近复结构. 不难知道, 这个近复结构是不可积的[1]. 一个世纪著名难题是：在六维球面上存在可积的近复结构吗? 换句话说, 六维球面是复流形码? 陈省身和丘成桐都公开提出这个难题, 参见文献 [1]、[2].

这个问题曾引起许多人的关注, 有几篇已正式发表的文章最后都被发现是靠不住的. 使用黎曼几何的方法来研究这个问题, 就要在近复流形上引进跟近复结构相适应的度量. LeBrun[3] 证明：在六维球面上, 与标准度量相适应的近复结构一定是不可积的. 这个结果被文献 [4] 做了实质推广. 但是, 六维球面上是否存在可积的近复结构这个世纪著名难题依然没有解决.

参 考 文 献

[1] Chern S S. Complex Manifolds without Potential Theory. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[2] Yau S T. Nonlinear analysis in geometry. L'Enseig Math, 1987, 33: 109-158

[3] LeBrun C. Orthogonal complex structures on S^6. Proc Amer Math Soc, 1987, 101: 136-138

[4] Tang Z Z. Curvature and integrability of an almost Hermitian structure. International J of Math, 2006, 17: 97-105

撰稿人：唐梓洲

北京师范大学

曲面到四维欧氏空间的等距浸入的存在性

The Existence of An Isometric Immersion of A Surface in 4-Space

黎曼流形之间的 C^∞ 光滑浸入叫做等距浸入, 如果它的切映射是保持长度的. 根据 Nash 的著名定理, 任何黎曼流形都可以等距浸入 (或嵌入) 到某个维数 (较大) 的欧氏空间中. 对于二维的黎曼流形, Nash 定理给出到欧氏空间的等距浸入的维数很不理想. 一个基本难题是：是否每一个曲面都可以等距浸入到四维欧氏空间中？参见文献 [1] 中第 22 个问题. 丘成桐证明环面总可以等距浸入到四维欧氏空间中, 不论这个环面取什么样的度量.

许多曲面不能等距浸入到三维欧氏空间中. 例如, 著名的 Hilbert 定理说, (完备的 Gauss 曲率为 -1 的) 双曲平面就不能等距浸入到三维欧氏空间中. 人们自然要问, 双曲平面可以等距浸入到四维欧氏空间中吗？Rosendorn 证明：双曲平面到五维欧氏空间的等距浸入是存在的, 参见文献 [2].

对于紧致的曲面, 这个难题现在也没有答案. 例如, 常正 Gauss 曲率的实投影平面可以等距浸入到四维欧氏空间中吗？Gromov-Rochlin 证明它不能等距嵌入到四维欧氏空间中. 参见文献 [2]. 当然, 常正 Gauss 曲率的实投影平面到五维欧氏空间的等距嵌入是存在的, Veronese 嵌入就是一个很好的例子.

参 考 文 献

[1] Yau S T. Opne Problems in Geometry. International Press, 1994
[2] Gromov M. Partial Differential Relations. Berlin: Springer-Verlag, 1989

撰稿人：唐梓洲
北京师范大学

3 维流形上 tight 切触结构的分类

Classification of Tight Contact Structures on 3-Manifolds

3 维光滑流形 M 上的一个切触结构是指 M 上一个光滑的余维为 1 的分布 (即切平面场)$\xi \subset TM$, 其中 ξ 是最大不可积的, 这意味着若 ξ 局部由 1 形式 α 定义, 即 $\xi = \ker\alpha$, 则在整个定义域上 $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha \neq 0$. 若这样的 1 形式在 M 上整体存在, 则它称为 M 上的一个切触形式. M 上一个切触结构定义了 M 的一个定向. M 上切触形式的存在导致 M 的切丛 TM 的结构群可以约化到 $U(1)$, 这样一个约化称为 M 上一个殆切触结构. Gromov 证明, 对任一开 3 维流形 M, M 上切触结构的同伦类与 M 上殆切触结构的同伦类之间有一个一一对应. Lutz、Martinet 证明, 对任一闭可定向 3 维流形 M, M 的每个切平面场的同伦类中都有切触结构. 3 维流形上的切触结构根据其中有没有过度扭转 (overtwisted) 圆盘分为过度扭转的和 tight 两类. 3 维流形上 tight 切触结构的研究与 3 维流形的拓扑、3 维流形上的叶状结构等有很多联系. Eliashberg 证明, 对任一闭可定向 3 维流形 M, M 上切平面场的同伦类与 M 上过度扭转切触结构的同痕类之间有一个一一对应. 这样, 3 维流形上 tight 切触结构的同痕分类就成为研究 3 维流形上切触结构的核心问题.

3 维流形上 tight 切触结构的同痕分类近年来得到很多进展. 对 S^3、透镜空间、圆周上环面丛、闭曲面上圆周丛以及某些 Seifert 纤维空间, 其上 tight 切触结构的同痕分类已经完成, 但一般 3 维流形上 tight 切触结构的同痕分类还有很多问题需要解决.

对过度扭转切触结构, 也有一些问题需要研究, 如它的切触自同胚群的性质. 与此相关的一个问题是过度扭转切触结构中过度扭转圆盘的唯一性, 即对一个过度扭转切触结构, 其中任意两个过度扭转圆盘是不是切触同痕的? 这个问题与过度扭转切触结构中勒让德纽结的勒让德同痕分类也有联系.

参 考 文 献

[1] Eliashberg Y. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. Invent Math, 1989, 98: 623-637

[2] Etnyre J and Ng L. Problems in low dimensional contact topology//Topology and Geometry of Manifolds, Proc Sympos Pure Math. 71, Amer Math Soc, 2003, 337-357

[3] Honda K. On the classification of tight contact structures I. Geom Topol, 2000, 4: 309-368

撰稿人：丁　帆
北京大学

4 维光滑庞加莱 (Poincaré) 猜想

Smooth Poincaré Conjecture in Dimension 4

1904 年, Poincaré 给出如下猜想：一个单连通紧致无边 3 维流形一定同胚于 3 维球面 S^3. 这个问题称为 Poincaré 猜想, 是拓扑学发展中的焦点问题之一. Smale 于 1960 年证明高维的 Poincaré 猜想, 即若 M^n 是一个维数为 $n \geqslant 5$ 且同伦等价于 n 维球面 S^n 的紧致无边光滑流形, 则 M^n 同胚于 S^n. Freedman 于 1981 年证明 4 维的 Poincaré 猜想, 即若 M^4 是一个同伦等价于 S^4 的紧致无边 4 维拓扑流形, 则 M^4 同胚于 S^4. Perelman 于 2002 年、2003 年给出 Poincaré 猜想的证明概要.

在流形上的微分结构方面, Milnor 于 1956 年发现一些 7 维光滑流形, 它们同胚于 7 维球面 S^7, 但并不微分同胚于 S^7(带通常微分结构). Donaldson 于 1985 年发现一个 4 维光滑流形, 它同胚于 $\mathbf{C}P^2\sharp 9\overline{\mathbf{C}P}^2$, 但不微分同胚于 $\mathbf{C}P^2\sharp 9\overline{\mathbf{C}P}^2$. 另外, 由 Freedman、Donaldson 的工作可知存在怪异 $\mathbf{R}^4$, 即同胚于 $\mathbf{R}^4$ 但不微分同胚于 $\mathbf{R}^4$ 的光滑流形. 自 Freedman、Donaldson 的工作后, 4 维流形上微分结构的研究变得很活跃, 并且与规范场论、代数几何、辛拓扑等密切地联系在一起, 相互影响. 最新的结果表明, 有无穷多个光滑流形, 它们都同胚于 $\mathbf{C}P^2\sharp 3\overline{\mathbf{C}P}^2$, 但彼此之间互不微分同胚. 下述问题仍未解决：

4 维光滑 Poincaré 猜想：若 M^4 是一个同伦等价于 S^4 的紧致无边 4 维光滑流形, 则 M^4 微分同胚于 S^4.

由 Freedman 的结果知上述 M^4 一定同胚于 S^4.

参 考 文 献

[1] Donaldson S. Irrationality and the h-cobordism conjecture. J Differential Geom, 1987, 26: 141-168

[2] Freedman M. The topology of four-dimensional manifolds. J Differential Geom, 1982, 17: 357-453

[3] Kirby R. Problems in low-dimensional topology//Geometric Topology (Kazez W ed.), AMS/IP Stud Adv Math vol. 2.2, Amer Math Soc, 1997, 35-473

撰稿人：丁 帆
北京大学

波雷尔 (Borel) 猜想: 非球面性闭流形之间的同伦等价必同伦于一个同胚

Borel Conjecture: Any Homotopy Equivalence Between Two Closed Aspherical Manifolds is Homotopic to A Homeomophism

Borel 猜想是几何拓扑中有关流形分类的一个重要问题. 这里闭流形是指无边界的连通紧流形. 非球面性是指流形的万有覆盖是可缩的, 这等价于流形的同伦群除了基本群外都是平凡的. 注意, 同伦等价的闭流形有相同的维数.

在将闭流形按同胚进行分类中, 找出一些可计算的不变量来完全刻画同胚的流形是拓扑学的一个基本问题. 一维闭流形都同胚于圆周, 不存在分类问题. 二维流形也称为曲面. 闭曲面可同胚地分为三类：球面、有限个环面的连通和、有限个射影平面的连通和. 因此, 两个闭曲面同胚当且仅当它们有同构的基本群, 当且仅当它们有相同的 Euler 示性数和定向性. 因此基本群成为闭曲面的完全不变量, 定向闭曲面还有一个完全不变量 —— 亏格. 总之, 同伦的闭曲面必同胚.

据上面分析可提出一个基本问题: 同伦的闭流形是否同胚? 精确一点, 两个闭流形之间的同伦等价是否同伦于一个同胚? E. Moise 举例说明这个问题的答案是否定的, 其例子中的 1 维和 3 维同伦群都是非平凡的. Reidemeister 找到了一些透镜空间 —— 基本群为阶数大于 2 的循环群且万有覆盖为 3 维球面的流形, 它们同伦等价但不同胚. 透镜空间可视为球面性的闭流形, 讨论非球面性流形的分类就成为一个自然问题.

回顾一下 J. H. C. Whitehead 的结果 —— 两个闭流形之间连续映射是同伦等价的当且仅当它在所有同伦群上都诱导了同构. 因此对于非球面性流形而言, 只需讨论 1 维同伦群即基本群即可. 基于 1954 年 G. D. Mostow 的结果 —— 基本群同构的可解流形是同胚的, A. Borel 在 1954 年与 J. P. Serre 的一次通信中提出了后来以他名字命名的猜想.

F. T. Farrell 和 L. E. Jones 说明了以下诸情形的 Borel 猜想是正确的: 维数非 3 非 4 的非正曲率的 Riemann 流形, 维数非 3 非 4 且基本群为一般线性群的离散子群的闭流形.

Borel 猜想加上一些技术性方法后可以证明 Poincaré 猜想 —— 这一猜想被 G. Perelman 证明. Borel 猜想还蕴含整数 Novikov 猜想, 后者蕴含稳定 Borel 猜想 —— 基本群同构的两个非球面性闭流形与某个 Euclid 空间作 Cartesian 积后

同胚. S. Chang, F. T. Farrell 和郁国樑证明了具有有限渐近维数的群对应的整数 Novikov 猜想 (在此之前, 郁国樑证明了这类群的 Novikov 猜想), 基于这个结果季理真证明了当基本群是某些特殊域上一般线性群的子群时的稳定 Borel 猜想. 对一般情形, Erik Guentner, Romain Tessera 和郁国樑引进了有限复杂性概念并证明了当基本群是任意特征域上一般线性群的子群时的稳定 Borel 猜想.

现在讨论 Borel 猜想已综合运用了几何与拓扑、代数与分析, 特别是几何群论方面的工作. 不难预见, Borel 猜想的完全解决将使人们对几何拓扑的认识跃上一个新台阶.

问题说明: Borel 猜想是几何拓扑中有关流形分类的一个重要问题. 这是 A. Borel 于 1954 年根据 G. D. Mostow 的结果 —— 基本群同构的可解流形是同胚的 —— 与 J. P. Serre 的一次通信中提出了后来以他名字命名的猜想.

参 考 文 献

[1] Farrell F T. The Borel conjecture. Topology of high-dimensional manifolds, No. 1, 2 (Trieste, 2001), 225-298, ICTP Lect Notes, 9, Abdus Salam Int Cent Theoret Phys, Trieste, 2002

[2] Guentner E, Tessera R and Yu G. Complexity of metric spaces and the bounded Borel conjecture. preprint

[3] Hsiang Wu Chung. Borel's conjecture, Novikov's conjecture and the K-theoretic analogues. Algebra, analysis and geometry (Taipei, 1988), 39-58, World Sci Publ, Teaneck, NJ, 1989

[4] Mostow G D. Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces. Princeton: Princeton Univ Press, 1973

撰稿人：[1] 郁国　[2] 徐胜芝

1 Vanderbilt University

2 复旦大学

$\frac{11}{8}$ 猜想

$\frac{11}{8}$ Conjecture

四维流形的一个重要不变量是它的相交型, 它是一个整数环上的、行列式为 ±1 的对称矩阵. 经典的 Whitehead 定理表明, 单连通的闭四维流形的同伦型由它的相交型唯一决定. 相交型有奇、偶之分, 我们称一个相交型为偶 (奇) 的, 如果上述矩阵的对角线全为偶数 (奇数).

整数环上非正定的、行列式为 ±1 的对称矩阵可以完全分类, 作为线性变换, 它们可表为下面几个简单的对称矩阵的直和, (±1), $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 以及

$$\pm\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

不过, 整数环上正定的、行列式为 1 的对称矩阵却多得出奇, 当矩阵的阶数 n 足够大时, 它们等价类的个数大致以 n 的指数增长[1]. 1982 年, 借助于规范场理论, S.Donaldson[2] 发现了一个惊人的事实, 除了 (1) 的直和以外, 其他的那些整数环上正定的、行列式为 1 的对称矩阵都不能实现为闭、光滑的四维流形的相交型. 另一方面, 在 1981 年 M.Freedman[3] 证明整数环上所有的行列式为 1 的对称矩阵全都可以实现为闭的、拓扑四维流形的相交型. 两个不同理论的巨大差异给出了四维拓扑的奇妙与独特之处, 上述结果的一个间接推论是四维欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 上存在无限多个不同的光滑结构.

一个基本问题是, 什么样的整数环上非正定的、行列式为 1 的偶数型对称矩阵可以作为一个闭、光滑的四维流形的相交型? 著名的 11/8 猜想断言:

11/8 猜想： 设 M 是一个单连通的、闭光滑四维流形；如果 M 的相交型 I_M 为偶数型, 则

$$I_M = aE_8 \oplus b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 a 为偶数, 满足 $|b| \geqslant 3|a|/2$.

观察 I_M 的秩为 $8|a|+2|b|$, 而它的符号差为 $8a$. 上述猜想等价于断言, I_M 的秩大于或等于其符号差绝对值的 $\frac{11}{8}$ 倍.

通过应用 Seiberg-Witten 理论, 1996 年日本数学家 Furuta[4] 证明了 $|b| \geqslant |a|$, 并且当 $a \neq 0$ 时不等式是严格的. 一般情况如何仍是一个重要的公开问题.

给定一个四维流形 M 和一个同胚 $f : M \to M$, 则 f 诱导一个保持相交型的同构 $f_* : H_2(M) \to H_2(M)$. 四维流形理论中与相交型有关的另一个重要问题是哪些保持相交型的自同构可以被微分同胚实现.

Freedman 在他的证明四维拓扑庞加莱猜想[3] 的杰作中, 同时证明了单连通四维流形的任何一个保持相交型的自同构可以由拓扑同胚来实现. 不过, 许多保持相交型的自同构不能由微分同胚来实现, 参见文献 [5].

参 考 文 献

[1] Milnor J and D. Husemoller, Symmetric Bilinear Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1973

[2] Donaldson S K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J Differential Geom, 1983, 18: 279-315

[3] Freedman M. The topology of four-dimensional manifolds. J Diff Geom, 1982, 17: 357-454

[4] Furuta M. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. Math Res Lett, 2001, 8: 279-291

[5] Loenne M. On the diffeomorphism groups of elliptic surfaces. Math Ann, 1998, 310: 103-117

撰稿人：方复全
首都师范大学

Kashaev-Murakami-Murakami 体积猜想

The Volume Conjecture of Kashave-Murakami-Murakami

Mostow 刚性定理告诉我们, 一个有限体积的可定向双曲三维流形的体积是它的拓扑不变量. 而且 Thurston[8] 观察到, 对于任意一个实数 v, 最多有有限多个三维双曲流形以 v 为体积. 从而双曲三维流形的体积是一个非常有用的拓扑不变量. 近来在拓扑量子场论的一些工作表明, 双曲三维流形的体积与量子不变量的极限有关. Kashaev[3] 在 1997 年最早发现了这一惊人的关系, 并由 Murakami-Murakami[6] 将其推广到更一般的情形.

Kashaev-Murakami-Murakami 体积猜想 假设 K 是 S^3 中的一个纽结, $J_N(t)$ 是 K 的第 N 个染色 Jones 多项式 (定义为对应李代数 $SL(2,\mathbb{C})$ 的 N 维不可约表示的量子不变量, 参考文献 [2]、[5]), 那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\log|J_N(e^{2\pi\sqrt{-1}/N})| = v_3\cdot \parallel S^3-K\parallel,$$

其中 v_3 是正则理想双曲四面体的体积, $\parallel S^3-K\parallel$ 是三维流形 S^3-K 的 Gromov 范数. 特别地, 如果 S^3-K 有一个完备的双曲度量, 那么等式的右边恰好就是 S^3-K 的双曲体积.

染色 Jones 多项式是一个基于量子理论建立的纽结不变量. 这一猜想在两类截然不同的量之间建立了一个等式. 这一猜想的解决, 将有助于人们更深刻地认识三维流形和量子理论, 从而为量子场论的发展提供新的思路.

目前人们在这一猜想上的工作非常有限. Murakami 和 Yokota[9] 证明了 8 字结的情况; Kashaev 和 Tirkkonen[4] 对环面结证明了该猜想; 郑浩[9] 最近的工作表明这一猜想对一些卫星结也是正确的. 此外还可在文献 [7] 中找到该猜想的数值证据. 在这一猜想的基础上, 人们还提出了一些更大胆的猜测, 如复体积猜想[7] 和非完备双曲结构下的体积猜想[1] 等.

参 考 文 献

[1] Gukov S. Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A-polynomial. Comm Math Phys, 2005, 255(3): 577-627

[2] Jones V F R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull Amer Math Soc (N.S.), 1985, 12(1): 103-111

[3] Kashaev R M. The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. Lett Math Phys, 1997, 39(3): 269-275

[4] Kashaev R M, Tirkkonen O. Proof of the volume conjecture for torus knots. J Math Sci, 2003, 115: 2033-2036

[5] Kirillov A N, Reshetikhin N Yu. Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links, Infnite-dimensional Lie algebras and groups(Luminy-Marseille, 1988). Adv Ser Math Phys. World Sci Publishing, Teaneck, NJ, 1989, 7: 285-339

[6] Murakami H, Murakami J. The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. Acta Math, 2001, 186(1): 85-104

[7] Murakami H, Murakami J, Okamoto M, Takata T, Yokota Y. Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links. Experiment Math, 2002, 11(3): 427-435

[8] Thurston W P. Topology and geometry of 3-manifolds. http://www.msri.org/communications/books/gt3m/PDF

[9] Zheng H. Proof of the volume conjecture for Whitehead doubles of a family of torus knots. Chinese Ann Math Ser B, 2007, 28(4): 375-388

撰稿人：罗　锋

Rutgers University

瑟斯顿 (Thurston) 有效纤维化猜想

The Virtual Fibration Conjecture of Thurston

Thurston 有效纤维化猜想 每一个闭的双曲 3 流形有一个有限覆盖, 并且这个覆盖是 S^1 上的曲面丛.

在文献 [1] 里, Dunfeld 和 Thurston 用计算机实验对有效 Haken 猜想 (the virtual Haken conjecture) 在双曲 3 流形情况的正确性给出了强有力的证据. 他们在计算机的帮助下, 对 10986 个小体积双曲 3 维闭流形用 Hodgson-Weeks 统计作了检验, 并且对每一个都找出了足够大的有限覆盖. 也可以参看 Lackenby 的相关工作[2].

参 考 文 献

[1] Dunfeld N, Thurston W. The virtual Haken conjecture: experiments and examples. Geom Topol, 2003, 7: 399-441

[2] Lackenby M. Large groups, Property (tau) and the homology growth of subgroups. Math, GR/0509036

撰稿人：[1] 罗 锋 ([2] 王 慰译)

1 Rutgers University

2 中国科学院数学与系统科学研究院

Virtual Haken 猜想

Virtual Haken Conjecture

设 M 为可定向的 3- 流形. 若 M 中每个嵌入的光滑 2- 球面均界定 M 中一个 3- 实心球, 则称 M 是不可约的. 设 F 为 M 中一个真嵌入的可定向曲面. 若 F 不是边界平行的且含入诱导的同态 $\pi_1 F \to \pi_1 M$ 为单同态, 则称 F 为不可压缩曲面. 若可定向 3- 流形 M 是不可约的且包含一个不可压缩曲面, 则称 M 为 Haken 流形.

处理 Haken 流形的一个常用有效方法就是沿着 Haken 流形中的一个不可压缩曲面切开该流形, 这样会得到一个简单一些的 Haken 流形. 也正因如此, 人们得以对 Haken 流形的拓扑和几何已经有很透彻的了解. 对于非 Haken 流形, 人们了解的则相对少得多.

1968 年, F. Waldhausen[1] 提出了如下的猜想:

Virtual Haken 猜想　设 M 为紧致的可定向的不可约的基本群无限的 3- 流形, 则 M 有一个 Haken 流形的有限覆盖.

3- 流形的有限覆盖一直是 3- 流形拓扑理论中十分重要但了解却很少的课题. 如果 Virtual Haken 猜想成立, 则人们可以通过有限覆盖对非 Haken 流形的拓扑与几何有非常深刻的了解. 在 Thurston 的几何化猜想 (包括庞加莱猜想) 获得解决的当今, Virtual Haken 猜想成为 3- 流形拓扑理论中最为重要的猜想. Virtual Haken 猜想的解决, 将对 3- 流形拓扑的发展产生意义深远的影响.

四十年来, 围绕 Virtual Haken 猜想所展开的研究只取得少数零星的结果 (见文献 [2]~[4] 等). 最近, N. Dunfield 和 W. Thurston 验证了 Hodgson-Weeks 统计中的 10986 个闭的双曲 3- 流形均满足 Virtual Haken 猜想[5].

参 考 文 献

[1] Waldhausen F. The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds. Ann of Math, 1968, 88: 272-280

[2] Kirby R. Problems in low-dimensional topology. from:“Geometric topology(Athens, GA, 1993)”, Amer Math Soc Providence, RI(1997) 35-473, http://www.math.berkeley.edu/~kirby/

[3] Cooper D, Long D. Some surface subgroups survive surgery. Geometry and Topology, 2001, 5: 347-367.

[4] Lubotzky A. Eigenvalues of the Laplacian, the first Betti number and the congruence subgroup problem. Ann of Math, 1996, 144: 441-452

[5] Dunfield N and Thurston W. The virtual Haken conjecture: experiments and examples. Geom Topol, 2003, 7: 399-441

撰稿人：雷逢春
大连理工大学

仿射平坦流形的陈猜想

The Chern Conjecture for Affinely Flat Manifolds

一个 n 维光滑流形称为**仿射平坦流形**, 如果我们能够在该流形上找到一个坐标卡覆盖, 使得任意两个坐标卡之间的转移函数是 n 维欧式空间的仿射变换. 这样的一个坐标卡覆盖称为仿射平坦结构. 也就是说, 我们可以将欧式空间中的仿射结构无矛盾的局部提升到仿射平坦流形上. 另外, 我们还可以将仿射平坦流形定义为切丛上存在无挠的平仿射联络 (torsion-free flat affine connection) 的流形.

对于仿射平坦流形, 陈省身在 20 世纪 50 年代提出了一个深刻的猜想：

陈猜想　仿射平坦流形的 Euler 数一定是零.

众所周知, Euler 数是流形的拓扑不变量, 而仿射平坦是一个纯粹的几何概念. 这个猜想的精彩之处在于将这两个很不一样的数学概念联系在一起, 揭示了它们之间的深刻联系.

这个猜想出现后引起了不少大数学家的关注. 对于二维流形的情形, Benzécri[1] 和 Milnor[2] 证明陈猜想成立. 后来, Kostant 和 Sullivan[3] 证明了如果仿射平坦流形 M 上的仿射平坦结构是完备的, 也就是说 M 是一个仿射空间中某个离散群正则作用 (proper action) 的商空间, 那么陈猜想成立. 对于不完备的仿射平坦流形, Hirsch 和 Thurston[4] 证明了如果该流形的仿射平坦结构的和乐群 (Holonomy group) 是一些 amenable 群的自由乘积的有限扩张, 那么陈猜想成立. 这里 amenable 群的定义比较复杂, 这里就不做介绍了. 但是这类群包含了所有的有限群、交换群、可解群和紧致李群.

由于这个猜想是对于任意的仿射平坦流形所做的, 现在还没有解决的情形已经很难去验证. 最新的一些进展可以参见文献 [5].

这个猜想对别的领域也有不小的影响. 比如推动了对具有仿射平坦结构的有限维李群的研究并产生了不少成果. 另外, 与陈猜想有关的是 Gromov[6] 对仿射平坦流形的有界上同调 (bounded cohomology) 的猜想：仿射平坦流形的有界上同调都是零.

对陈猜想证明的探索必将加深人们对光滑流形的几何与拓扑之间联系的理解. 对数学的发展有着重要的意义.

参 考 文 献

[1] Benzécri J P. Variétés localement plates. Thesis, Princeton University, Princeton, NJ 1955

[2] Milnor J. On the existence of a connection with curvature zero. Comment Math Helv, 1957, 32: 215-223

[3] Kostant B and Sullivan D. The Euler characteristic of a compact affine space form is zero. Bull Amer Math Soc, 1975, 81: 937-938

[4] Hirsch M and Thurston W. Foliated bundles, invariant measures and flat manifolds. Ann Math, 1975, 101: 369-390

[5] Choi S Y. The Chern conjecture for affinely flat manifolds using combinatorial methodsl. Geometriae Dedicata, 2003, 97: 81-92

[6] Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups//Niblo G and Roller M eds. Geometric Group Theory, Vol 2. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1993, 1-295

撰稿人：于　立
南京大学

光滑复完全交的沙利文 (Sullivan) 猜想

Sullivan Conjecture for Complex Complete Intersections

光滑流形的分类问题是微分拓扑学中的核心问题之一, 对从几何、代数等数学领域中自然产生的流形进行分类是自然而有意思的问题, 关于复完全交的分类正是这样的问题.

令 $f_1, \cdots, f_r$ 为关于变量 $z_0, \cdots, z_{n+r}$ 的复系数的齐次多项式. 这组多项式在复射影空间 $\mathbb{C}P^{n+r}$ 中定义了一个复代数簇 X. X 称为一个复完全交 (complex complete intersection), 若 X 的复维数为 n. 当 X 是光滑流形时, 则称为光滑复完全交, 这时 X 是一个 $2n$ 维的光滑闭流形. 20 世纪 50 年代, R.Thom 观察到 X 的微分同胚型由多项式 $f_1, \cdots, f_r$ 的次数 $d_1, \cdots, d_r$ 决定, 而不依赖于这些多项式的系数. 数组 $\boldsymbol{d} = (d_1, \cdots, d_r)$ 称为多重次数 (multi-degree), 乘积 $d = d_1 \cdots d_r$ 称为全次数 (total degree). 由 $\boldsymbol{d}$ 决定的光滑复完全交可以记为 $X^n(\boldsymbol{d})$. 对于这些流形在微分同胚意义下的分类是微分拓扑学中尚未解决的问题.

由 Lefschetz Hyperplane 定理可知, 含入映射 $i : X^n(\boldsymbol{d}) \to \mathbb{C}P^{n+r}$ 是一 n 等价, 所以 $X^n(\boldsymbol{d})$ 和 $\mathbb{C}P^n$ 具有相同的 n 骨架. 另一方面, 通过对切丛的计算可知 $X^n(\boldsymbol{d})$ 的 Pontrjagin 类 $p_k \in H^{4k}(X^n(\boldsymbol{d}))$ 是 $x^{2k} \in H^{4k}(X^n(\boldsymbol{d}))$ 的倍数, 其中 $x \in H^2(X^n(\boldsymbol{d}))$ 为生成元. 从而我们可以比较不同的复完全交的 Pontrjagin 类是否相等.

Sullivan 猜想 $n > 2$ 时两个 n 维复完全交 $X^n(\boldsymbol{d})$,$X^n(\boldsymbol{d}')$ 微分同胚当且仅当它们的 Euler 数、全次数和 Pontrjagin 类都相等.

由于 Euler 数、全次数和 Pontrjagin 类都可以通过多重次数 $\boldsymbol{d}$ 显式地表达出来, 因此若 Sullivan 猜想成立, 则任给 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{d}'$, 我们可以判断 $X^n(\boldsymbol{d})$,$X^n(\boldsymbol{d}')$ 是否微分同胚.

这一猜想是基于 Sullivan 关于在有限不确定性下分类单连通流形的工作和有理同伦型的工作而做出的[1]. 作为 Kähler 流形, 复完全交是“形式”(formal) 的, 即 $X^n(\boldsymbol{d})$ 的有理系数上同调环决定了其有理同伦型. 而在给定了有理同伦型和 Pontrjagin 类的情况下, 至多只有有限个光滑流形满足这些给定的条件. 特别地, 对于复完全交, Sullivan 猜测这些条件完全决定了微分同胚型.

在维数较低的情形下, 人们对于猜测有如下的了解：

(1) 当 $n = 3$ 时. 此时 $X^n(\boldsymbol{d})$ 为单连通光滑 6 流形. 利用 Wall, Jupp 以及

Zhubr 关于单连通 6 流形的分类的工作, 可以证明 Sullivan 猜测在 $n=3$ 时成立.

(2) 当 $n=4$ 时. 利用 Kreck 改进的 Surgery 理论, 方复全和 S. Klaus 在拓扑范畴证明了 Sullivan 猜测成立.

20 世纪 50 年代开始发展起来的 Surgery 理论是流形分类的标准工具, 其应用模式是在一个给定的同伦型中分类所有的流形 (可以在光滑、分片线性或拓扑范畴中). 由于复完全交的同伦型只在中间维数以下是确定的 (Lefschetz 定理), 所以 Surgery 理论并不能直接应用于此问题的研究. 20 世纪 80 年代, Kreck 对 Surgery 方法做出了改进[2], 使之可以应用于 Sullivan 猜想, 并且将问题转化为某些配边群的计算. 当 $n=4$ 时, 方复全和 S. Klaus 计算了相应的配边群, 从而在拓扑范畴证明了 Sullivan 猜测成立[3]. 对于一般情形, Traving 在一定的条件下计算了这些配边群, 从而对于具有满足性质"对任意使得 $p(p-1)\leqslant n+1$ 的素数 p, 全次数 d 被 $p^{[(2n+1)/(2p-1)]+1}$ 整除"的多重次数 $\boldsymbol{d}$ 的复完全交 $X^n(\boldsymbol{d})$ 证明了 Sullivan 猜想[4].

如果不考虑光滑结构而将 $X^n(\boldsymbol{d})$ 视为拓扑流形, 则在拓扑范畴我们有相应的 Sullivan 猜测. 方复全证明了：当全次数 d 的素因子都不小于 $(n+3)/2$ 时, $X^n(\boldsymbol{d})$ 的 Euler 数、全次数和 Pontrjagin 类完全决定了 $X^n(\boldsymbol{d})$ 的同胚分类[5].

参 考 文 献

[1] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology. I.H.E.S. Publ Math, 1977, 47: 269-331

[2] Kreck M. Surgery and duality. Ann Math, 1999, 149: 707-754

[3] Fang F and Klaus S. Topological classification of 4-dimensional complete intersections. Manuscr Math, 1996, 90: 139-147

[4] Traving C. Klassifikation vollständiger Durchschnitte. Diplomarbeit, Mainz(1985), available under:http://ww.mfo.de/Staff/traving.pdf

[5] Fang F. Topology of complete intersections. Comment Math Helv, 1997, 72(3): 466-480

撰稿人：苏　阳

中国科学院数学与系统科学研究院

广义斯梅尔 (Smale) 猜想

Generalized Smale Conjecture

广义 Smale 猜想 假设 M 是一个闭的 3 流形, 其上有一个局部齐次的黎曼度量 (a locally homogeneous Riemannian metric) 使得 M 不被 $S^2\times S^1$ 覆盖.

(1) 如果 M 以 S^3, H^3 或可解几何 (Solv geometry) 作为模型, 那么 M 上的等距同构群 $I(M)$ 到 M 上的微分自同胚群 $Diff(M)$ 的含入是同伦等价.

(2) 如果 M 以 R^3 和幂零几何 (Nil gometry) 作为模型, 那么 M 上的仿射映射群 $Aff(M)$ 到 $Diff(M)$ 的含入是同伦等价.

(3) 如果 M 以 $H\times R$ 或 $Sl(2,R)$ 作为模型, 那么等距群 $I(M)$ 中恒同映射所在的连通分支到 $Diff(M)$ 中恒同映射所在的连通分支的含入是同伦等价.

最初 Smale 猜想是关于 S^3 的, 并且被 Hatcher[2] 以肯定的形式解决了. Hatcher[3] 和 Ivanov[4] 证明了对足够大的不可约流形, 猜想是正确的. 对双曲 3 流形的猜想是由 Gablai[1] 建立的. 在具有球几何的 3 流形中, 有许多情形猜想是正确的. (参看文献 [5], 在 P135-139 上有更完整的相关工作.) 于是由文献 [1]、[3] 和 [4], 没解决的情况就出现在非足够大具有 Seifert 纤维化的 3 流形的一个子集中了.

Ian Agol 认为这个猜想可以当作一个"参数化"的几何化猜想. 要是用 Ricci 流方法能对这个猜想给出一个统一的证明就好了. 这可能就要涉及到细致地了解 Ricci 流在手术下的参数化解是如何表现的了.

参 考 文 献

[1] Gabai David. The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $Isom(M)\simeq Diff(M)$. J Differential Geom, 2001, 58(1): 113-149

[2] Hatcher Allen E. A proof of a Smale conjecture, Diff(S^3)$\simeq O(4)$. Ann of Math, 1983, 117(2): 553-607

[3] Hatcher. Allen Homeomorphisms of suffciently large P^2-irreducible 3-manifolds. Topology, 1976, 15(4): 343-347

[4] Ivanov N V. Groups of diffeomorphisms of Waldhausen manifolds. (Russian) Studies in topology, II. Zap Naucn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov (LOMI), 1976, 66: 172-176, 209

[5] Kriby Rob ed. Problems in low-dimensional topology. AMS/IP Stud Adv Math, 2.2, Geometric topology(Athens, GA, 1993), 35-473, Amer Math Soc, Providence, RI, 1997

撰稿人： [1] 罗　锋　([2] 王　慰译)

1 Rutgers University

2 中国科学院数学与系统科学研究院

广义度量空间问题

Problem on Generalized Metric Spaces

问题背景 欧氏空间除具有线性结构外还具有度量结构, 它为描述序列的收敛理论奠定了基础. 但具有度量结构的对象很多, 它们未必是欧氏空间. 比如, 以 $C[0,1]$ 表示单位区间 $[0,1]$ 上的实值连续函数的全体之集, $\forall f,g \in C[0,1]$, 规定 $d(f,g) = \max\{|\ f(x)-g(x)\ |: x\in[0,1]\}$, 则 $(C[0,1],d)$ 就成为度量空间. 这时由 $d(f_n,f)\longrightarrow 0(n\longrightarrow 0)$ 所描述的收敛是函数列的一致收敛, 这里 $C[0,1]$ 不是欧氏空间, 可见度量空间是比欧氏空间广泛的概念. 进一步, 还有一些我们经常要在它上面讨论收敛理论而它又不具有相配套的度量结构的对象, 比如, 仍考虑 $C[0,1]$, 这时函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f 就不再能用 d 去描述, 而必须要在更广泛的拓扑空间中去描述才行. 设 X 是非空集, $\mathscr{T}$ 是 X 的若干子集之族, 如果 $\varnothing, X\in\mathscr{T}$ 且 $\mathscr{T}$ 对有限交和任意并运算封闭, 就称 $\mathscr{T}$ 是 X 上的拓扑, 称 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间, 称 $\mathscr{T}$ 中的元为开集, 称开集的补集为闭集, 称包含一个集的最小闭集为该集的闭包. $\mathscr{T}$ 的子族 $\mathscr{B}$ 叫 $\mathscr{T}$ 的基 (base), 是指 $\mathscr{T}$ 中任一开集都可表示为 $\mathscr{B}$ 中若干开集之并. 简称拓扑空间为空间, 人们关心什么样的空间是可以度量化的. 空间 $(X,\mathscr{T})$ 可度量化指 X 上存在一个度量 d, 使所有开球之集构成 $\mathscr{T}$ 的基.

问题陈述 设 $\mathscr{A}$ 是 X 中的一族集合, 则把 $\mathscr{A}$ 中的集并起来再取闭包和先把 $\mathscr{A}$ 中各集取闭包后再并起来一般是不相等的. 设对 $\mathscr{A}$ 的每个非空子族 $\mathscr{A}_0$, 对先取并再取闭包和先取闭包再取并总是相等的, 则称 $\mathscr{A}$ 具有闭包保持性质. 如果 $\mathscr{A}$ 是局部有限的, 即, 空间 X 中每个点都有一个小邻域只和 $\mathscr{A}$ 中的有限多个集相交, 则容易证明 $\mathscr{A}$ 具有闭包保持性质. J. Nagata 和 J. Smirnov 分别于 1950 年和 1951 年独立地证明了拓扑空间的度量化定理, 即, 空间 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且具有 σ 局部有限基. 这里正则性指 X 中每个点和不含该点的闭集可以用两个开集分开; σ 局部有限基指这种基 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 是可数多个子族 $\{\mathscr{B}_n\}$ 的并, 其中每个子族都是局部有限的. 例如, 实直线 $\mathbb{R}$ 就具有 σ 局部有限基. 事实上, 令 $\mathscr{B}_n = \{(k-1/n,k+1/n):k$ 是整数 $\}(n=1,2,\cdots)$, 则 $\mathscr{B}_n$ 就是局部有限的开集族, 可以看出全体 $\mathscr{B}_n$ 的并就是 $\mathbb{R}$ 的一个 σ 局部有限基. 有许多空间虽不一定是可度量化的, 但它们具有度量空间的许多良好性质, 称这类空间为广义度量空间. J. G. Ceder 于 1961 年将 Nagata-Smirnov 度量化定理中 σ 局部有限基弱化为 σ 闭包保持基, 称所得空间为 M_1 空间[1], 它是可度量化空间的推广. M_1 空间果然具有类

似于度量空间的许多良好性质, 比如: M_1 空间的开子空间仍是 M_1 空间; 可数多个 M_1 空间的乘积空间仍是 M_1 空间; 既开且闭的映射保持 M_1 空间; M_1 空间的稠密子空间仍是 M_1 空间, 等等. 在 M_1 空间的基础上再把 σ 闭包保持基弱化为 σ 闭包保持拟基 (quasi-base), 就得到广义度量空间 M_2, 这里 $\mathscr{B}$ 叫空间 X 的拟基是指对 X 的每个点 x 及其开邻域 U, $\mathscr{B}$ 中有 B 包含于 U 且 B 的内部包含 x. M_2 空间还可进一步弱化. 设空间 X 中每个闭集 C 都可表示为一列开集 $\{G(n,C)\}$ 的闭包的交, 且当闭集 C 是闭集 D 的子集时, 对每个 n 均有 $G(n,C) \subset G(n,D)$, 则称空间 X 为 M_3 空间或层空间 (stratifiable space). M_1 空间、M_2 空间和 M_3 空间通称为广义度量空间.

问题进展　早在 1961 年 J. G. Ceder 就证明了 $M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3$, 同时他提出问题：$M_2 \Rightarrow M_1$ 和 $M_3 \Rightarrow M_2$ 是否成立？G. Gruenhage 和 H. J. K. Junnila 分别于 1976 年和 1978 年独立地证明了 M_3 空间和 M_2 空间是等价的[2,3], 但 $M_2 \Rightarrow M_1$ 或 $M_3 \Rightarrow M_1$ 是否成立是至今没有解决的难题. 所谓广义度量空间问题就是问：是否每个 M_3 空间都是 M_1 空间？著名拓扑学家 M. Rudin 于 1990 年在她的著名文章 " Some Conjectures" 中倾向于认为广义度量空间问题的答案是肯定的[4], 而 P. M. Gartside 和 E. Reznichenko 则于 2000 年给出了一种可能的构造反例的方法[5]. 关于广义度量空间问题的进一步论述可参看文献 [6]、[7].

参 考 文 献

[1] Ceder J G. Some generalizations of metric spaces. Pacific J Math, 1961, 11: 105-125

[2] Gruenhage G. Stratifiable spaces are M2. Topology Proc, 1976, 1: 221-226

[3] Junnila H J K. Neighbornets. Pacific J Math, 1978, 76: 83-108

[4] Rudin M. Some conjectures//Open Problems in Topology. Amersterdam: North-Holland, 1990, 183–193

[5] Gatside P M, Reznichenko E. Near metric properties of function spaces. Fund Math, 2000, 164: 97-114

[6] Anderson R D et al. Recent Progress in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 2002, 545–575

[7] 高国士. 拓扑空间论. 北京：科学出版社, 2000

撰稿人：王国俊

陕西师范大学

矩阵的拓扑相似问题

Topological Similarity Problem of Matrices

设 A, B 是两个 $n \times n$ 的实矩阵. 我们称两个矩阵 A, B 是拓扑相似的, 如果存在一个保持原点①的同胚 $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 使得 $h(Ax) = Bh(x)$, 对于任何 $x \in \mathbf{R}^n$.

如果同胚 h 是线性变换, 则 h 必定由一个可逆矩阵 C 诱导. 不难看出, $CA = BC$. 换言之, A 和 B 线性相似.

在 1935 年, De Rham 猜想拓扑相似的矩阵一定是线性相似的.

对于 2 阶矩阵, 通过定义旋转数, 庞加莱证明拓扑相似的矩阵一定是线性相似的. 1973 年, Kuiper 和 Robbin[1] 证明 De Rham 猜想对于特征值不在单位圆周上的矩阵成立, 并且把 De Rham 猜想归结为周期矩阵的情形. 此处我们称一个矩阵 A 是周期矩阵, 如果存在一个正整数 m, 使得 $A^m = I$, 其中 I 是恒同矩阵, 这样的最小正整数 m 被称为 A 的周期.

对于周期矩阵 A, B 而言, 线性相似问题是很容易判定的. 例如, 由约当标准型理论知道, A 和 B 线性相似的充要条件是它们所有的复特征值相等, 并有相同的重数. 更进一步可以证明, A 和 B 线性相似的充要条件是它们的迹相等.

De Rham 猜想的第一个反例是由美国数学家 Cappell 和 Shaneson[2] 在 1979 年给出的, 他们找到了两个 9×9 正交周期矩阵, 这两个矩阵拓扑相似但不线性相似.

1980 年, 项武忠、Pardon[3] 以及 Madsen, Rothenberg[4] 分别独立证明, De Rham 猜想对于周期不被 4 整除的周期矩阵成立.

如何完全刻画拓扑相似的周期矩阵仍是一个有趣的重要问题, 直至最近仍有一些重要进展[5].

参 考 文 献

[1] Kuiper N, Robbin J W. Topological classification of linear endomorphisms. Invent Math, 1973, 19: 83-106

[2] Cappell S, Shaneson J. Linear algebra and topology. Bull A M S, 1979, 1: 685-687

[3] Hsiang W C, Pardon W. When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent. Invent Math, 1982, 68(2): 275-316

① 即满足 $h(0) = 0$.

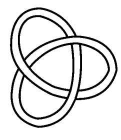
[4] Madsen Ib Rothenberg M. Classifying G spheres. Bull Amer Math Soc, 1982, 7: 223-226
[5] Ian Hambleton and Erik Pedersen K. Topological Equivalence of Linear Representations for Cyclic Groups: I, II. Annals of Mathematics, 2005, 161: 61-104

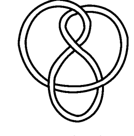
撰稿人：方复全
首都师范大学

纽结的交叉点数的计算和可加性

Calculating Crossing Number of Knots, and Additivity of Crossing Number

纽结是圆周在三维欧式空间中的嵌入. 如下图是一个三个交叉点 (crossing number) 的纽结和一个四个交叉点的纽结.

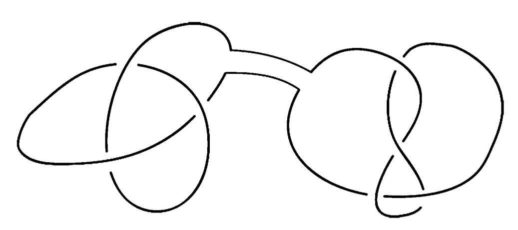




每个纽结 (tame) 都可用平面图画出, 但与之对应的的平面图有无穷多个. 一个纽结的交叉点数是该纽结的所有纽结图中交叉点数的最小值. 容易证明, 交叉点数至多为 2 的纽结一定是平凡的. 上图中的三叶结的交叉点数是 3.

一个重要的问题是：任给一个纽结, 确定其所有纽结图最小的可能交叉点数. 虽然数学家已经知道该问题是算法可解的, 并且也有具体的算法, 但是那些方法实用性不强. 例如, 给定一个 30 交叉点的纽结图判断它是否是平凡结 (是否交叉点数是 0), 现在的计算机都不能胜任.

另一方面, 对于两个纽结可以定义它们的连通和. 例如, 下图是三叶结和 8 字结的连通和.



另一个重要的问题是：任给两个纽结 k, k', 记 K 为其连通和. K 的交叉点数是否是 k, k' 的交叉点数的和?

由连通和的定义易知：K 有一个交叉点数为 $c(k)+c(k')$ 的纽结图, 所以, $c(K)$ 至多为 $c(k)+c(k')$. 问题是：(K) 是否可能更小? 至今, 数学家们不能证明, 也不能给出反例.

这方面已有的结果有：对于特殊纽结如交错结, 或环面结可加性成立[5~7]. 一般情形有一下界[8].

参 考 文 献

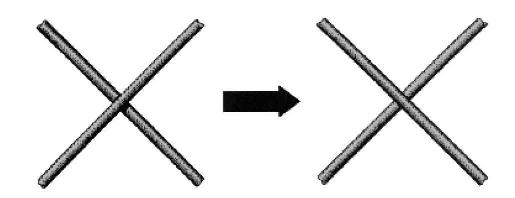
[1] Rolfsen D. Knots and links. Publish or Perish Inc, Berkeley, 1976, 160-197
[2] David W F and Theodore B. Stanford, Knots and Surfaces: A Guide to Discovering Mathematics, 1995
[3] http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_%28mathematics%29
[5] Kauffman L. State models and the Jones polynomial. Topology, 1987, 26: 395-407
Murasugi K. The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. Topology, 1987, 26: 187-194
[6] Thistlethwaite M. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. Topology, 1987, 26: 297-309
[7] Diao Y. The additivity of crossing numbers. J Knot Theory Ramifications, 2004, 13: 857-866
[8] Lackenby M. The crossing number of composite knots. arXiv: math.GT/0805.4706

撰稿人：杨志青
大连理工大学

纽结的解结数的计算和可加性

Calculating Unknotting Number of Knots, and Additivity of Unknotting Number

纽结是圆周在三维欧式空间中的嵌入. 每个纽结 (tame) 都可用平面图画出, 但与之对应的的平面图有无穷多个. 对于任纽结图 D, 在其每一个交叉点的局部, 可以做一种被称为解结的操作, 如下图.



容易证明, 对于任一 n 交叉点的纽结图 D, 至多做 $n/2$ 次解结操作, 可以把它变成一个平凡结的投影图. 纽结图 D 的解结数是将图 D 变成一个平凡结的投影图所需最少可能的解结操作的个数, 记为 $u(D)$. 而一个纽结 k 的解结数是 k 的所有纽结图 D 的 $u(D)$ 的最小值.

一个重要的问题是：任给一个纽结, 确定其解结数.

由于一个纽结有无穷个纽结图, 所以确定一个纽结的解结数是十分困难的. 现在, 数学家们只确定了交叉点数至多为 10 的纽结的解结数[2]. 此外, 关于这方面有如下问题：

另一个重要的问题：任给两个纽结 k, k', 记 K 为其连通和. K 的解结数是否是 k, k' 的解结数的和?

一个较简单的问题：任给 n 个纽结, 记 K 为它们的连通和. K 的解结数是否大于等于 n?

美国拓扑学家 M. Scharlemann 证明了两个非平凡纽结的连通和的解结数至少是 2. 对于一般情形所知甚少.

参 考 文 献

[1] Rolfsen D. Knots and Links. Publish or Perish Inc, Berkeley, 1976, 160-197

[2] http://mathworld.wolfram.com/UnknottingNumber.html

[3] http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_%28mathematics%29
[5] Adams C C. The Knot Book. Freeman W H. New York, 1994

撰稿人：杨志青
大连理工大学

嵌 入 猜 想

Embedding Conjecture of Manifolds

流形的拓扑学理论中一个重要的研究课题是：给定一个闭的 n 维流形 M, 发现维数最小的欧氏空间 $\mathbf{R}^N$, 使得 M 可以实现作为 $\mathbf{R}^N$ 的子流形.

Whitney 的一条基本定理[1] 断言, $N \leqslant 2n$. 换言之, 任何一个闭的 n 维流形可以嵌入到 $\mathbf{R}^{2n}$. 例如, 射影平面 RP^2 可以嵌入到 $\mathbf{R}^4$, 但不能嵌入到 $\mathbf{R}^3$. 说明对于 $n=2$, $N=4$.

嵌入理论最有名的一个猜想断言：

猜想 任何一个闭的 n 维流形 M, 可以嵌入到 $\mathbf{R}^{2n-\alpha(n)+1}$, 其中 $\alpha(n)$ 是 n 按 2 进制展开中 1 的个数.

即便当 $M = RP^n$ 时, 围绕嵌入猜想已有许多工作. 流形的嵌入问题与同伦论、K 理论、示性类理论等诸多深刻的数学有关, 20 世纪 60 年代发展出来的 Surgery 理论为流形的嵌入理论建立了一定的框架, 但离解决上述嵌入猜想尚相距甚远.

嵌入猜想的一个姊妹猜想是浸入猜想, 它断言：任何一个闭的 n 维流形 M 可以浸入到 $\mathbf{R}^{2n-\alpha(n)}$. 该猜想已由 R. Cohen[2] 在 1985 年解决.

参 考 文 献

[1] Whitney H. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. Ann of Math, 1944, 45: 220-246

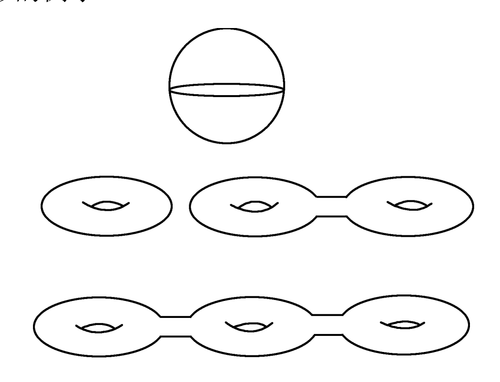
[2] Cohen R L. The immersion conjecture for differentiable manifolds. Ann of Math, 1985, 122: 237-328

撰稿人：方复全
首都师范大学

三维流形分类问题

Classification of 3-manifolds

流形是一类局部具有欧氏空间性质的连通的空间. 一维的流形有圆周和线段. 下图是一些二维流形的例子.



三维的流形有三维欧式空间、三维球面、三维环面等. 二维流形的分类定理已有一百多年的历史了, 但三维流形的分类要难得多.

两个重要的问题是:

(1) 任给两个三维流形 M, N, 判断它们是否同胚.

(2) 给出一种方法, 它可以① 列出所有三维流形的表; ② 表中的三维流形两两不同.

近年来, 随着三维 Poincaré 猜想和几何化猜想的解决[2~6], 数学家对于以上问题的解决有了很大进展. W. Jaco 和 J. H. Rubinstein 正在进行这方面的研究[1], 取得了一定进展, 但问题还有很多.

参 考 文 献

[1] Jaco W, Rubinstein J H. 0-efficient triangulations of 3-manifolds. math/0207158

[2] Perelman, Grigori. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. arXiv:math.DG/0211159. 2002

[3] Perelman, Grigori. Ricci flow with surgery on three-manifolds. arXiv:math.DG/0303109. 2003

[4] Perelman, Grigori. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. arXiv:math.DG/0307245. 2003

[5] Morgan John, Gang Tian. Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. arXiv:math.DG/0607607. 2006

[6] Morgan John, Gang Tian. Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. Clay Mathematics Institute, 2007

撰稿人：杨志青
大连理工大学

osp 型李超代数的特征标问题

Problem on Characters of Lie Superalgebras of osp Type

设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维典型单李超代数, V 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维不可约表示, 具有权空间分解 $V=\oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}V_\lambda$, 其中 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间, 则 V 的特征标定义为 $\mathrm{ch}\,V=\sum\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(\dim V_\lambda)\mathrm{e}^\lambda$, 其中 e^λ 为形式指数函数. 确定有限维不可约表示特征标是李 (超) 代数表示理论的第一个基本问题. 当 $\mathfrak{g}$ 是有限维单李代数时, 人们有著名的 Weyl 特征标公式 (这也是 Hermann Weyl 1920 年代的成名工作); 而当 $\mathfrak{g}$ 是可对称化的 Kac-Moody 代数 (包括仿射李代数) 时，有 Weyl-Kac 特征标公式. 当 $\mathfrak{g}$ 是有限维典型单李超代数时, 30 年前 Kac 就提出了下列基本问题：

问题 $\mathrm{ch}\,V=?$

这一问题引起了众多数学物理学家的广泛兴趣. 当 $\mathfrak{g}$ 时 sl 型的典型单李超代数时, Serganova 给出了 $\mathrm{ch}\,V$ 的一个无限递推公式. 之后, Brundan 也给出了 $\mathrm{ch}\,V$ 的一个递推公式. 然而, 由于他们给出的是递推公式, 在实际问题中难以应用. 最近, 苏育才和张瑞斌给出了 $\mathrm{ch}\,V$ 的一个 Weyl-Kac 型的公式. 但对 osp 型的李超代数问题仍没有解决. 目前这一问题的主要进展只是解决了 $osp(2|2n)$ 的情形, 而对于一般的情形仍没有什么进展.

参 考 文 献

[1] Kac V G. Lie superalgebras. Adv Math, 1977, 26: 8-96

[2] Serganova V. Kazhdan-Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra $gl(m|n)$. Selecta Math, 1996, 2: 607-654

[3] Brundan J. Kazhdan-Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra $gl(m|n)$. J Amer Math Soc, 2002, 16: 185-231

[4] Su Y, Zhang R B. Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv Math, 2007, 211: 1-33

[5] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程. 北京: 科学出版社, 2008

撰稿人：苏育才
中国科学技术大学

维特 (Witt) 代数的自同构群问题

Problem on Automorphism Groups of Witt Algebras

以 Ernst Witt 的名字命名的复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Witt 代数 W_n 是 n 个变量的多项式代数 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 的导子组成的李代数, 它也是最早出现的无限维单李代数的例子, 已有 100 年历史 (单个变量的 Witt 代数 W_1 由 E. Cartan 于 1909 年给出定义). Witt 代数 W_n 具有一组基

$$\left\{L^{(k)}_{i_1,\cdots,i_n}=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\frac{\partial}{\partial x_k}\;\middle|\; i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}_+,\, k=1,\cdots,n\right\},$$

其中 $\mathbb{Z}_+=\{0,1,\cdots\}$ 和乘积运算 (换位运算)

$$\begin{aligned}[L^{(k)}_{i_1,\cdots,i_n},L^{(\ell)}_{j_1,\cdots,j_n}]=&\,j_kL^{(\ell)}_{i_1+j_1,\cdots,i_{k-1}+j_{k-1},i_k+j_k-1,i_{k+1}+j_{k+1},\cdots,i_n+j_n}\\&-i_\ell L^{(k)}_{i_1+j_1,\cdots,i_{\ell-1}+j_{\ell-1},i_\ell+j_\ell-1,i_{\ell+1}+j_{\ell+1},\cdots,i_n+j_n}.\end{aligned}$$

如果 W_n 上一个线性变换 $\theta:W_n\to W_n$ 保持 W_n 的运算关系, 即对任意 $a,b\in W_n$, 都有 $\theta([a,b])=[\theta(a),\theta(b)]$, 则称 θ 为 W_n 的一个自同态. 如果 θ 还是一个一一映射, 则称 θ 为 W_n 的一个自同构. 记 $\mathrm{Aut}\,W_n$ 为 W_n 的所有自同构组成的群. 研究李代数的自同构群是李代数结构理论的基本问题, 因此一个自然的问题是

问题 $\mathrm{Aut}\,W_n=?$

由于这一问题与具有 70 年历史的著名的 Jacobi 猜想有着密切的联系 (如, 文献 [5] 提出这样的猜想: W_n 的任一非零自同态是自同构并证明了这一猜想可推出 Jacobi 猜想), 也与其他 Cartan 型李代数及 Weyl 代数的自同构群密切相关, 因此得到了人们的极大关注. 当 $n=1$ 时, 这一问题是平凡的. 但当 $n\geqslant 2$ 时, 这一问题至今没有解决, 也没有什么进展. 设 a 是 W_n 的任意元素, 则可以定义 W_n 的一个线性变换 (称为 a 的伴随算子) $\mathrm{ad}\,a:W_n\to W_n$ 使 $\mathrm{ad}\,a(b)=[a,b],\forall\, b\in W_n$. 若对任意 $b\in W_n$, 由 $\{(\mathrm{ad}\,a)^k(b)\,|\,k\in\mathbb{Z}_+\}$ 张成的 W_n 的子空间都是有限维的, 则称 a 是 ad 局部有限元. 由于任意自同构必将 ad 局部有限元映到 ad 局部有限元, 因此要决定自同构群通常的办法是先确定出这个李代数的 ad 局部有限元集. 但由于 W_n 的 ad 局部有限元集太大 (比如当 $i_k=0$ 时 $L^{(k)}_{i_1,\cdots,i_n}$ 都是 ad 局部有限元) 并且无法确定, 这也许是该问题的主要困难之处.

参 考 文 献

[1] Bass H, Connell E H, Wright D. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bull Amer Math Soc, 1982, 7(2): 287-330

[2] Cartan E. Les groupes de transformations continues, infinis, simples. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1909, 26: 93-161

[3] Kaplansky I. Seminar on simple Lie algebras. Bull Amer Math Soc, 1954, 60: 470-471

[4] Singer I M, Sternberg S. The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups, J Analyse Math, 1965, 15: 1-114

[5] Zhao K. Isomorphisms between generalized Cartan type W Lie algebras in characteristic 0. Canad J Math, 1998, 50(1): 210-224

[6] Su Y, Zhao K. Simple algebras of Weyl type. Science in China A, 2001, 44: 419-426

撰稿人：苏育才
中国科学技术大学

非可对称化的卡茨—穆迪 (Kac-Moody) 代数的定义关系问题

Problem on Defining Relations of Non-symmetrizable Kac-Moody Algebras

设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是具有秩为 ℓ 的 $n\times n$ 复矩阵. 称 A 为广义 Cartan 矩阵 (GCM), 如果 A 满足以下三个条件: (i) $a_{ii}=2, i=1,\cdots,n$; (ii) 当 $i\neq j$ 时, a_{ij} 是非正整数; (iii) 若 $a_{ij}=0$, 则 $a_{ji}=0$.

设 A 是一个 GCM. 令 $C=(c_{ij})$ 为任一个秩为 n 的 $(2n-\ell)\times n$ 复矩阵, 其前 n 行为矩阵 A. 定义一个李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 如下: 它具有生成元 $e_i, f_i\,(i=1,\cdots,n)$, $h_p\,(p=1,\cdots,2n-\ell)$ 和定义关系:

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i,\quad [h_p,h_q]=0,\quad [h_p,e_i]=c_{pi}e_i,\quad [h_p,f_i]=-c_{pi}f_i, \tag{1}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号 (即当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$, 否则为 0), $i,j=1,\cdots,n$; $p,q=1,\cdots,2n-\ell$. 令 $\mathfrak{h}$ 为由 $h_p\,(p=1,\cdots,2n-\ell)$ 张成的空间, 并令 τ 为与 $\mathfrak{h}$ 具有平凡交的 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{g}(A)=\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau$ 就是著名的 Kac-Moody 代数. 李代数的生成元与定义关系是李代数结构理论的第一个基本问题. 文献 [1] 证明了:

定理 1　当 A 可对称化 (即存在 $n\times n$ 可逆对角矩阵 D, 使 DA 为对称矩阵) 时, τ 由 $(\mathrm{ad}\,e_i)^{1-a_{ij}}e_j$, $(\mathrm{ad}\,f_i)^{1-a_{ij}}f_j$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$ 生成.

定理 1 说明关系 (1) 和下述关系

$$(\mathrm{ad}\,e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\quad (\mathrm{ad}\,f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0,\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant n \tag{2}$$

是可对称化 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 的定义关系. 关系 (1) 和 (2) 称为 Serre 关系. 一个自然的猜想是

猜想 1　对任意广义 Cartan 矩阵 A, Serre 关系是 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 的定义关系.

与猜想密切相关的猜想是: “任意 Kac-Moody 代数的可积最高权表示不可约”, 或等价地, “Kac-Moody 代数的范畴 $\mathcal{O}$ 的可积表示完全可约”. 因此, 具有 40 年历史的猜想 1 是 Kac-Moody 代数的结构和表示理论中未解决的重要问题. 当 A 是可对称化 GCM 时, 这一猜想已经解决, 即前面的定理 1, 主要工具是用到了 Kac-Moody

代数 $\mathfrak{g}(A)$ 具有的非退化对称不变双线性型 $(\cdot,\cdot)$. 但当 A 不可对称化时, 由于 $\mathfrak{g}(A)$ 不存在这样的双线性型, 这一问题至今还没有什么进展.

参 考 文 献

[1] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972

[2] Kac V G. Infinite Dimensional Lie Algebras. 3rd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990

[3] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程. 北京: 科学出版社, 2008

撰稿人：苏育才
中国科学技术大学

李代数及其对偶空间的幂零元的分类

Classification of Nilpotent Elements in Lie Algebras and Their Dual Spaces

以 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 表示迹为零的 n 阶复矩阵的全体. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 中的幂零矩阵 A 相似于一个 Jordan 标准形 J, 其中 J 的对角线上的元素都是 0. 而且, 相似于 J 的矩阵都是 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 中的幂零元. 因此, 相似于 J 的矩阵的全体就是 A 在 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 中幂零轨道. 而 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 是一个单李代数, 也就是说, n 阶对角元素为零的 Jordan 标准形的分类给出了单李代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的幂零元的分类. 很自然地, 可以把这个想法推广到其他单李代数或更广的情形, 就是李代数的幂零元分类问题.

一般来说, 我们只考虑约化李代数的幂零元的分类. 关于幂零元分类的研究是从复李代数开始的. Morozov 和 Jacobson 首先证明了复半单李代数的幂零元可以嵌入到一个三维的单子代数中. 进而, Kostant[1] 证明了复半单李代数的三维单子代数的共轭类与非零的幂零元的共轭类是一一对应的. 因此, Dynkin[2] 本质上给出了复半单李代数的幂零元的分类. 后来, Bala 和 Carter[3] 用另外一种方法给出了特征 $p=0$ 或者 $p>4m+3$ 的代数封闭域上半单代数群的李代数的幂零元的轨道的完全分类, 其中 p 表示基域的特征, m 表示李代数的最高根的高度.

接下来的工作就是研究实李代数的幂零元的分类. 假设 $\mathfrak{g}$ 是实半单李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对应于 Cartan 对合 θ 的 Cartan 分解, 其复化为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, σ 表示 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 相对于 $\mathfrak{g}$ 的共轭. G 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随群, K 是 G 中李代数为 $\mathfrak{k}$ 的连通子群, $K_{\mathbb{C}}$ 是 K 的复化. Sekiguchi[4] 证明了 $\mathfrak{g}$ 中的 G 轨道与 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 中的 $K_{\mathbb{C}}$ 轨道是一一对应的. 这个对应被称为 Konstant-Sekiguchi 对应. 利用 Konstant 和 Rallis 的关于复对称空间的工作以及 Konstant-Sekiguchi 对应, Noel[5] 证明了轨道 $K_{\mathbb{C}}\cdot e$ 与三元组 (l,q_l,w) 是一一对应的, 其中 e 是 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 中的幂零元, l 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中包含 e 的极小的 (θ,σ) 不变的 Levi 子代数, q_l 是 $[l,l]$ 的 θ 不变的抛物子代数, w 是 $q_l\cap\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 的包含 e 的准齐性空间. 同时 Kawanaka 也得到了一些相关的结果.

利用 Killng 型, 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零轨道与其对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 的幂零轨道一一对应. 研究 $\mathfrak{g}^*$ 的幂零轨道的重要意义在于：$\mathfrak{g}$ 的伴随群的每一个不可约表示对应于 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个代数簇, 而这个代数簇是有限个幂零轨道的并. 通常情形下它是一个单轨道的闭包, 而这个轨道是表示得很好的一个几何不变量. 现在的问题是, 首先, Bala-Carter 的分类方法只对 $\mathfrak{g}$ 的幂零轨道适用, 并不能直接应用到 $\mathfrak{g}^*$ 的幂零

轨道. 因此, 这一分类不能给出表示的代数簇的自然的刻画. 如何克服这一困难, 目前尚无很好的办法. 其次, 目前所有的分类结果都是分情形逐个讨论的. 是否存在一个一般性的分类结果? 这也是一个极具挑战性的问题.

参 考 文 献

[1] Kostant B. The principal three-dimensional subgroup and the betti numbers of a complex simple Lie group. Amer J Math, 1959, 81(4): 973-1032

[2] Dynkin E. Semisimple subalgebras of simple Lie algebra. Amer Soc Transl Ser, 1957: 26, 111-245

[3] Bala P, Carter R. Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1976, 79: 401-425; II: 1976, 80: 1-17

[4] Sekiguchi J. Some remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. J Math Soc Japan, 1987, 1: 127-138

[5] Noel A G. Nilpotent orbits and theta-stable parabolic subalgebras. Representation Theory, 1998, 2: 1-32

撰稿人: 陈智奇 梁 科

南开大学

李群表示的分歧律

Branching Laws for Representations of Lie Groups

周期函数可以用 Fourier 级数来表示是一个众所周知的经典结论, 而很多人并不知道这其中蕴含着很重要的紧李群表示的思想. 事实上, 周期为 2π 的平方可积函数的全体构成一个复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 周期性在其上诱导了一个 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ 的自然的作用或表示, 而将 $\mathcal{H}$ 分解为 S^1 的不可约表示 (不变子空间) 的直和就得到了 Fourier 级数. 这是经典的紧李群表示论在最简单的非平凡的连通紧李群 S^1 上的实现. 任何连通紧李群 G 都存在极大交换子群 (极大环面)T, 它是若干个 S^1 的直积. G 的不可约表示限制在 T 上可以自然地分解为 T 的不变子空间 (权空间) 的直和. Cartan 和 Weyl 证明了连通紧李群 G 的不可约表示与 G 的支配权一一对应[1].

紧李群表示的分歧律研究的是 G 的不可约表示在它的闭子群 H 上限制的分解问题. 设 τ 是 G 的不可约酉表示, 则 τ 在 H 的限制表示 $\tau|_H$ 可以分解为不可约表示的直和：$\tau|_H = \sum_{\sigma \in \hat{H}} m_\sigma \sigma$, 其中 $\hat{H}$ 为 H 的不可约表示的等价类的全体, m_σ 是 σ 在 τ 中出现的重数. 紧李群表示的分歧律的主要目标是计算 m_σ. 这与量子物理学中的 breaking symmetry 有直接的联系. 而当 $H = T$ 时, 这就是上述的 Cartan-Weyl 理论.

如果 G 和 H 都是紧连通的, 已有很好的公式可以计算 (至少在 G 和 K 的秩相等的情形, 可以利用软件计算). 其中, 经典的分歧律问题研究的 (G, H) 是 $(U(n), U(n-1))$, $(SO(n), SO(n-1))$ 和 $(Sp(n), Sp(n-1))$, 分别由 Weyl, Murnaghan 和 Zhelobenko 解决[2]. 对于 G 的给定最高权的不可约酉表示, 在其分解中出现的 H 的不可约表示的最高权都可以确定出来. 当 $G = U(n)$, $SO(n)$ 时, 在分解中出现的表示的重数都是 1；而当 $G = Sp(n)$ 时, 其重数也是容易计算的.

而对于一般情形, Kostant 得到了一个漂亮的计算重数的公式[2], 并由 Vogan 推广[3]. 然而我们通常关心的是 H 的哪些表示在 G 的不可约表示的限制中出现, 即重数非零. 这一问题从 Kostant 重数公式很难得到令人满意的答案. 给定 G 的表示 τ, 其最高权为 μ. μ 在 G 的余伴随作用下的轨道在 H 的支配 Weyl 房的投影构成一个凸多面体[4], 这个多面体可以给出所有在 $\tau|_H$ 中出现的 H 的表示. 问题是如何确定这些凸多面体, 即确定其各个面. 当 $G = U(n) \times U(n)$, H 为对角子群

时, 这一问题本质上由 Knutson-Tao[5] 在前人的基础上最终完成. 但是他们的想法对其他情形不太适用. 除了上述的经典例子等少数情况外, 目前在此领域的结果还很少.

当 G 是非紧约化群时, 也可以考虑类似的分歧律. 如果 H 为 G 的极大紧子群，Harish-Chandra 等人得到了著名的 $(\mathfrak{g}, K)$ 模理论[6]. 当 H 不是紧李群时, 由于 G 的不可约酉表示除了平凡的以外都是无穷维的, 且其在 H 上的限制也并非离散的, 因此缺乏有效的研究工具. 其中, Metaplectic 群 ($Sp(n,\mathbb{R})$ 的二重覆盖) 的 Weil 表示限制在 dual pair 子群上得到了著名的 Howe 对应 (或称为 dual pair 对应、Theta 对应)[7]. 对一般情况的分歧律, Kobayashi 做了一系列的研究, 得到了一些有意思的结果[8,9].

参 考 文 献

[1] Bröcker Th, Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York-Berlin-Heildelberg-Tokyo: Springer-Verlag, 1985

[2] Knapp A W. Lie Groups Beyond an Introduction. second edition. Boston: Birkhäuser, 2002

[3] Vogan D A. Lie algebra cohomology and a multiplicity formula of Kostant. J Algebra, 1978, 51: 69-75

[4] Heckman G J. Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups. Invent Math, 1982, 67(2): 333-356

[5] Knutson A, Tao T. The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture. J Amer Math Soc, 1999, 12(4): 1055-1090

[6] Vogan D. Representations of Real Reductive Lie Groups. Boston: Birkhäuser, 1981

[7] Howe R. θ-series and invariant theory. Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics, Vol. 33, Providence, RI: American Mathematical Society, 1979, 275-285

[8] Kobayashi T. Branching problems of unitary representations. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II. Beijing, 2002: 615-627

[9] Kobayashi T. Restrictions of unitary representations of real reductive groups. Lie Theory, Unitary Representations and Compactifications of Symmetric Spaces. Boston: Birkhäuser, 2005, 229: 139-207

撰稿人：朱富海　侯自新

南开大学

李群酉表示的分类

The Unitary Dual of A Lie Group

约化实李群的不可约酉表示分类是当今数学研究中一个尚未完全解决的重要课题. 由于这一问题与数论、微分几何、调和分析以及理论物理等领域的研究有着密切的联系, 所以李群不可约酉表示分类倍受当今数学家与物理学家的关注. 以下我们将简单叙述这一研究课题的背景与进展.

(1) 李群及其表示

李群是一个具有光滑微分流形结构的群, 且群的运算是光滑映射[7]. 李群 G 的酉表示是 G 在 Hilbert 空间上的连续的作用, 而这些作用保持空间内积不变. 也就是说, 李群 G 的酉表示是一个从群 G 到某个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上所有酉算子构成的群 $U(\mathcal{H})$ 的同态映射

$$\pi : G \to U(\mathcal{H}),$$

并且 G 的作用

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

是连续的映射. 如果 G 不变闭子空间只有零空间和它自身, 则称此表示为不可约酉表示. 李群 G 的不可约酉表示的等价类的全体称为 G 的 unitary dual, 通常记为 $\widehat{G}$. 因为在具体数学问题中, 很多函数空间都具有 Hilbert 空间的结构, 所以酉表示是研究群在函数空间上作用的基本工具. 比如, 圆周上的平方可积函数的 Fourier 级数分解和直线上平方可积函数的 Fourier 变换都对应于相应的群的酉表示分解.

(2) 紧李群的表示

紧李群表示论是数学中的经典理论. 紧李群的不可约表示都是有限维的. 连通紧李群的不可约表示由它的最高权完全确定. 确切地说, 若 G 为连通紧李群, 而 T 为其极大环面, 由此产生的根系 $R(G,T)$ 确定了支配权的锥形集合. 著名的 Cartan-Weyl 定理证明了连通紧李群的不可约表示与支配权一一对应[2]. 一般 (非紧) 李群表示论是在紧李群表示论的基础上, 受相对论和量子力学的影响而发展起来的. 李群表示论又超越了理论物理的范畴, 与当代数学的许多重要分支的发展都密切相关. 李群表示论的中心课题是非紧李群的无穷维表示理论, 特别是不可约酉表示的分类理论.

(3) 幂零李群与可解李群的表示

设 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数, 记 $\mathfrak{g}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间. 李群 G 的伴随表示

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$$

诱导了 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用, 由此生成的轨道称为余伴随轨道 (coadjoint orbits). 在 G 为单连通幂零李群的情形, Kirillov[4] 证明了 G 的不可约酉表示与 G 的余伴随轨道一一对应, 而且这个对应有着近乎完美的函子映射 (functoriality) 的性质：诱导表示与限制表示的分解都对应着相应的余伴随轨道的映射. Kirillov 的理论开创了以余伴随轨道研究酉表示, 亦即轨道方法 (orbit method) 的先河. Auslander 与 Kostant[1] 进一步成功地将轨道方法应用于单连通的可解李群上, 推广了 Kirillov 的理论. 然而轨道方法却不能直接推广到约化李群上[5], 我们将在 (7) 中进一步阐述轨道方法在构造约化李群不可约酉表示所起的作用.

(4) (非紧) 约化李群可容许表示

由于 Macky 和 Duflo 的工作, 李群不可约酉表示的分类归结为约化李群不可约酉表示的分类. Harish-Chandra[3] 证明了不可约酉表示是可容许的, 即它限制在一个极大紧子群上分解为不可约子表示的直和时, 每个不可约子表示都只出现有限次. 而 Langlands[8] 给出了 (线性) 约化李群不可约可容许表示的分类. 在 Langlands 分类中找出约化李群的酉表示是当前李群表示论研究的焦点. Knapp 和 Zuckerman 找出了在 Langlands 分类中具有不变非退化 Hermite 型的不可约可容许表示[6]. 而进一步确定这些 Hermite 型是否正定是不可约酉表示分类的关键, 也是最困难的地方, 其中一个重要的步骤是表示特征的计算.

(5) 表示特征的计算

如果 G 是一个紧李群, 那么它的一个表示的特征是对应的群作用的迹. 这是一个在群 G 的共轭类上取常值的光滑函数. 利用 Schwarz 广义函数的概念, Harish-Chandra 在约化群可容许表示的研究中发展了可容许表示的特征理论[3]. Vogan 证明并推出了可容许表示的特征计算的 Kazhdan-Lusztig 算法. 这为不可约酉表示分类提供了有力的工具[9]. 当时这个算法非常复杂, 对一些特殊的群计算量非常大, 难以实现.

(6) Atlas of Lie Groups and Representations

Atlas of Lie Groups and Representations 是近年来由十几位数学家组成的研究团体. 他们关于可容许表示特征的计算的研究成果倍受瞩目. 特别地, 他们利用超大型计算机在 2007 年 1 月得出了可裂 E_8 的全部 Kazhdan-Lusztig 多项式[11], 相关的资料和软件可以从 http://www.liegroups.org 下载. 这为不可约酉表示分类的彻底解决提供了新的途径和工具.

(7) 轨道方法与幂单表示

刻画不可约酉表示的关键是找出为数不多的几类特殊不可约酉表示, 而其他不可约酉表示都可由这些特殊酉表示诱导得出. 我们称这类特殊不可约酉表示为幂单表示 (unipotent representations). 轨道方法在幂零李群与可解李群上的成功虽然不能直接推广到约化李群上, 然而很多实例使人们相信, 幂零的余伴随轨道 (nilpotent

coadjoint orbits) 的量子化为构造幂单表示提供了一个有力工具[10].

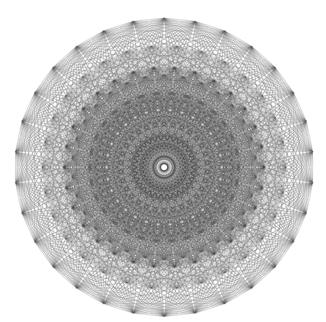


图 1 李代数 E_8 的根系构成的戈塞尔多面体 4_{21} 的二维投影图

注：这 240 个根按投影长度不同分为 8 组, 标以不同颜色, 每个顶点与相邻的 56 个顶点相连. 这张图从一个侧面反映了 E_8 根系的对称性.

参 考 文 献

[1] Auslander L, Kostant B. Polarization and unitary representations of sovable Lie groups. Invent Math, 1971, 14: 255-354

[2] Bröcker Th, Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York-Berlin-Heildelberg-Tokyo: Springer-Verlag, 1985

[3] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups III. Trans Amer Math Soc, 1953, 76: 234-253

[4] Kirillov A. Unitary representations of nilpotent Lie groups. Russian Math Survey, 1962, 17: 57-110

[5] Kirillov A. Merits and demerits of the orbit method. Bulletin of Amer Math Soc, 1999, 36: 433-488

[6] Knapp A. Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples. Princeton: Princeton University Press, 1986

[7] Knapp A. Lie Groups Beyond an Introduction. second edition. Boston: Birkhäuser, 2002

[8] Langlands R. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. Representation Theory and Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups. Edited by Sally P and Vogan D. published by Amer Math Soc, 1989

[9] Vogan D. Representations of Real Reductive Lie Groups. Boston: Birkhäuser, 1981

[10] Vogan D. The method of coadjoint orbits for real reductive groups. Representation Theory of Lie Groups. IAS/Park City Mathematics Series, 1999, 8(9): 179-238

[11] Vogan D. The character table for E_8. Notices Amer Math Soc, 2007, 54(9): 1122-1134

撰稿人：黄劲松

香港科技大学

模李代数模表示论中的卡茨−Weisfeiler(Kac-Weisfeiler) 猜想

Kac-Weisfeiler's Conjectures in The Representation Theory of Modular Lie Algebras

素特征 $p>3$ 的代数闭域上单李代数的“广义 Kostrikin-Shafarevich 分类猜想”最终为 Strade-Premet 解决后, 与结构研究同步的模表示论日益受到新的关注. 一个主要的推动是围绕 Kac-Weisfeiler 猜想 (基于文献 [1]~[3], 于 1971 年提出[4], 含 KW 猜想1 和 KW 猜想2) 展开的[5~9]. 由于模李代数的有限维模范畴比特征 0 域上的大得多, 很多单模不再是通常的权模, 也不再有特征标公式, 研究此类模主要侧重于对维数的整体估计, 表现为：这类单模的维数被域特征的适当幂次所整除的“维数素幂整除性问题”—— 其表述涉及代数群和代数几何的语言. 粗略地讲, 参数化所有单模的 p 中心特征标形成一个素特征域上高维代数簇 (Zassenhaus 代数簇), 其上非分歧点轨迹 (unramified locus) 形成一个 Zariski 开集, 其中每个 p 中心特征标 χ 唯一地刻画了一个具有相等极大维数的单模同构类；分歧点的 p 中心特征标对应的单模则不仅具有较低的维数, 且有 $\leqslant p$ 个单模同构类. 这里问题的实质涉及处理余伴随幂零轨道理论 (“orbit method” 由 Kirillov 于 20 世纪 60 年代初提出)、有限 (仿射) 群概型理论以及限制李代数的支撑簇 (support varieties) 理论[5].

对限制李代数 $(\mathfrak{g},[p])$(即作为内导子, $(\mathrm{ad}x)^p=\mathrm{ad}(x^{[p]}),\forall\, x\in\mathfrak{g}$), 记 $\mathrm{spec}(U(\mathfrak{g})):=\{$有限维单 $\mathfrak{g}$ 模同构类$\}$. Zassenhaus[2] 证明：$\mathcal{Z}_0\big(=(x^p-x^{[p]},x\in\mathfrak{g})\big)\subset\mathcal{Z}=\mathrm{cent}(U(\mathfrak{g}))$, $U(\mathfrak{g})$ 是整闭的 (即 $\mathrm{spec}(\mathcal{Z})$ 是正规代数簇), (由 Nakayama 引理和 Schur 引理给出的) 典范满射 $\chi:\ \mathrm{spec}(U(\mathfrak{g}))\to\mathrm{spec}(\mathcal{Z})$ 有性质：在一个闭的判别式轨迹 (discriminant locus) $\mathcal{D}\subset\mathrm{spec}(\mathcal{Z})$ 之外的开集上, χ 为双射, 且所有源自 $\chi^{-1}(\mathrm{spec}(\mathcal{Z})-\mathcal{D})$ 的表示都有维数 p^{d-r}, ($d=\dim\mathfrak{g}$, $r=[Q(\mathcal{Z}):Q(\mathcal{Z}_0)]$, $Q(\mathcal{Z})$ 为整环 $\mathcal{Z}$ 的分式域)；源自 $\chi^{-1}(\mathcal{D})$ 的表示维数均 $<p^{d-r}$. Rudakov[3] 对简约代数群的李代数 $\mathfrak{g}$, 证明：$r=\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$. Weisfeiler-Kac[4] 观察到：对限制李代数的单模结构起掌控作用的 p 中心特征标 χ_V, 在 $\mathcal{Z}_0$ 的生成元上取值的 p 次方根是一个定义在李代数 $\mathfrak{g}$ 上的线性函数：$\ell_V\in\mathfrak{g}^*$, 其中 $\ell_V(x)=\chi_V(x^p-x^{[p]})^{\frac{1}{p}}$, $\forall\ x\in\mathfrak{g}$, $V\in\mathrm{spec}(U(\mathfrak{g}))$. 线性泛函 ℓ_V 基本掌控了单 $\mathfrak{g}$ 模 V 的维数特征, 而且和它同处一个 (在 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群 G 的) 余伴随作用轨道中的元所对应的单模, 同属一个单模等价类(注：$\mathfrak{g}^*$ 关于 G 的余伴随作用的不同轨道, 对应不同 (构) 的单模等价类). Kac-Weisfeiler 由此猜测：

Kac-Weisfeiler 猜想 1 $r = \min_{\ell \in \mathfrak{g}^*} d(\ell)$, 其中 $d(\ell) = \dim\{g \in \mathfrak{g} \mid \ell([g, \mathfrak{g}]) = 0\} = \dim \mathrm{Stab}(\ell)$—— 线性泛函 ℓ 在 $\mathfrak{g}$ 中确定的稳定化子 (是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数). KW 猜想 1 是对刻画 $\mathfrak{g}$ 的具有极大维数的单模的内蕴量 r 做出猜测.

Kac-Weisfeiler 猜想 2 对于简约代数群 G 的李代数的任何单模 V, 有 $p^{\frac{1}{2}\dim(G.\ell_V)} | \dim V$. KW 猜想 2 是对 $\mathfrak{g}$ 的任意单模的维数的极大素幂整除性提出猜测, 该素幂的极大次方数恰为该单模 V 所定义的线性泛函 ℓ_V 在内自同构群或代数群 G 作用下的轨道维数的一半.

Weisfeiler-Kac[4] 对完全可解李代数解决了 KW 猜想 1；Strade[10] 对任意可解李代数, 证明了 KW 猜想 1; Mil'ner[11] 用有限群概型理论给出了 KW 猜想 1 的一个优美证明 (但 Kac 认为其证明未被大家理解).

Friedlander-Parshall 于 20 世纪 80 年代末在文献 [5] 中, 对文献 [4] 的参数化单模 V 的线性函数 ℓ_V 约化到 "幂零部分" 的思想作了深入挖掘和展开, 并发展了限制李代数的支撑簇理论, 于 1991 年仅对 A 型李代数给出了 KW 猜想 2 的证明; Premet[7] 对简约代数群 G 的李代数的忠实单模 (在换位子群 (G, G) 单连通和 p 为 "好素数" 条件下) 解决了 KW 猜想 2 (两个证明[5,7] 都利用了支撑簇理论). 20 世纪末和 21 世纪初, Jantzen 在文献 [5]、[7] 等基础上, 对限制的代数李代数表示论作了系统的新推进[8], 解决了 "子正则" 幂零 p 中心特征标参数化的单模刻画问题. 但是 KW 猜想 2 的彻底解决, 还有待人们对 $\mathfrak{g}^*$ 中幂零元被 G 余伴随作用的轨道几何理论 (涉及抽象代数几何学) 的深入理解.

KW 猜想的新表述形式 对何种限制李代数具有 KW 性质 (见 Premet[7],114 所提问题 1 和 2, 另见 Kac 对文献 [7] 所作特色评论 [MR1345285(96g:17007)] 中所提 3 个新问题)? 目前 KW 猜想的进展主要在代数李代数上取得. 张禾瑞关于 Witt 代数单模分类的著名工作[1] 表明：KW 猜想应该适用于 Cartan 型李代数, 这基本上还是一个开问题. 最近的研究表明, KW 猜想正在被推广到模李超代数情形. 此外, KW 猜想的新发展是它的量子化版本：DeConcini-Kac-Procesi 猜想[6], 20 世纪 90 年代初提出, 揭示了单位根处量子群表示论的类似特征, 目前仅获部分解决. 可预见, 围绕着 KW 猜想和 CKP 猜想展开的李代数的模表示论和量子群在单位根处的 "模" 表示论, 将促进几何表示论的深入发展[9]. 李代数模表示论和量子群单位根处表示论, 二者何以具有如此神似的面纱, 正期待着数学家们付出艰辛努力去揭开.

参 考 文 献

[1] Chang Ho-Jui. Über Wittsche Lie-Ringe. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1941, 14: 151-184

[2] Zassenhaus H. The reps of Lie algs of prime char. Proc Glasgow Math Assoc, 1954, 2: 1-36

[3] Rudakov A. On reps of classical semisimple Lie algs of char p. Math USSR-Izv, 1970, 4: 741-749

[4] Weisfeiler B, Kac V. Funct Anal Appl, 1971, 5: 111-117. & Kac V, Weisfeiler B Indag Math, 1976, 38(2): 136-151

[5] Friedlander E M, Parshall B J. Invent Math, 1986, 86: 553-562; Amer J Math, 1988, 110: 1055-1094; 1990, 112: 375-395

[6] DeConcini C, Kac V, Procesi C. Quantum coadjoint action. J Amer Math Soc, 1992, 5: 151-189

[7] Premet A. Irr reps of Lie algs of reductive groups and the Kac-Weisfeiler conjecture. Invent Math, 1995, 121: 79-117

[8] Jantzen J C. Reps of Lie algs in prime char. Proceedings Montréal (NATO ASI series C 514), 1998: 185-235

[9] Mirkovi'c I, Rumynin D. Geometric rep theory of restricted Lie algs of classical type. Transf Groups, 2001, 6(2): 175-191

撰稿人：胡乃红
华东师范大学

齐性爱因斯坦 (Einstein) 流形

Homogeneous Einstein Manifolds

本问题涉及的是李群在微分几何中的应用. 我们假定读者熟知微分几何, 特别是 Riemann 几何的基本概念, 例如参考文献 [1] 前五章的内容. 首先回忆李群的概念. 假定 G 既是一个抽象群又是一个光滑流形, 且映射

$$G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

是光滑的, 那么 G 就称为一个李群. 1939 年发表的 Myers-Steenrod 定理指出, 任何一个 Riemann 流形的等距变换群都是李群[2]. 这一定理为利用李群理论研究微分几何, 特别是 Riemann 流形奠定了基础. 一个 Riemann 流形 (M, g) 称为齐性的, 如果 (M, g) 的等距变换群 $I(M, g)$ 在 M 上的作用是可迁的. 上述作用的可迁性使得我们可以将 (M, g) 的问题转化为李群和李代数的问题, 因此有很多代数的工具可以应用. 正是因为上述原因, 20 世纪齐性 Riemann 流形的研究飞速发展, 已经成为数学中的一个重要分支.

这方面的最伟大的成就当属 E. Cartan 的对称空间理论. E. Cartan 利用李代数的分类结果得到了整体对称的 Riemann 流形的完全分类. Riemann 对称空间的理论已经相当成熟, 感兴趣的读者可以参考 S. Helgason 的经典名著[3]. 除了 Riemann 对称空间外, 很多特殊的齐性 Riemann 流形的研究也取得了重要成果, 其中包括齐性 Einstein 流形的研究.

1916 年 Einstein 发表了著名的广义相对论, 在这一理论中他用到了 Riemann 几何, 此后 Riemann 几何便成为理论物理学家必须掌握的工具. Riemann 几何中有一类特殊研究对象在广义相对论中特别有用, 后人将这一类流形称为 Einstein 流形. 设 (M, g) 为一个 Riemann 流形, 如果 (M, g) 的 Ricci 张量等于 g 的常数倍, 即存在常数 c 使得 $Ric = ncg$, 其中 n 为 M 的维数, 则称 (M, g) 为 Einstein 流形, c 称为 Einstein 常数. 关于 Einstein 流形的在广义相对论中的应用请参考文献 [4]. 一个 Einstein 流形如果作为 Riemann 流形是齐性的, 则称该流形为齐性 Einstein 流形. 研究齐性 Einstein 流形的重要目标是给出其分类. 但是这一问题非常复杂, 到现在只得到部分的结果. 问题的复杂性主要在于, 齐性流形的 Ricci 曲率公式十分复杂, 很难应用到实际的研究中[4]. 我们将这一领域已获得的主要结果及未解决

的问题简单介绍如下：

1. 1975 年 D. V. Alekseevskii 等证明, 一个 Einstein 常数为零的齐性 Einstein 流形必是平坦的, 因此它等距同胚于一个 Euclid 空间或平坦环面[4]. 这个结果给出了 $c = 0$ 情形的齐性 Einstein 流形的完全分类.

2. 由 Riemann 几何中的 Bonnet-Myers 定理可知, 如果 (M, g) 是一个 $c > 0$ 的齐性 Einstein 流形, 则 M 必是紧致的. 因此 $c > 0$ 的情形就是紧致齐性 Einstein 流形的分类问题. 这一问题至今没有完全解决. 一些特殊情形, 如正规齐性流形上的不变 Einstein 度量的分类[5].

3. 容易证明, 如果 (M, g) 是一个 $c < 0$ 的齐性 Einstein 流形, 那么 M 必是非紧的. 因此 $c < 0$ 的情形归结为非紧齐性 Einstein 流形的分类. 这一方面有一个著名的 Alekseevskii 猜想：任何非紧的齐性 Einstein 流形必可实现为一个可解李群上的左不变度量. 这一猜想历经三十多年, 尚未解决. 但是受这一猜想的启发, 很多人研究了可解李群上的左不变 Einstein 度量, 获得了重要的结果[6]. 不过, 可解李群上左不变 Einstein 度量的分类问题也是非常复杂的, 迄今没有解决.

除了上述问题之外, 还可以考虑更为广泛的齐性 Finsler-Einstein 流形. Finsler 流形是 Riemann 流形的推广, 是几何大师陈省身晚年提倡的研究领域. 在 Finsler 几何中可以定义类似的 Ricci 张量, 由此可以定义 Finsler-Einstein 流形的概念. 2002 年邓少强等证明：任何一个 Finsler 流形的等距变换群一定是李群[7]. 这使得李群李代数研究齐性 Finsler-Einstein 流形成为可能. 不过这也是一个更为复杂的问题, 迄今没有获得重要结果. Finsler 几何的基础理论可参见文献 [8].

参 考 文 献

[1] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 1983

[2] Myers S B, Steenrod N. The group of isometreis of a Riemannian space. Ann of Math, 1939, 40: 400-416

[3] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. New York: Academic Press, 1978

[4] Besse A L. Einstein Manifolds. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987

[5] Wang M Y, Ziller W. On the existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics. Invent Math, 1986, 84: 177-194

[6] Heber J. On noncompact homogeneous Einstein manifolds. Invent Math, 1998, 133: 277-352

[7] Deng S, Hou Z. The group of isometries of a Finsler space. Pacific Journal of Mathematics, 2002, 207: 149-155

[8] Bao D, Chern S S and Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. New York: Springer-Verlag, 2000

撰稿人： 邓少强　侯自新
南开大学

有理顶点算子代数的分类

Classifications of Rational Vertex Operator Algebras

有理顶点算子代数的分类是顶点算子代数理论研究中最重要和最基本的问题之一. 一个顶点算子代数 V 称为有理的, 如果其任何容许模都是完全可约的. 顶点算子代数的定义首先由朱永昌在研究顶点算子代数的迹函数的模不变性时提出的, 在由朱永昌给出的定义中, 还要求另外两个条件, 即 V 只有有限多个不可约的可容许模且每个可容许模都是权空间有限维的. 后来, 董崇英、李海生及 G. Mason 证明了后两个条件可由完全可约性推出. 对于经典的有限维李代数和结合代数这等价于其半单性. 顶点算子代数的产生源于对最大的散在单群–魔群、moonshine 猜想和物理中共形场论的研究. 20 世纪 80 年代后期, Frenkel-J I. Lepowsky-A. Meurman 通过构造 Leech 格顶点算子代数及其 twisted moonshine- 模, 给出了 moonshine 顶点算子代数的结构, 并证明了魔群是此顶点算子代数的自同构群, 从而给出了魔群的自然存在形式. 1992 年, R. E. Borcherds 给出了 moonshine 猜想的证明. 近二十年来, 顶点算子代数及其表示理论的研究已经广泛应用到数学和物理的诸多方向. 如代数、几何、拓扑、量子场论、弦理论、黑洞理论, 凝聚态物理等等. 共形场论中很多重要、有趣的研究结果都要求所研究的共形场论是有理的. 从数学的角度, 即研究的顶点算子代数是有理的. 目前很多熟知的顶点算子代数都是有理顶点算子代数, 如 Virasoro 代数的不可约离散表示构成的顶点算子代数、仿射 Kac-Moody 代数的可积最高权表示构成的顶点算子代数、格顶点算子代数、moonshine 顶点算子代数及 frame 顶点算子代数等. 围绕有理顶点算子代数的分类, 有很多深刻、有趣的研究工作. 但到目前为止, 做到对有理顶点算子代数完全分类, 似乎还有相当距离. 其中一个原因, 是因为顶点算子代数的有理性的定义是通过一个外部条件给出的, 而不是通过其内部刻画. 给定一个顶点算子代数, 判断其任意的容许模是否完全可约并不是一件容易的事情. 因此, 在对有理顶点算子代数分类的同时, 给出其有理性的一个内部刻画也是一个很重要的问题.

参 考 文 献

[1] Anderson G, Moore G. Rationality in conformal field theory. Commun Math Phys, 1988, 117: 441-450

[2] Belavin A A, Polyakov A M and Zamolodchikov A B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. Nucl Phys, 1984, 241: 333-380

[3] Borcherds R E. Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras. Invent Math, 1992, 109: 405-444

[4] Cappelli A, Itzykson C and Zuber J-B. The A-D-E classification of minial and A1(1) conformal invariant theories. Commun Math Phys, 1987, 113: 1-26

[5] Dong C, Li H and Mason G. Twisted representations of vertex operator algebras. Math Ann, 1998, 310: 571-600

[6] Dong C, Mason G. Rational vertex operator algebras and the effective central charge. International Math Research Notices, 2004, 56: 2989-3008

[7] Frenkel I B, Lepowsky J and Meurman A. Vertex Operator Algebras and the Monster. Boston: Academic Press, 1988

[8] Goddard P, Kent A and Olive D. Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras. Commun Math Phys, 1986, 103: 105-119

[9] Wang W. Rationality of Virasoro vertex operator algebras. Internat Math Res Notices, 1993, 7: 197-211

[10] Zhu Y. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J Amer Math Soc, 1996, 9: 237-302

撰稿人：姜翠波
上海交通大学

酉表示中的狄拉克 (Dirac) 算子

Dirac Operators in Unitary Representations

Dirac 算子是一个一阶微分算子, 它是 1928 年由著名物理学家、诺贝尔奖获得者 Paul Dirac 作为 Laplace 算子的平方根引入的. 利用这一算子, Dirac 解释了电子的自旋并预言了正电子的存在, 进而奠定了相对论量子力学的基础. 目前, 各种背景的 Dirac 算子广泛应用于物理学的许多分支, 并且被推广到微分流形, 是数学中非常重要的研究对象.

Dirac 算子在李群表示论中的应用始于 Parthasarathy, Atiyah-Schmid 的离散序列表示的几何构造[1]. 由 Dirac 算子导出的酉表示的 Dirac 不等式也是研究酉表示分类的有力工具. 对于连通实半单李群 G, Vogan 利用泛包络代数和 Clifford 代数定义了一种完全代数化的 Dirac 算子以及 $(\mathfrak{g}, K)$ 模 X 的 Dirac 上同调. 李群表示的一个很重要的不变量是它的无穷小特征. Vogan 猜想若实半单李群 G 的不可约 $(\mathfrak{g}, K)$ 模 X 具有非零的 Dirac 上同调, 则 X 的无穷小特征由其 Dirac 上同调完全决定. 这个猜想已经被黄劲松和 Pandžić 证明[2]. 事实上, 上面的结果可以推广到更一般的齐性空间 G/H(即 H 为实半单李群 G 的闭子群), 对于 Kostant 定义的 cubic Dirac 上同调也有类似结论.

Vogan 关于 Dirac 上同调的猜想, 刻画了 Dirac 算子的一个深刻的代数性质, 它进一步刻画了表示的无穷小特征, 这为酉表示的研究提供了新的工具. 例如, 由此可导出更精细的 Dirac 不等式, 不可约酉表示的几何构造也可以简化. 同时, Dirac 上同调又与李代数上同调密切相关, 在很多情形, Dirac 上同调可以简化李代数上同调的计算. Dirac 上同调的应用日益广泛, 甚至超出了半单李群表示的范围[3].

1995 年, K. Habermann 给出了辛流形上的辛 Dirac 算子的定义并作了系统的研究[4]. 我们知道, 李群的每个余伴随轨道上都有不变辛结构, 而轨道方法[5] 对于研究幂零李群的表示非常有效. 另外, 辛空间中的 Weyl 代数与上面 Dirac 算子定义中用到内积空间的 Cillford 代数有很强的相似性. 如果齐性空间 G/H 上存在不变辛结构, 是否也能给出辛 Dirac 算子的一个代数化的定义? 是否可以利用辛 Dirac 算子来构造实半单李群的酉表示? 辛 Dirac 算子与余伴随轨道是否有联系? 目前, 这些问题的研究还处于起步阶段.

参 考 文 献

[1] Parthasarathy R. Dirac operator and the discrete series. Ann Math, 1972, 96: 1-30
[2] Huang J-S, Pandžić P. Dirac cohomology, unitary representations and a proof of a conjecture of Vogan. J Amer Math Soc, 2002, 15: 185-202
[3] Huang J-S, Pandžić P. Dirac Operators in Representation Theory. Birkhäuser, 2006
[4] Habermann K, Habermann L. Introduction to Symplectic Dirac Operators. Berlin: Springer-Verlag, 2006
[5] Kirillov A A. Lectures on the Orbit Method. American Mathematical Society, 2004

撰稿人：[1] 康毅芳 [2] 梁 科
1 天津大学
2 南开大学

2D 瞬时频率

2D Instantaneous Frequency

Fourier 分析是数学和物理两门学科中的一个重要组成部分, 同时也是信号处理的基石. Cooley 和 Tukey 于 1965 年在计算机上实现了快速 Fourier 变换 (FFT), 他们原本的动机是监视核试验和追踪核潜艇. 但后来的发展, FFT 成为工业现代化的关键工具. 因此, Charles van Loan 曾写到:“FFT 是本世纪 (20 世纪) 真正重大的计算数学发展之一. 它改变了科学和工程学的面貌, 以至于可以毫不夸张的说, 我们的生活因 FFT 而完全变得不同.” 基于 Fourier 变换人们可以定义频率概念. 包括一维 (1D)、二维 (2D) 以及高维. 频率是在频谱方面认识物理世界的基础. 但 Fourier 分析存在两个基本的限制: 系统是线性的, 数据是平稳的. 但是无论在科学问题还是工程问题中, 系统大多是非线性的, 频率都是随时间 (1D) 或位置 (2D) 变化的. 这样瞬时频率 (2D 时也称为局部频率) 就成为对于物理现象一个很好的描述方式. 从某种意义上讲, 瞬时频率这个概念在信号分析中之重要, 犹如瞬时速度在牛顿力学中之重要性. 它是个物理概念, 各种各样的数学模型被引入来描述和计算瞬时频率, 但是到现在为止对瞬时频率的数学描述和计算方法还没有完全满意解决.

现有两种 “瞬时频率” 定义方法, 一种来源于工程直观, 将瞬时频率定义为复信号相位的导数[1~3]. 方法是首先对实信号做 Fourier 变换, 然后 “抑制负频率同时将正频率的幅度乘以二” 以获得复信号. Gabor 指出这一过程等价于时域上

$$z(t) = s(t) + jH[s(t)] = A(t)e^{j\theta(t)},$$

其中 $s(t)$ 为原实信号, $z(t)$ 是 Gabor 构造的复信号, H 是 Hilbert 变换, $A(t)$ 称为振幅, $\theta(t)$ 称为幅角或相位, 它的导数 $\theta'(t)$ 就是瞬时频率. 由于在理论上通过一个实信号构造复信号所需要的虚部信号可以有多种构造方法, Gabor 通过 Hilbert 变换方法唯一地给出了一个构造复信号的方法, 同时这个方法构造出的复信号是解析信号. 虽然这种定义在大多数情况下合理, 但是我们需要对信号做一些限定: 文献 [2] 和 [3] 都认为仅对单成分 (monocomponent) 信号时这种定义瞬时频率的方法才有意义, 也就是对于那些仅有单频率或者窄带信号来说可以反映其频率随时间变化的特征. 但是当信号为多成分时, 这个通过解析信号相位的导数定义瞬时频率的方法不再有效, 原因在于当信号非窄带或者多成分时, 解析信号的瞬时相位不再反应

信号的局部特征, 从而 Hilbert 谱分析不能有效反映信号的时变特征. 另外, 数学家说它违背测不准原理.

另一种来源于 Wigner-Velle 变换, 得到瞬时频率的另一种定义[4]:

$$f(t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} fW(t,f)\mathrm{d}f}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} W(t,f)\mathrm{d}f},$$

其中 $W(t,f)$ 表示 Wigner-Velle 时频分布 (WVD) 变换:

$$W(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t+\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

这里 $z^*(t)$ 为解析信号 $z(t)$ 的共轭符号. Ville 指出, 从 WVD 的一阶矩可以得到瞬时频率, 它也可以用窗口 Fourier 变换得到, 工程学者认为那是信号的线性表示工具, 不能适用于非平稳信号分析.

1998 年, 美国宇航局的 Norden E. Huang 等发明了 Hilbert–黄变换 (HHT)[5]. HHT 是针对非线性和非平稳数据一种分析工具. 与传统的频谱分析, 小波分析和 Vigner 分布方法不同, HHT 方法是一种自适应的时频分析方法, 它不需要任何的先验基函数. 首先通过 EMD 的筛过程从采样数据做自适应分解, 形成近似正交的内蕴模式函数 (IMF), 一般都是单成分信号. 然后根据这些 IMF 的 Hilbert 变换所形成的解析信号的俯角导数做为瞬时频率, 在时间频率能量平面上形成谱值. HHT 方法作为一个强大的分析一维非线性非平稳信号的工具, 被成功应用于很多重要数据分析领域. 尽管还存在很多问题, 比如如何保证分解出的每个 IMF 都是单成分, 如何有效解决模式混叠 (mode mixing) 问题; 甚至如何定义单成分, 都是待解决的问题.

图像是二维信号, 图像中的相位信息, 进而频率信息的重要性早已为人重视[6](图 1). 纹理图像一般都是非平稳的多成分信号, 如何对纹理图像进行分析一直是图像处理和计算机视觉的难题. 纹理分析在遥感图像、医学图像、文件分析、目标识别等多个领域都有广泛的应用. 纹理分析主要有四个研究方向: 纹理分割、纹理分类、纹理合成和根据纹理的三维重建. 纹理分析有很多种方法, 其中信号处理方法是人们试图通过滤波器来刻画图像特征, 以前人们常用 Gabor 变换、Wavelet 变换等, 但它是在固定的基下进行分解. HHT 提供了一种自适应分解的方法, 它试图将纹理图像分解为单分量信号之和, 从而可以类似一维的情况分析每个 IMF 的瞬时频率等特征. 这里一个关键概念 ——“2D 瞬时频率”还没有建立. 对此问题, 人们做了一些尝试, 但都不能给出科学的 2D 瞬时频率的定义. 基本想法有三: 一是用逼近方法, 如 T-K 算子[7]、QEA 算子、AM-FM 分解等, 它们求出了振幅和相位, 但没有对相位求导, 没有涉及频率的概念, 并且这是一种近似表示, 不能完全重

构; 二是用多复变中解析函数概念[8], 这时会出现两个幅角, 再求偏导数, 会得出四个, 显然做瞬时频率不合适; 三是利用四元数解析概念, 也遇到类似困难[9], 这时求导会产生四或六个瞬时频率, 不利于表示. 文献 [9] 还是用一维 EMD 张量积做的二维 EMD, 应用于纹理分析及图像瞬时频率估计, 这里的"图像瞬时频率"是两个方向的一维瞬时频率的张量积, 该文献注意到了二维瞬时频率的重要价值, 但没有给出科学的定义.

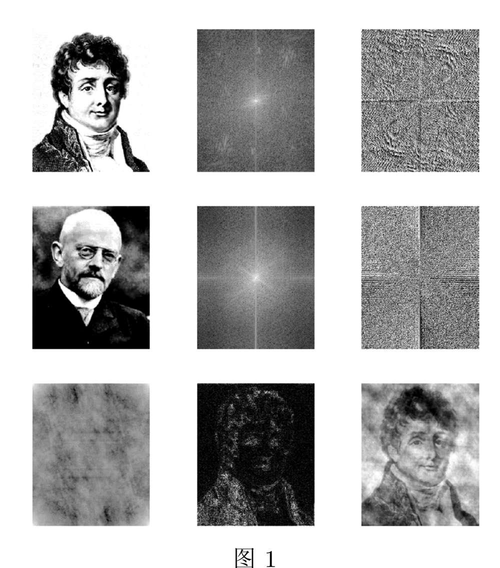


图 1

注：图中分别把 Fourier 和 Hilbert 的图像分解为振幅和相位 (见前两行), 然后把 Hilbert 图像的振幅和 Fourier 图像的相位合成 (见第 3 行), 合成的结果显示的是 Fourier 的图像. 这个试验说明图像的相位信息、进而频率信息对人的视觉更为重要.

合理的 2D 瞬时频率定义, 应该具有如下特征：① 可计算性; ② 两个方向的瞬时频率与物理意义一致性; ③ 有相当广泛的适用性, 能计算公认的单成分信号, 模式混叠不能太严重; ④ 可检验性, 即对平稳频率的图像计算结果应该于线性方法得出的结果相容.

参 考 文 献

[1] Gabor D. Theory of communication. Proc IEEE, 1946, 93: 429-457

[2] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals. Proc IEEE, 1992, 80:520-538

[3] Cohen L. Time-frequency Analysis. Prentice-Hall, 1995

[4] Patrick J Loughlin. The Time-dependent Weighted Average Instantaneous Frequency. Proc IEEE Intl Symp. Time-Frequency and Time-Scale Analysis., Oct., 1998: 97-100

[5] Huang N E, Shen Z, Long S R, Wu M C, Shih H H, Zheng Q, Yen N C, Tung C C and Liu H H. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proc Roy Soc London A, 1998, 454: 903-995

[6] Oppenheim A V and Lim J S. The importance of phase in signals. Proc IEEE, 1981, 69(5): 529-541

[7] Vakman D. On the analytic signal, the Teager-Kaiser energy algorithm and other methods for defining amplitude and frequency. IEEE Trans Signal Proc, 1996, 44: 791-797

[8] Michael Felsberg, Gerald Sommer. Structure Multivector for Local Analysis of Images. Theoretical Foundations of Computer Vision, 2000: 93-104

[9] 沈滨, 崔峰, 彭思龙. 二维 EMD 的纹理分析及图像瞬时频率估计. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 10

撰稿人：彭立中
北京大学

$3n$+1 猜想与复解析方法

3n+1 Conjecture and Complex Analysis Method

设自然数集 **N** 上的自映照 f 的定义如下：如果 n 为奇数, 那么令 $f(n)=3n+1$, 如果 n 为偶数, 则令 $f(n)=n/2$. 对于任意的非负整数 k, 我们用符号 $f^{\circ k}$ 表示 f 的 k 次迭代. 对于函数 f, 有如下既有趣而又长期悬而未决的困难问题.

$3n$+1 问题：对于任意预先取定的正整数 n, 相应存在正整数 k_n 使得

$$f^{\circ k_n}(n)=1.$$

$3n$+1 猜想断言：对于任意取定的正整数, 经 f 连续作用有限次后均无一例外地落入 $\{4,2,1\}$ 这一数字陷阱.

20 世纪 30 年代 L. Collatz 为了弄清顶点集是自然数集而有向边集合为 $\{(n, f(n)):n\in \mathbf{N}\}$ 的有向图是否弱连通以及其上到底有多少个有向圈的问题, 产生了 $3n$+1 猜想的萌芽. 直到 1952 年, Collatz 将这一问题告诉了 H. Hasse, 此后该问题在世界各地广为流传, 因而此问题也就拥有了许许多多的名字, 例如 $3n+1$ 猜想、Hasse 问题、Syracuse 问题、Kakutani 问题、Ulam 问题以及 Thwaites 问题等等. 人们对于 $3n+1$ 猜想的探索活动一直长盛不衰, 各种各样的数学理论被用于对这一问题的探究.

1993 年, S. Eliahou 证明了：如果 Diophantine 方程 $(3+1/n_1)(3+1/n_2)\cdots(3+1/n_s)=2^p$ (其中 s 和 p 为正整数, $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 为 s 个两两互不相同的正的奇数) 只有平凡解 $s=1,\ p=2,n_1=1$ 的话, 那么 $3n$+1 函数只有一个周期循环 $\{4,2,1\}$.

然而要想弄清楚 Diophantine 方程 $(3+1/n_1)(3+1/n_2)\cdots(3+1/n_s)=2^p$(其中 s 和 p 为正整数, $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 为 s 个两两互不相同的正的奇数) 解的状况是一件极为困难的事情. 由此可以看出研究 $3n+1$ 猜想的困难程度.

J. Hadamard 曾说过：“沟通实数域中两个真理之间的最短路近往往是通过复数域”. 对于某些数论问题的研究, 复分析方法是一个行之有效的方法.

1994 年, L. Berg 和 G. Meinardus 证明了：$3n+1$ 猜想等价于函数方程

$$h(z^3)=h(z^6)+\{h(z^2)+\lambda h(\lambda z^2)+\lambda^2 h(\lambda^2 z^2)\}/3z \quad (\text{其中 } \lambda=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3})$$

在单位圆盘 $\{z:\ |z|<1\}$ 中的解析函数解呈如下形式：$h(z)=h_0+h_1 z/(1-z)$ (其中 h_0, h_2 为复常数).

设 $g(z)$ 为超越整函数,z_0 为复平面中的一点, 如果函数列 $\{g^{\circ k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ 存在子列在点 z_0 的某邻域中局部一致收敛于 ∞ 或某个解析函数, 则称 z_0 为 $g(z)$ 的正规点. 记 $g(z)$ 的正规点的集合为 $\Phi(g)$. 显然, $\Phi(g)$ 是复平面 $\mathcal{L}$ 的开子集. $\Phi(g)$ 的每一个最大连通子区域均称为 $\Phi(g)$ 的分支.

1998 年, S. Letherman, D. Schleicher 和 R. Wood 证明了：任何整函数 $h(z)$ 均使得 $g(z)=z/2+(1-\cos\pi z)(z+1/2)/2+1/\pi(1/2-\cos\pi z)\sin\pi z+h(z)\sin^2\pi z$ 满足：$N\subset\Phi(g)$.

如果能证明存在整函数 $h(z)$, 使得对于上述的 $g(z)$, $\Phi(g)$ 的每一个包含某正整数的分支 D, 均存在 $z_0\in D$, 使 $\{g^{\circ k}(z_0)\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 1, 那么由此可推出 $3n+1$ 猜想成立.

参 考 文 献

[1] Berg L, Meinardus G. Functional equations connected with the Collatz problem. Results in Math, 1994, 25: 1-12

[2] Eliahou S. The $3x+1$ problem : new lower bounds on nontrivial cycle length. Discrete Math, 1993, 118: 45-56

[3] Lagarias J C. The $3x+1$ problem and its generalizations. Amer Math Monthly, 1985, 92(1): 3-23

[4] Letherman S, Schleiche D, Wood R. The $3n+1$-problem and holomorphic dynamics. Experimental Mathematics, 1999, 8(3): 241-251

[5] Wirsching G J. The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function. Berlin: Springer-Verlag, 1998

撰稿人：李玉华

云南师范大学

布洛克 (Bloch) 常数

Bloch Constant

存在一个常数 $r > 0$, 只要 $f(z)$ 是单位圆盘 U 上的全纯函数, $f'(0) = 1$, 则 $f(U)$ 就一定包含一个以 r 为半径的圆盘 $U(f(a), r)$, 并且 f^{-1} 在 $U(f(a), r)$ 上有定义且双全纯. 这里的 r 的上确界被称为 Bloch 常数 B. Bloch 首先发现 $B > 0$.

利用超双曲度量的办法, L. V. Ahlfors 于 1938 年首先证明 $B \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 1962 年, M. Heins 证明了 Bloch 常数 $B > \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 随后这个不等式被不断改进, 如 H. Chen 和 P. M. Gauthier 等[2] 得到估计 $B \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times 10^{-4} B > \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 0.0002$.

L. V. Ahlfors 和 H. Grunsky[1,2] 等进一步猜测

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.4718617\cdots$$

如果限于考虑凸像全纯函数, 则相应的 Bloch 常数是 $\dfrac{\pi}{4}$.

参 考 文 献

[1] Ahlfors L V, Grunsky H. Über die Blochsche Konstante. Math Zeit, 1937, 42: 671-673

[2] Bloch A. Les theorems de M Valiron sur les fonctions entieres et la theore de l'uniformisation. Ann Fac Sci Univ Toulouse III, 1925, 17

[3] Chen H, Gauthier P M. On Bloch's Constant. J d'Analyse Math, 1996, 69: 275-291

[4] Heins M. Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962

撰稿人：刘劲松

中国科学院数学与系统科学研究院

博克纳–里斯 (Bochner-Riesz) 乘子问题

Bochner-Riesz Multiplier Problem

19 世纪的数学家 Fourier 为求解波动方程与热传导方程, 引进了 Fourier 级数. Fourier 展开可以帮助人们研究函数的整体性质、各种算术问题和微分方程, 从而在数学及相关学科的不同领域中产生了广泛的影响. 从此, 有关 Fourier 级数的各种收敛问题一直是分析中的根本问题之一. 为利用球形平均来研究周期函数的多重 Fourier 级数的求和问题, S. Bochner 于 1936 年引入了 Bochner-Riesz 乘子. 相应地, 为研究 Fourier 积分的球形收敛, 人们考察了如下的 Bochner-Riesz 乘子：

$$\widehat{T^a f}(\xi) \equiv (1-|\xi|^2)_+^a \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\, a \geqslant 0,$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换, 即 $\hat{f}(\xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ 且 $A_+ \equiv \max\{A,\, 0\}$. T^a 也被称为 Bochner-Riesz 平均.

以下用$\mathcal{BR}(p,\, a)$ 表示 T^a 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 即存在正常数 $C_{p,\,a,\,n}$ 使得对所有的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|T^a f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{p,\,a,\,n}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 其中 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$. 当 $n=1$ 时, 若 $a=0$ 且 $1<p<\infty$, 或 $a>0$ 且 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 容易证明 $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立. 当 $n\geqslant 2$ 时, 情形变得相当复杂. 1954 年, C. S. Herz 给出了当 $n\geqslant 2$ 且 $0<a\leqslant \dfrac{n-1}{2}$ 时 $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立的一个必要条件, 即若 $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立, 则 $p^* \equiv \max\{p,\, p'\} < \dfrac{2n}{n-1-2a}$, 其中 p' 表示 p 的共轭指标, 即 p' 满足 $1/p+1/p'=1$. 1956 年, E. M. Stein 证明了当 $n\geqslant 2$ 且 $a>\dfrac{n-1}{2}$ 时, 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立.

于是人们猜测：当 $n\geqslant 2$, $0\leqslant a\leqslant \dfrac{n-1}{2}$ 且 $p^* < \dfrac{2n}{n-1-2a}$ 时, T^a 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 这就是所谓的 Bochner-Riesz 乘子问题. 当 $a=0$ 时, 此猜测即为著名的圆盘猜测.

20 世纪 50~70 年代间, A. P. Calderón, A. Zygmund, E. M. Stein 和 C. Fefferman 等著名数学家对该猜测的研究做出了重要的贡献. 其中, C. Fefferman 于 1971 年证明了当 $n\geqslant 2$ 且 $a=0$ 时, $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立当且仅当 $p=2$, 从而否定了圆盘猜测. 这也是 C. Fefferman 于 1978 年获 Fields 奖的主要工作之一. 1972 年, L. Carleson 和 P. Sjölin 利用振荡积分的方法完整地证明了当 $a>0$ 且 $n=2$ 时, $\mathcal{BR}(p,\, a)$ 成立.

注意到, 由插值定理可将上述猜测归结为当 $p^* > \frac{2n}{n-1}$ 且 $a > a_p = \left(\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)_+$ 时, $\mathcal{BR}(p, a)$ 是否成立. 特别地, 当 $n = 3$ 时, 只需证明对 $p^* > 3$ 及 $a > a_p$, $\mathcal{BR}(p, a)$ 是否成立.

自 20 世纪 90 年代起, J. Bourgain, T. Wolff, T. Tao, A. Vargas 和 L. Vega 先后通过 Kakeya 极大函数的性质和多线性的 Fourier变换的限制性质出发来对该猜测进行研究. 2004 年, S. Lee 证明了当 $n \geqslant 3$ 时, 若 $p^* > \frac{2n+4}{n}$ 且 $a > a_p$, 则 $\mathcal{BR}(p, a)$ 成立. 特别地, 当 $n = 3$ 时, $p^* > 4 - \frac{2}{3}$. 这是目前已知的最好结果.

现回到 Bochner-Riesz 平均的点态收敛问题, 即研究 $\lim\limits_{R\to\infty} T_R^a f(x) = f(x)$a.e. 何时成立, 其中 $\widehat{T_R^a f}(\xi) = (1 - |\xi|^2/R^2)_+^a \hat{f}(\xi)$. 该问题归结为建立相应的极大算子 $(T^a)^* f \equiv \sup_{R>0} |T_R^a f|$ 的某种有界性. 当 $a > \frac{n-1}{2}$ 时, 由于 $(T^a)^*$ 被 Hardy-Littlewood 极大函数所控制, 所以点态收敛性是容易得到的; 而当 $a \leqslant \frac{n-1}{2}$ 时目前只知道部分结果.

1958 年, E. M. Stein 证明了当 $0 < a \leqslant \frac{n-1}{2}$ 且 $\frac{2(n-1)}{n-1+2a} < p < \frac{2n}{n-1-2a}$ 时, 点态收敛性成立. 当 $a = \frac{n-1}{2}$ 时, E. M. Stein 给出关于几乎处处收敛的一个否定结论. R. Fefferman 引入了一类熵空间, 并猜想点态收敛在该熵空间成立. 陆善镇, M. H. Taibleson 和 G. Weiss 通过引入一类块空间解决了该猜想. 陆善镇进一步证明了 Bochner-Riesz 在临界阶关于 $L^1([-\pi, \pi)^n)$ 中函数收敛的局部性质在强求和意义下成立.

1983 年, A. Carbery 证明了当 $n = 2$ 且 $2 \leqslant p < \frac{2n}{n-1-2a}$ 时, $(T^a)^*$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 1985 年, M. Christ 证明了当 $n \geqslant 3$ 时, 若 $a > \frac{n-1}{2(n+1)}$ 且 $2 \leqslant p < \frac{2n}{n-1-2a}$, 则 $(T^a)^*$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 1988 年, A. Carbery 和 F. Soria 证明了当 $a = 0$ 时, 若点态收敛在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中成立, 则 $2 \leqslant p < \frac{2n}{n-1}$; 反之, A. Carbery, J. L. Rubio de Francia 和 L. Vega 证明了当 $a = 0$, $2 \leqslant p < \frac{2n}{n-1}$ 时, 点态收敛在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中成立. 1998 年, T. Tao 证明了当 $p \leqslant 2$ 时, 若 $(T^a)^*$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 则 $a \geqslant \frac{2n-1}{2p} - \frac{n}{2}$. 2002 年, 当 $n = 2$ 时, T. Tao 补充了 A. Carbery 的工作, 即证明了当 $1 < p < 2$ 且 $a > \max\left\{\frac{3}{4p} - \frac{3}{8}, \frac{7}{6p} - \frac{2}{3}\right\}$ 时, $(T^a)^*$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$

有界的. 2004 年, S. Lee 证明了当 $n \geqslant 3$ 时, 若 $\dfrac{2n+4}{n} \leqslant p < \dfrac{2n}{n-1-2a}$, 则 $(T^a)^*$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

最后, 值得指出的是, 在寻求解决 Bochner-Riesz 问题的过程中, C. Fefferman 和 E. M. Stein 使用 Fourier 变换的限制性定理获得一些一般性结果. A. Córdoba 则使用几何论证的方法, 把 L. Carleson 和 P. Sjölin 的证明与 Kakeya 极大函数联系起来. J. Bourgain 和 T. Wolff 则基于进一步获得的 Kakeya 极大函数的性质来研究 Bochner-Riesz 问题. T. Tao, A. Vargas, L. Vega 和 S. Lee 更多地从多线性的 Fourier 变换的限制性质出发来研究该问题. Bochner-Riesz 问题与 Kakeya 问题以及 Fourier 变换的限制性问题三者的进展几乎同步, 三者之间有着很密切的联系. 此外, 这三个问题与波动方程的解的局部光滑性猜测有关. 但是目前已知的这些方法看起来仍然不足以解决 $n \geqslant 3$ 时 Bochner-Riesz 问题.

参 考 文 献

[1] Bochner S. Summation of multiple Fourier series by spherical means. Trans Amer Math Soc, 1936, 40: 175-207

[2] Stein E M. Localization and summability of multiple Fourier series. Acta Math, 1958, 100: 93-147

[3] Fefferman C. The multiplier problem for the ball. Ann of Math, 1971, 94(2): 330-336

[4] Carleson L, Sjölin P. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. Studia Math, 1972, 44: 287-299

[5] Lu S, Taibleson M H, Weiss G. On the almost everywhere convergence of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series, Harmonic analysis (Minneapolis, Minn, 1981). Berlin-New York: Springer-Verlag, 1982. 311-318

[6] Carbery A. The boundedness of the maximal Bochner-Riesz operator on $L^4(R^2)$. Duke Math J, 1983, 50: 409-416

[7] Bourgain J. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. Geom Funct Anal, 1991, 1: 147-187

[8] Wolff T. An improved bound for Kakeya type maximal functions. Rev Mat Iberoamericana, 1995, 11: 651-674

[9] Tao T, Vargas A, Vega L. A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures. J Amer Math Soc, 1998, 11: 967-1000

[10] Lee S. Improved bounds for Bochner-Riesz and maximal Bochner-Riesz operators. Duke Math J, 2004, 122: 205-232

撰稿人：杨大春

北京师范大学

布伦南 (Brennan) 猜测

The Brennan Conjecture

众所周知, 大学复变函数的内容主要由 Cauchy 积分理论、Weierstrass 级数理论与 Riemann 共形几何理论构成. 在 Riemann 共形几何理论中, 其中心内容是以下非常重要的 Riemann 存在性定理 (有时也称为 Riemann 映射定理).

Riemann 存在性定理 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 是一个单连通区域, $z_0 \in \Omega$, 则存在唯一的从 Ω 到单位圆盘 $\triangle$ 的共形映射 $f(z)$, 使得其满足 $f(z_0)=0$, $f^{'}(z_0)>0$.

由上述定理, 对任何单连通区域 Ω, 只要其边界多于两点, 总存在 Ω 到单位圆盘的共形映射 $f(z)$. 这样的映射也称为 Ω 上的 Riemann 映射.

现设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是边界多于两点的单连通区域, $f:\Omega \to \triangle$ 是 Riemann 映射, 则由初等微积分知

$$\int\int_{\Omega} |f^{'}(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \text{ (单位圆盘的面积)}.$$

这说明了 $f^{'} \in L^2(\Omega, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$. 一个自然的问题是 f' 是否属于其它的 L^p? 在这方面该问题有以下进展.

(1) 在一篇没发表的论文中, Gehring 和 Haymam 证明了 $f' \in L^p$, 其中 $p \in \left(\frac{4}{3}, 2\right]$, 并指出 $\frac{4}{3}$ 的下界是精确的.

(2) Metzger(Proc. AMS, 1973) 证明 $f' \in L^p$ 对 $p \in \left(\frac{4}{3}, 3\right)$ 成立.

(3) Brennan[1] 证明 $f' \in L^p$ 对 $p \in \left(\frac{4}{3}, p_0\right)$ $(p_0 > 3)$ 成立.

(4) Bertililsson(博士论文, KTH Sweden, 1999) 证明了在 (3) 中的 $p_0 > 3.422$. 这是目前最好的结果.

在这方面, Brennan 在 1978 年曾作出如下猜测：

Brennan 猜测 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一单连通区域, f 为从 Ω 到 $\triangle$ 的共形映射, 则 $f' \in L^p(\Omega, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ 对 $p \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 成立.

关于 Brennan 猜测, 我们有以下两个注解：

(1) 对于 Koebe 函数 $f:\mathbb{C}\backslash\left\{\left[\frac{1}{4},\infty\right)\right\}\to\triangle$ 可知 $f'\notin L^4$. 因此, 若 Brennan 猜测正确, 则上界 4 是精确的.

(2) Brennan 猜测具有很多有意义的推论, 许多数学家, 如 Carleson 和 Makarov 等对此进行了研究. 最近, Bishop(Ark. Math, 2001) 还指出它与 Sullivan 关于平面单连通区域的凸包定理中的拟共形映射最大伸缩商 K 具有密切关系.

参 考 文 献

[1] Brennan J. The integrability of the derivative in conformal mapping. J London Math Soc, 1978, 18(2): 261-272

[2] Carleson L, Makarov N. Some results connected with Brennan conjecture. Ark Mat, 1994, 33(1): 33-62

[3] Bishop C. Quasiconformal lipchitz maps. Sullivan's convex hull theorem and Brennan conjecture. Ark Mat, 2002, 40(1): 1-26

撰稿人：伍胜健

北京大学

傅里叶 (Fourier) 变换的限制性问题

Restriction Problem of The Fourier Transform

1970 年, C. Fefferman 通过 Fourier 变换在单位球面 S^{n-1} 上的某些限制性结果得到了关于 Bochner-Riesz 问题的一个一般性的结果. 此后关于 Fourier 变换的限制性质的研究逐渐引起了人们的兴趣. 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中光滑流形, $d\sigma$ 为其诱导的 Lebesgue 测度, $1 < p \leqslant 2$. 称 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 限制对 S 成立, 若存在与 p 有关的正数 $q > 1$, 使得对所有有紧支集的光滑函数 f, 有估计

$$\left(\int_{S_0} |\hat{f}(\xi)|^q \, d\sigma(\xi)\right)^{1/q} \leqslant C_{p,\,q,\,S_0}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换, 即 $\hat{f}(\xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} f(x)\,dx$，$S_0$ 是 S 的任意一个开子集, 并且其闭包为 S 的紧子集. 由于有紧支集的光滑函数在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 如果以上估计成立, 则由连续性, 对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 可以定义 $\hat{f}$ 在 S 上的限制为一个 $L^q(S,\, d\sigma)$ 函数.

下面我们用记号 $\mathcal{R}_S(p,\, q)$ 表示估计 $\|\hat{f}\|_{L^q((S,\,d\sigma))} \leqslant C_{p,\,q;\,S}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. 人们发现, 若 S 包含于 $\mathbb{R}^n$ 的某个超平面, 上述估计只对 $p = 1$ 成立. 令人吃惊的是若 S 有非 0 曲率, 则能得到一些非平凡的限制性结果. 其中最引人关注的是 $S = S^{n-1}$ 的情形. 对此, 人们有如下猜测：

当 $S = S^{n-1}$ 时, $\mathcal{R}_S(p,\, q)$ 成立当且仅当 $p' > \dfrac{2n}{n-1}$ 且 $q' \geqslant \left(\dfrac{p'(n-1)}{n+1}\right)'$, 其中对于 $1 \leqslant r \leqslant \infty$, r' 表示 r 的共轭指标, 即 r' 满足 $1/r + 1/r' = 1$.

当 $S = S^{n-1}$ 时, 若设 $\mathcal{R}_S(p,\, q)$ 成立, 并取 $\hat{f} = \chi_R$, 其中 R 为以 $(1,\, 0,\, \cdots,\, 0)$ 为中心、边长分别为 $\delta^2, \delta, \cdots, \delta$ 的矩形且 χ_R 为 R 的特征函数, 则可验证 p, q 必须满足 $p' > \dfrac{2n}{n-1}$ 且 $q' \geqslant \left(\dfrac{p'(n-1)}{n+1}\right)'$. 1970 年, C. Fefferman 证明了 $n = 2$ 时这个猜测成立; 并且进一步证明了若 $p > 1$ 且 $\mathcal{R}_S(p,\, 2)$ 成立, 则当 $a > \max\left\{\left|\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2}, 0\right\}$ 时, Bochner-Riesz 平均 T^a 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 1984 年, E. M. Stein 进一步证明了当 $p' \geqslant \dfrac{2(n+1)}{n-1}$ 且 $q' \geqslant \left(\dfrac{p'(n-1)}{n+1}\right)'$ 时, $\mathcal{R}_S(p,\, q)$ 成立. 由此及 C. Fefferman

的结果可导出：当 $a > \frac{n-1}{2n+2}$ 且 $\max\{p, p'\} < \frac{2n}{2n-1-2a}$ 时, Bochner-Riesz 平均 T^a 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 1991 年, J. Bourgain 证明了当 $n \geqslant 3$ 且 $p', q' \geqslant (p(n))'$ 时, $\mathcal{R}_S(p, q)$ 成立, 其中 $p(n)$ 可归纳得出且满足 $\frac{2n+2}{n+3} < p(n) < \frac{2n}{n+1}$. 1996 年, A. Moyua, A. Vargas 和 L. Vega 证明了当 $n \geqslant 3$ 时, 若 $q' > \frac{2(n^2+3n+3)}{n^2+3n+1}$ 且 $p' > \frac{2(n^2+3n+3)}{n^2+n-1}$, 则 $\mathcal{R}_S(p, q)$ 成立. 2003 年, T. Tao 证明了当 $n \geqslant 3$ 时, 若 $p' > \frac{2(n+2)}{n}$ 且 $q' \geqslant \left(\frac{p'(n-1)}{n+1}\right)'$, 则 $\mathcal{R}_S(p, q)$ 成立. 这个工作是目前已知的最好结果.

另一方面, 当 $n \geqslant 3$ 且 S 为锥体时, 由于 Fourier 限制性定理与波动方程紧密联系, 这一问题也引起了人们极大的兴趣. 人们猜测当 $n \geqslant 3$ 且 S 为锥体时, $\mathcal{R}_S(p, q)$ 成立当且仅当 $p' > \frac{2(n-1)}{n-2}$ 且 $q' > \left(\frac{p'(n-2)}{n}\right)'$.

R. S. Strichartz 最早开始这方面的研究, 并证明了当 $p' \geqslant 6$ 且 $q' \geqslant \left(\frac{p'}{3}\right)'$ 时 $R_S(p, q)$ 成立. T. B. Barcelo 证明了当 $n = 3$ 时, 该猜测成立. T. Wolff 证明了当 $n = 4$ 时, 该猜测成立, 并进一步证明了当 $n \geqslant 5$ 时, 若 $p' > \frac{2(n+2)}{n}$ 且 $q' \geqslant \left(\frac{p'(n-2)}{n}\right)'$, 则 $\mathcal{R}_S(p, q)$ 成立.

最后指出, E. M. Stein 和 P. Tomas 在证明限制性定理时主要使用了 $L^2(S, d\sigma)$ 的正交性原理. J. Bourgain, A. Moyua, A. Vargas, L. Vega 和 T. Tao 则通过充分利用 $d\sigma$ 的 Fourier 变换的衰减性在某些 $L^p(S, d\sigma)(p \neq 2)$ 空间上发展了正交性原理. 另一方面, J. Bourgain 说明了人们如何能从 Kakeya 问题取得的任何非平凡的进展导致限制性问题取得某些部分的进展. 但是, 从目前已知的方法来看, 即使 Kakeya 问题彻底解决也不能完整解决限制性问题.

参 考 文 献

[1] Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators. Acta Math, 1970, 124: 9-36

[2] Strichartz R S. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. Duke Math J, 1977, 44: 705-714

[3] Barcelo T B. On the restriction of the Fourier transform to a conical surface. Trans

Amer Math Soc, 1985, 292: 321-333

[4] Stein E M. Oscillatory integrals in Fourier analysis. Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984). Ann of Math Stud, 112. Princeton, N J: Princeton Univ Press, 1986: 307-355

[5] Bourgain J. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. Geom Funct Anal, 1991, 1: 147-187

[6] Moyua A, Vargas A, Vega L. Schrödinger maximal function and restriction properties of the Fourier transform. Internat Math Res Notices, 1996, 16: 793-815

[7] Wolff T. A sharp bilinear cone restriction estimate. Ann of Math, 2001, 153(2): 661-698

[8] Tao T. A sharp bilinear restrictions estimate for paraboloids. Geom Funct Anal, 2003, 13: 1359-1384

撰稿人：杨大春
北京师范大学

朱莉娅 (Julia) 集的分形维数

Fractal Dimensions of Julia Sets

复动力系统主要研究复解析映照迭代生成的动力系统的分析、几何与拓扑性质等, 从而对一些自然现象作出更深刻的解释. 复动力系统的研究始于 1920 年前后, 著名数学家 P. Fatou 与 G. Julia 受 Newton 迭代法以及 Klein 群理论的启发, 把当时的最新数学研究成果 —— 正规族理论运用到动力系统, 证明了一系列奠基性的结果, 形成了经典的 Fatou-Julia 理论. 20 世纪 80 年代以来, 随着现代数学理论的不断完善和计算机科学的快速发展, 复动力系统又一次出现了蓬勃发展的势头.

设 $f:\overline{C}\to\overline{C}$ 上是有理映照, 则 $f(z)$ 可以表示为两个没有公共因子的多项式之比, 以下恒设有理映照的次数大于 1. 任取自然数 p, 用 f^p 表示 $f(z)$ 的 p 次迭代, 称 z_0 是 $f(z)$ 的周期点是指 $f^p(z_0)=z_0$, 满足此式的最小的正整数 p 称之为 z_0 的周期, 且称导数值 $\lambda=(f^p)'(z_0)$ 为 z_0 的特征值. 若 $0\leqslant|\lambda|<1$, 称 z_0 是 $f(z)$ 的吸性周期点; 若 $|\lambda|=1$, 称 z_0 是 $f(z)$ 的中性周期点; 若 $|\lambda|>1$, 称 z_0 是 $f(z)$ 的斥性周期点. $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 定义为 $f(z)$ 的斥性周期点集的闭包, 它是 $f(z)$ 迭代的不稳定集合. Julia 集一般具有非常复杂的分形结构, 若 $J(f)\neq\overline{C}$, 则 $J(f)$ 是无处稠密的集合. 对于超越整函数映照 $f:C\to C$, $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 可类似于有理映照定义为 $f(z)$ 的斥性周期点集的闭包, 研究 Julia 集的 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数是复动力系统的重要研究课题.

设 X 是 n 维欧氏空间 R^n 的子集, U_j 是 R^n 的非空的有限或可数子集, $X\subset\cup U_j(j\in I)$, $\mathrm{diam}U_j=\sup\{|x-y|,x,y\in U_j\}$ 满足 $0<\mathrm{diam}U_j<\delta$, 则称 $\{U_j\}$ 是 X 的一个 δ 子覆盖. 令 $s\geqslant0$, 对任意的 $\delta>0$, 定义

$$H_\delta^s(X)=\inf\left\{\sum_{j\in I}(\mathrm{diam}U_j)^s|\{U_j\}\text{是 } X \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\right\},$$

则称极限 $H^s(X)=\lim\limits_{\delta\to0}H_\delta^s(X)$ 为集合 X 的 s 维 Hausdorff 测度, 且称 $HD(X)=\inf\{s|H^s(X)=0\}=\sup\{s|H^s(X)=\infty\}$ 为 X 的 Hausdorff 维数. 对于复动力系统 Julia 集的分形维数, 有下面两个重要问题, 它们是复动力系统、分形几何和其他非线性科学领域共同关注的问题：

(1) 若有理函数 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 连通且不为圆周, 是否有 $HD(J(f))>1$? 何时 $HD(J(f))=2$?

(2) 超越整函数 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 是否有 $HD(J(f)) > 1$? 何时 $HD(J(f)) = 2$?

关于上述第一个问题, 目前已有许多研究工作, 其中 C. McMullen, M. Shishikura, M. Lyubich, M. Urbanski, F. Przytycki 等均做出令人关注的结果. 1990 年 A. Zdunik [1] 解决了多项式映照的情形.

关于上述第二个问题, C. McMullen[5], G. M. Stallard[6,7] 等有一系列研究工作, 对一些超越整函数映照类他们研究了这一问题. 但是对于最一般的情形, 上述两个问题目前仍未获得解决.

参 考 文 献

[1] Zdunik A. Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. Invent Math, 1990, 99: 627-649

[2] Shishikura M. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. Ann Math, 1998, 147: 225-267

[3] Lyubich M. Hausdorff dimension and conformal measure of Feigenbaum Julia sets. arXiv:math. DS/0408290, 2004, 21

[4] Przytycki F, Urbanski M and Zdunik A. Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps I. Ann Math, 1989, 130: 1-40

[5] McMullen C. Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. Trans Amer Math Soc, 1987, 300(1): 329-342

[6] Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions IV. J London Math Soc, 2000, 61(2): 471-488

[7] Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions II. Math Proc Phil Soc, 1996, 11: 513-536

撰稿人：乔建永
中国矿业大学 (北京)

挂谷 (Kakeya) 问题

Kakeya Problem

1917 年, S. Kakeya 提出了著名的投针问题：在平面上连续地把一根针旋转 2π 角度所获得的最小面积是多少? 事实上, 投针问题等价于求 Kakeya 集 (也称为 Besicovitch 集) 的最小 Lebesgue 测度. 这里称集合 E 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的 Kakeya 集是指 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集且包含了 $\mathbb{R}^n$ 的每个方向的一条单位线段, 即对任意的 $\xi \in S^{n-1}$ (S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面), 存在 $a \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\{a+t\xi:\ t \in [0,\, 1]\} \subset E$. 1928 年, A. S. Besicovitch 构造了 Lebesgue 测度可以任意小的 Kakeya 集. 此后, 人们转而研究 Kakeya 集的 Hausdorff 维数. 这里集合 E 的 Hausdorff 维数定义为

$$\dim_H E \equiv \inf\left\{d:\ \text{对任意 } 0<\delta\leqslant 1, E \subset \cup_i B(x_i,\, r_i),\, r_i \leqslant \delta \text{ 且 } \sum_i r_i^d < \infty\right\},$$

其中对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, $B(x,\, r)$ 表示以 x 为心, r 为半径的开球. 一个看似合理的猜测是：$\mathbb{R}^n$ 中的 Kakeya 集 E 的 Hausdorff 维数为 n.

这个猜测在调和分析的振荡积分理论中起着重要的作用, 也与 Dirichlet 级数的分布有密切的关系. 历史上, 人们取得了如下一系列重要的结果, 但除了 $n = 2$, 该猜测还没有彻底解决. 1971 年, R. O. Davies 对 $n = 2$ 证实了该猜测. 1995 年, T. Wolff 证明了 $\dim_H E \geqslant \dfrac{n+2}{2}$. 1999 年, J. Bourgain 证明了 $\dim_H E \geqslant \dfrac{13n+12}{25}$. 1999 年, N. H. Katz 和 T. Tao 证明了 $\dim_H E \geqslant \dfrac{6n+5}{11}$; 2002 年, 他们还证明了 $\dim_H E \geqslant (2-\sqrt{2})(n-4)+3$, 从而改进了当 $n \geqslant 5$ 时已有的结果.

另一方面, 关于 Kakeya 集的 Minkowski 维数的研究同样也引起人们的极大兴趣, 并且关于 Minkowski 维数取得的进展与 Hausdorff 维数取得的进展几乎同步. 在此不再赘述.

关于 Kakeya 集的研究强烈地依赖于如下定义的 Kakeya 极大函数. 给定 $N > 1$, 记 $\mathcal{R}_N$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 条边长为 h, $h > 0$, 且另一边长为 Nh 的矩形组成的集合. 对局部可积函数 f 及 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义其 Kakeya 极大函数 $\mathcal{K}_N f(x)$ 为

$$\mathcal{K}_N f(x) \equiv \sup_{x\in R\in\mathcal{R}_N} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $|R|$ 表示 R 的 Lebesgue 测度. 显然, $\mathcal{K}_N$ 是从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 且有界常数为 1. 另一方面, 由于每一个矩形包含在一个半径为 c_nNh 的球内, 故 $\mathcal{K}_Nf \leqslant C_nN^{n-1}Mf$, 其中 Mf 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数. 因为 M 是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 因此 $\mathcal{K}_N$ 也是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 且有界常数为 C_nN^{n-1}. 应用插值方法可知, 对 $1<p<\infty$, 有 $\|\mathcal{K}_Nf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_nN^{(n-1)/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 其中 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

注意到, Kakeya 极大函数 $\mathcal{K}_N$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界常数为 N 的函数. 确定该常数关于 N 的增长阶直接相关于确定 Kakeya 集的 Hausdorff 维数和 Minkowski 维数; 还与 Bochner-Riesz 问题、Fourier 变换的限制性质以及波动方程的解的局部光滑性质紧密相关. 一个公开的问题是：当 $p=n$ 时, 是否存在正常数 $\alpha_p=\alpha_n$, 使得 $\mathcal{K}_N$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界常数关于 N 的增长阶为 $(\log N)^{\alpha_p}$. 由插值方法可知该问题分别与以下两个问题等价：

(i) 当 $p\geqslant n$ 时, $\|\mathcal{K}_Nf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_n(\log N)^{\alpha_p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) 当 $1<p\leqslant n$ 时, $\|\mathcal{K}_Nf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_nN^{n/p-1}(\log N)^{\alpha_p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

历史上有很多数学家在这个问题上做出过贡献. 1977 年, A. Córdoba 完整解决了该问题当 $n=2$ 时的情形. 1986 年, M. Christ, J. Duoandikoetxea 和 J. L. Rubio de Francia 对任意维数 n 及 $1<p\leqslant\dfrac{n+1}{2}$ 证明了(ii). 1991 年, J. Bourgain 对任意维数 n 及 $1<p\leqslant\dfrac{n+1}{2}+\epsilon_n$ 证明了 (ii), 其中 ϵ_n 可归纳得到. 1995 年, T. Wolff 将 p 的范围推广为 $1<p\leqslant\dfrac{n+2}{2}$. 1999 年, J. Bourgain 证明了存在常数 $c>\dfrac{1}{2}$, 使得对充分大的 n 及 $p\leqslant cn$, (ii) 成立. 2002 年, N. H. Katz 和 T. Tao 证明了当 $1<p\leqslant\dfrac{4(n-1)}{7}+1$ 时 (ii) 成立, 从而改进了 $n\geqslant 9$ 时的已有结果.

目前已知有两种方法来研究 Kakeya 问题. 第一种为几何方法, 这个方法强烈地依赖于组合理论和关联几何. 最为典型的是 A. Córdoba 利用此方法解决了 $n=2$ 时的 Kakeya 问题. 但是这个方法对高维情形不再有效. 另一种方法是算术方法, 它由 M. Christ, J. L. Rubio de Francia 和 J. Duoandikoetxea 发展起来, 且与 X 射线估计问题有密切联系. 这个方法对高维情形的 Kakeya 问题很有效, 但很难被扩展到其他问题的研究中去. 此外, W. Beckner, A. Carbery, S. Semmes 和 F. Soria 证明了限制性猜测的解决能导致 Kakeya 问题的解决. 目前看起来现有的方法仍然不足以解决 Kakeya 问题.

参 考 文 献

[1] Besicovitch A S. On Kakeya's problem and a similar one. Math Z, 1928, 27: 312-320
[2] Davies R O. Some remarks on the Kakeya problem. Proc Cambridge Philos Soc, 1971, 69: 417-421
[3] Córdoba A. The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers. Amer J Math, 1977, 99: 1-22
[4] Christ M, Duoandikoetxea J, Rubio de Francia J L. Maximal operators related to the Radon transform and the Calderón-Zygmund method of rotations. Duke Math J, 1986, 53: 189-209
[5] Beckner W, Carbery A, Semmes S, Soria F. A note on restriction of the Fourier transform to spheres. Bull London Math Soc, 1989, 21: 394-398
[6] Bourgain J. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. Geom Funct Anal, 1991, 1: 147-187
[7] Wolff T. An improved bound for Kakeya type maximal functions. Rev Mat Iberoamericana, 1995, 11: 651-674
[8] Bourgain J. On the dimension of Kakeya sets and related maximal inequalities. Geom Funct Anal, 1999, 9: 256-282
[9] Katz N H, Tao T. Bounds on arithmetic projections, and applications to the Kakeya conjecture. Math Res Lett, 1999, 6: 625-630
[10] Katz N H, Tao T. New bounds for Kakeya problems. J Anal Math, 2002, 87: 231-263

撰稿人：杨大春
北京师范大学

Koebe 问题

Koebe Problem

如果复球面 (扩充复平面) 上区域的每一个边界分支或者是圆周, 或者是一个点, 我们称之为圆域. 注意平面区域可以有不可数个边界分支.

Koebe 在 1908 年提出了以下猜测:

Koebe 猜测 平面上的任一区域共形等价于一个圆域.

当区域是单连通时, 这就是经典的 Riemann 映照定理. 当区域只有有限多个边界分支时, P. Koebe[1,2] 证明了以上猜测, 并且证明相关的圆域在相差一个 Mobius 变换的意义下是唯一的. 当区域的边界满足某些极限性质时, K. L. Strebel[3] 等证明了一些特殊情况. 对于区域有可数个边界分支时, Z. X. He 和 O. Schramm[4] 证明了这个猜测, 并且证明相关的圆域在相差一个 Mobius 变换下是唯一的. 他们的方法是结合不动点的指标和数学归纳法等.

当区域的边界有不可数个分支时, Koebe 猜测还没有得到完全解决, 而且可以构造实例说明相应的圆域不是唯一的. 比如, 考虑复平面上有正面积的一个 Cantor 集合的补集, 则利用拟共形映射理论可以证明此区域所对应的圆域不唯一.

参 考 文 献

[1] Koebe P. Uber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, III. Nachr Ges Wiss Gott, 1908: 337-358

[2] Koebe P. Abhandlungen zur theorie der konformen Abbildung: VI. Abbildung mehrfach zusammenh\″ angender Bereiche auf Kreisbereiche, etc, Math Z, 1920, 7: 235-301

[3] Strebel K L. Uber das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung. Ann Acad Sci Fenn, 1951, 1: 1-22

[4] He Z & Schramm O. Fixed points, Koebe uniformization and circle packings. Ann Math, 1993, 137: 369-406

撰稿人: 贺正需

中国科学院数学与系统科学研究院

庞加莱 (Poincaré) 圆盘上调和映射的舍恩 (Schoen) 猜想

The Schoen's Conjecture on Harmonic Maps of The Poincaré Disc



庞加莱

众所周知, 紧曲面上关于 Poincaré 度量的调和映射与紧 Riemann 曲面的 Teichmuller 空间理论之间有着深刻的联系, 如亏格为 $g>1$ 的紧 Riemann 曲面之间的任何一个同胚的同伦类中均存在唯一的一个调和的拟共形映射; 通过调和映射的 Hopf 微分可以构造 Riemann 曲面 S_0 的 Teichmuller 空间 $T(S_0)$ 与 S_0 上的全纯二次微分空间 $Q(S_0)$ 之间的一个微分同胚. 因此, 紧 Riemann 曲面的 Teichmuller 空间的一些性质可以不用拟共形映射而用调和映射来建立.

为了将紧 Riemann 曲面的这些结果推广到一般的开 Riemann 曲面, Schoen[1], Wan[2,3], Li 和 Tam[4,5], 以及 Tam 和 Wan[6] 等考察了 Poincaré 圆盘 Δ 上的调和映射. Wan[2] 证明了对 Δ 上的任一全纯二次微分 φ, 都存在关于 Poincaré 度量的调和映射 $f_\varphi:\Delta\to\Delta$ 以 φ 为其 Hopf 微分, 并证明了调和映射 $f:\Delta\to\Delta$ 是拟共形的充分必要条件是它的 Hopf 微分 φ_f 具有有限的 Bers 范数, 即

$$\|\varphi_f\|_B=\sup_{z\in\Delta}|\varphi_f(z)\rho^{-2}(z)|<+\infty,$$

其中$\rho(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$ 是 Δ 上的 Poincaré 密度. 由此构造出 Bers 空间 $B(\Delta)$, 即 Δ 上的具有有限 Bers 范数的全纯二次微分的全体, 到万有 Teichmuller 空间 $T(\Delta)$ 的一个映射：

$$\psi:\ B(\Delta)\to T(\Delta),$$
$$\varphi\mapsto f_\varphi|_{\partial\Delta},$$

其中 f_φ 是以 φ 为 Hopf 微分的 Poincaré 圆盘 Δ 到自身并保持 ±1 和 i 不动的拟共形调和映射. 这里万有 Teichmuller 空间 $T(\Delta)$ 可以定义为单位圆周 $\partial\Delta$ 的所有规范的拟对称自同胚组成的空间. 所谓单位圆周 $\partial\Delta$ 的拟对称自同胚就是指可以拟共形扩张到 Δ 内的自同胚, 所谓规范的就是指它保持 ±1 和 i 不动.

文献 [2] 证明了映射 ψ 关于 $B(\Delta)$ 上的 Bers 范数和 $T(\Delta)$ 上的 Teichmuller 度量是连续的, 文献 [6] 进一步证明了 ψ 是解析的, 而且 $B(\Delta)$ 在 ψ 下的像是 $T(\Delta)$ 中的开集.

一个基本的问题是 ψ 是否是双射? Schoen 猜想[1]: ψ 是双射.

关于 ψ 是否为满射, 有时更多地以拟共形调和映射的 Dirichlet 问题而为人所知, 即是否每个单位圆周到自身的拟对称同胚都能拟共性调和扩张到单位圆内? 许多人对此进行了研究, 如 Akutagawa[7], Li[8], Markovic[9] 等.

参 考 文 献

[1] Schoen R. A role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems//collection: Complex Geometry (Osaka, 1990). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Dekker, 1993, 143: 212-228

[2] Wan Y H. Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and universal Teichmuller space. Stanford Thesis, 1991

[3] Wan Y H. Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and universal Teichmuller space. J Diff Geom, 1992, 35: 643-657

[4] Li P, Tam L F. Uniqueness and regularity of proper harmonic maps I. Ann Math, 1992, 136: 169-203

[5] Li P, Tam L F. Uniqueness and regularity of proper harmonic maps II. Indiana U Math J, 1993, 42: 593-635

[6] Tam L F, Wan Y H. Quasiconformal harmonic diffeomorphism and the universal Teichmuller space. J Diff Geom, 1995, 42: 368-410

[7] Akutagawa K. Harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane. Trans Amer Math Soc, 1994, 342: 325-342

[8] Li Z. On the boundary value problem for harmonic maps of the Poincare disc. Chinese Science Bull, 1997, 42: 2025-2045

[9] Markovic V. Harmonic diffeomorphisms of noncompact surfaces and Teichmuller spaces. J London Math Soc, 2002, 65: 103-124

撰稿人: [1] 漆 毅 [2] 李 忠

1 北京航空航天大学

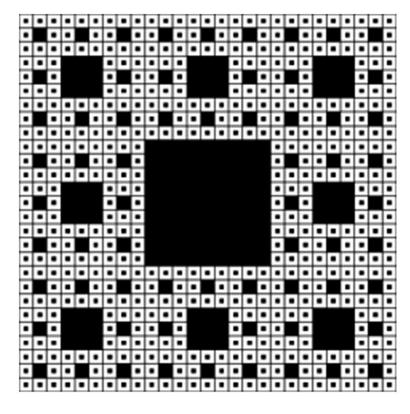
2 北京大学

Sierpiński 地毯上狄氏型的构造

Construction of The Dirichlet Form on Sierpiński Carpet

"分形" (fractal) 一词是由 Benoit Mandelbrot 于 1975 年提出的, 来源于拉丁文 "fractus", 意味 "破碎" 或 "破损", 但分形的数学思想可以追溯到 17 世纪 Leibniz 提出的 "回归自相似" 概念. Sierpiński 篮 和 Sierpiński 地毯 是两个典型分形, 由波兰数学家 Waclaw Sierpiński 分别于 1915 年和 1916 年构造出来, 但性质截然不同, 前者属于 " 有限分枝", 即不同的小块相交为有限集合, 而后者属于 "无限分枝", 即不同的小块相交为无限集合.

20 世纪 80 年代, 物理学家和数学家开始研究分形区域上的 Brown 运动. M. Barlow 和 E. Perkins[1] 在 1988 年利用随机过程理论, 构造性地证明了 Sierpiński 篮 上 Brown 运动的存在性, 并得到转移密度（或热核）的上下界估计. 随后, Barlow 和 Bass 合作[2], 构造了平面上 Sierpiński 地毯上的 Brown 运动, 也得到热核优美的 Gauss 估计；七年以后[3], 他们将此结果推广到高维空间中的 Sierpiński 海绵 (sponge). 以上工作, 都借助于复杂的随机过程理论, 见 Barlow 的综述文章[4]. 一个自然的问题：是否可以用简单的分析方法得到类似结果, 并推广到其他分形区域?



Sierpiński 地毯

M. Fukushima 和 T. Shima[5] 首先进行这方面的研究, 构造了 Sierpiński 篮上的局部狄氏型, 该局部狄氏型正好对应 Barlow 和 Perkins[1] 中的 Brown 运动, 进而他们研究 Laplace 算子的谱维数. 随后, J. Kigami[6,7] 对更一般的一类分形区域, 即后临界有限自相似集 (post-critically finite (简称为 p.c.f.) self-similar set), 用分析的方法, 系统地研究了局部狄氏型存在性. R. Strichartz[8] 等人着重研究 Sierpiński 篮上函数的 "梯度". 以上 p.c.f. 分形属于有限分枝分形. 但对 Sierpiński 地毯等无限分枝分形, 上述分析方法却无能为力.

自然而然, 有下面一些非常有趣的公开问题：

(1) 如何用纯分析的方法构造 Sierpiński 地毯等分形上的局部狄氏型?

(2) 如何刻画局部狄氏型的定义域 (Sobolev 空间), 特别地, 如何求出对应的游动维数 (或函数的最大光滑指数)?

(3) 如何得到对应热核的 Gauss 估计?

参 考 文 献

[1] Barlow M T, Perkins E A. Brownian motion on the Sierpínski gasket. Probab Theory Related Fields (PTRF), 1988, 79: 543-623

[2] Barlow M T, Bass R F. Transition densities for Brownian motion on the the Sierpínski carpet. PTRF, 1992, 91: 307-330

[3] Barlow M T, Bass R F. Brownian motion and harmonic analysis on Sierpínski carpets. Canad J Math, 1999, 51(4): 673-744

[4] Barlow M T. Diffusions on Fractals. Berlin: Springer-Verlag, 1998, 1-121

[5] Fukushima M, Shima T. On a spectral analysis for the Sierpínski gasket. Potential Analysis, 1992, 1: 1-35

[6] Kigami J. Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets. Trans Amer Math Soc, 1993, 335: 721-755

[7] Kigami J. Analysis on Fractals. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

[8] Strichartz R S. Differential equations on fractals : a tutorial. Princeton: Princeton University Press, 2006

撰稿人：胡家信

清华大学

Sierpiński 双曲分支的有界性问题

The Boundedness of Hyperbolic Components of
Sierpiński Rational maps

平面上的一个紧集称为是 Sierpiński 曲线, 如果它是连通且局部连通的、无处稠密的, 并且它的余集分支是互不相交的 Jordan 区域. 任何两个 Sierpiński 曲线都是同胚的, 因此它是一个万有的拓扑对象. 把一个正方形分为相等的九个小正方形, 挖掉中心的正方形的内部, 对于剩下的八个正方形重复这样的过程, 继续下去, 最后得到的就是 Sierpiński 曲线.

在很长一段时间里, 复动力系统领域的专家相信存在以 Sierpiński 曲线为 Julia 集的有理函数, 1992 年, Minor 和 Tan Lei[1] 证明有理函数 $f(z)=a(z+z^{-1})+b$ 的 Julia 集是 Sierpiński 曲线, 其中 $a=-0.138115091\cdots, b=-0.303108805\cdots$. 这里的 $f(z)$ 是双曲的, 即 f 在其 Julia 集上的作用是扩张的. 称 Julia 集是 Sierpiński 曲线的双曲有理函数为 Sierpiński 有理函数.

Sullivan, Thurston[2,3] 和 McMullen[4] 等建立了 Klein 群与复动力系统研究的对应关系. 我们知道一个 Klein 流形 M 是 acylindral 当且仅当它的极限集是 Sierpiński 曲线, 并且如果 M 是 acylindral, 那么 $AH(\pi_1(M))$ 是紧的. 对应在复动力系统中有下面的问题.

记 $\mathrm{Rat_d}$ 为度 $d>1$ 的有理函数组成的空间. 在 $\mathrm{Rat_d}$ 中定义一个等价关系 $\sim$: $\forall f,g\in \mathrm{Rat_d}$,

$$f\sim g \Leftrightarrow \text{ 存在 Möbius 映射 } \gamma \text{ 使得 } \gamma\circ f\circ\gamma^{-1}=g.$$

令 $\mathcal{M}(d)=\mathrm{Rat_d}/\sim$. 对于双曲有理函数 f, 定义它的双曲分支

$$\mathcal{H}(f)=\{[g]\in\mathcal{M}_d \mid g \text{ 和 } f \text{ 在 Julia 集上拟共形共轭}\}.$$

McMullen 在文献 [4] 中提出了下面的问题:

问题 如果 $f\in \mathrm{Rat_d}$ 是 Sierpiński 有理函数, 那么 $\overline{H(f)}\subset\mathcal{M}_d$ 是紧集吗?

McMullen 在文献 [4] 中提到 tree 可能是解决这个问题的一个的途径. 目前还不知道一个 Sierpiński 有理函数的例子, 使得它的双曲分支的闭包是紧的.

参 考 文 献

[1] Milnor J, Tan L. Remarks on quadratic rational maps, appendix F: a Sierpiński carpet as Julia set. SUNY Stony Brook, 1992,14

[2] Thurston W P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bulletin of the American Mathematical Society, 1982, 6: 357-381

[3] Thurston W P. Hyperbolic structures on 3-manifolds I: deformations of acylindrical manifolds. Annals of Mathematics, 1986, 124: 203-246

[4] McMullen C T. The classification of conformal dynamical systems. Current Developments in Mathematics, Cambridge MA, 1995

撰稿人：崔贵珍
中国科学院数学与系统科学研究院

斯梅尔 (Smale) 均值猜想

Smale's Mean Value Conjecture



斯梅尔

Fields 奖得主 Steve Smale 于 1981 年在《美国数学会通报》上发表了一篇关于复杂性理论的文章："代数和复杂性理论的基本定理"[1]. 在文中提出了一个关于临界点与临界值均值估计的猜想.

具体地, 任意给定一个阶 d 的复多项式 $P(z)$, 其临界点 θ_j 定义为集合：

$$S = \{\theta_j : P'(\theta_j) = 0\}.$$

这样的临界点至多有 $d-1$ 个. 临界值定义为 $P(\theta_j), j=1,2,\cdots,d-1$.

Smale 均值猜想

$$\min_{1\leqslant j\leqslant d-1}\left|\frac{P(\theta_j)-P(z)}{\theta_j - z}\right| \leqslant K\left|P'(z)\right|, \quad z\neq\theta_j, \quad K=1, \text{ 或 } K=\frac{d-1}{d}.$$

在国际数学联盟 (IMU) 于 2000 年出版的展望 21 世纪数学发展的著作:《数学：前沿与展望》[2] 中, Smale 发表了他的著名综述文章："新世纪的数学问题", 其中再次提出关注和研究此均值问题.

此问题与 Newton 方法、计算复杂性问题、数值分析、实代数几何、积分几何、经济均衡理论均有密切联系, 因而引起人们的广泛兴趣. 此问题描述简单易懂, 但其实十分困难. 先后有许多学者不断研究, 并取得一系列成果. Smale 本人得到的上界估计为4, 近年来所有一般性的结果均只能证明均值上界小于4, 但以不同的速度都渐近趋于4. 因此离此猜想的完全解决, 还有很大的距离.

参 考 文 献

[1] Smale S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. Bull Amer Math Soc, 1981, 4: 1-36

[2] Smale S. Mathematical Problems for the Next Century // Arnold V, Atiyah M, Lax P and Mazur B. eds. Mathematics: Frontiers and Perspectives. Amer Math Soc, 2000: 271-294

[3] Shub M, Smale S. Computational complexity. On the geometry of polynomials and a theory of cost I. Anna Sci École Norm Supér, 1985, 18: 107-142

[4] Shub M, Smale S. Computational complexity. On the geometry of polynomials and a theory of cost II. SIAM J Comput, 1986, 15(1): 145-161

撰稿人：王跃飞

中国科学院数学与系统科学研究院

双 曲 猜 想

Hyperbolic Conjecture

记 $\mathrm{Rat_d}$ 为度 $d > 1$ 的 Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的有理函数组成的空间. 有理函数 $f \in \mathrm{Rat_d}$ 的 Fatou 集 $F(f)$ 是指 f 的迭代序列 $\{f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ 的正规点集合, 其余集 $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} - F(f)$ 称为 Julia 集. 有理函数 f 称为是 J 稳定的, 如果其扰动与 f 在 Julia 集上拓扑共轭.

1983 年, Mañé, Sad 和 Sullivan[1] 证明 J 稳定的有理函数全体在 $\mathrm{Rat_d}$ 中形成一个稠密的开子集, 并且此时在 Julia 集上的拓扑共轭一定是拟共形的. 复动力系统的中心问题是刻画 J 稳定的有理函数.

有理函数 f 称为双曲的, 如果 $J(f)$ 上存在度量使得 f 是扩张的. 一个等价的定义是 $J(f)$ 与临界点的正向轨道的闭包不相交. 我们知道双曲有理函数是 J 稳定的. Fatou[2] 提出如下猜想:

猜想 1(双曲猜想) 双曲有理函数在 $\mathrm{Rat_d}$ 中是稠密的.

双曲猜想是复动力系统的中心猜想, 其关键是 Julia 集的刚性, 也就是说 Julia 集上是否存在拟共形形变. McMullen 和 Sullivan[3] 提出猜想 2.

猜想 2(无不变线域猜想) 除了 Lattès 映射以外, 有理函数的 Julia 集上没有不变线域.

Julia 集上的一个不变线域是指其上不变的模为 1 的 Beltrami 微分. 由猜想 2 可以推出猜想 1.

复动力系统最简单的研究对象是二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$. 记

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c) \text{ 是连通的}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(0)\}_{n \geqslant 1} \text{ 是有界的}\}. \end{aligned}$$

M 称为 Mandelbrot 集. Douady 和 Hubbard 证明 Mandelbrot 集是连通的并猜测:

猜想 3(MLC) Mandelbrot 集是局部连通的.

他们证明对二次多项式, 猜想 3 可以推出猜想 1 和猜想 2. 对于非无穷可重整化的二次多项式 f_c, Yoccoz[4] 证明 M 在 c 点是局部连通的. 对于无穷可重整化的实二次多项式, McMullen[5] 证明其 Julia 集上没有不变线域. 目前对双曲猜想的研究主要集中在无穷可重整化的二次多项式的性质以及抛物重整化[6] 的方法.

和双曲猜想有关的一个问题是 Julia 集的面积. Fatou 曾经猜想多项式的 Julia 集具有零面积, 显然此猜想可以推出猜想 2. 最近 Buff 和 Cheritat 证明存在二次多项式其 Julia 集具有正面积, 从而否定了 Fatou 的面积猜想[8].

对实多项式的双曲猜想, Kozlovski, 沈维孝和 van Strien[7] 证明是正确的.

参 考 文 献

[1] Mañé R, Sad P, Sullivan D. On the dynamics of rational maps. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1983, 16: 193-217

[2] Fatou P. Sur les équations fonctionnelles. Bulletin de la Société mathématique de France, 1920, 48: 33-94

[3] McMullen C T, Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. Advances in Mathematics, 1998, 135: 351-395

[4] Yoccoz J -C. On the local connectivity of the Mandelbrot sets. Unpublished, 1990

[5] McMullen C T. Complex Dynamics and Renormalizations. Princeton: Princeton University Press, 1994

[6] Inou H, Shishikura M. The renormalization for parabolic fixed points and their pertubation, 2006

[7] Kozlovski O, Shen W X, van Strien S. Rigidity for real polynomials. Annals of Mathematics, 2007, 165(3): 749-841

[8] Buff X, Chéritat A. Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive. (French) [Quadratic Julia sets with positive Lebesgue measure] C R Math Acad Sci Paris, 2005, 341(11): 669-674

撰稿人：王跃飞 崔贵珍

中国科学院数学与系统科学研究院

双线性希尔伯特 (Hilbert) 变换的 L^p 有界性

L^p Estimates for The Bilinear Hilbert Transform

20 世纪 60 年代, A. P. Calderón[1] 研究 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子的有界性和相关的交换子理论时, 引入了如下双线性 Hilbert 变换：

$$H_\alpha(f,g)(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|\geqslant\epsilon} f(x-t)g(x+\alpha t)\frac{dt}{t},\quad x,\alpha\in\mathbb{R}.$$

A. P. Calderón发现一阶交换子 (分布核为 $\dfrac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}$, $A'(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$) 的 L^2 有界性能够由算子 H_α 的有界性得到. 于是, A. P. Calderón 猜测：(1) 算子 H_1 是关于 α 从 $L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$ 有界的; (2) 当 $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$ 时, 算子 H_α 是从 $L^2(\mathbb{R})\times L^\infty(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 一致有界的. 注意到当 $\alpha\in\{0,1\}$ 时, $H_0(f,g)=Hf\cdot g$ 及 $H_{-1}(f,g)=H(f\cdot g)$, 其中 H 是 Hilbert 变换. 因而, (2) 的关键是如何证明算子 H_α 对于 $-1<\alpha<0$ 是一致有界的.

Calderón 猜想提出以后很长时间没有任何进展. 其复杂性在于算子 H_α 的双线性象征 $-\mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}(\xi-\alpha\eta)$ 在相平面沿线 $\xi=\alpha\eta$ 处间断, 因而传统的分析工具如 Calderón-Zygmund 和 Littlewood-Paley 理论失效. 1996 年, M. Lacey 和 C. Thiele[4,5] 发展一套新的相平面分析方法, 利用时频分解、树的组合选择及精细的正交估计等技巧证明了如下结果：

定理(Lacey-Thiele) 若 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, $1<p_1,p_2\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ 且 $p>\dfrac{2}{3}$, 则

$$\|H_\alpha(f,g)\|_p\leqslant C_{\alpha,p_1,p_2}\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2},$$

其中常数 C_{α,p_1,p_2} 依赖于 α,p_1,p_2.

Lacey-Thiele 定理回答了 Calderón 的第一个猜想, 同时也证明了当 $-1<\alpha<0$ 时, 算子 H_α 是有界的. 由于这项工作, 他们获得了 1996 年度 Salem 奖. 之后不久, L. Grafakos 和 X. Li[3] 证明了算子 H_α (关于 α) 的一致有界性, 证实了 Calderón 的第二个猜想的正确性, 从而也得到了 Calderón 一阶交换子的 L^2 有界性一个新的证明.

问题 1 能否将 Lacey-Thiele 定理中的限制性条件 $p>\dfrac{2}{3}$ 去掉, 即研究算子 H_α 在 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{2}{3}$ 的 L^p 有界性, 这仍是一个公开问题.

问题 2 研究双线性 Hilbert 变换的一个推广即三线性 Hilbert 变换 $\Lambda_\alpha(f,g,h)$ 的 L^p 有界性, 其中

$$\Lambda_\alpha(f,g,h)(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|\geqslant\epsilon} f(x-t)g(x+t)h(x-\alpha t)\frac{dt}{t},\quad x,\alpha\in\mathbb{R}.$$

有关问题 2, 可参见文献 [8].

目前, 这一课题仍然是一个十分活跃的研究领域. 2000 年, M. Lacey 和 C. Thiele[6] 利用他们的定理的证明方法, 给出了 Carleson 极大函数

$$\mathcal{C}f(x)=\sup_N\Big|\int_{-\infty}^N \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi x}d\xi\Big|$$

弱 $(2,2)$ 型的一个简化证明. 这个估计是著名的 Carleson 定理关于 L^2 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛性证明的核心[2]. 同时, 许多人包括 C. Muscalu, J. Pipher, T. Tao 和 C. Thiele 等研究了具有奇性乘子的双线性或多线性算子的有界性, 并成功地解决调和分析和非线性偏微分方程的一些问题[7,9].

参 考 文 献

[1] Calderón A. Commutators of singular integral operators. Proc Natl Acad Sci USA, 1965, 53: 1092-1099
[2] Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math, 1966,116: 135-157, 321-351
[3] Grafakos L, Li X. Uniform bounds for the bilinear Hilbert transforms. I. Ann of Math, 2004, 159: 889-933
[4] Lacey M, Thiele C. L^p estimates on the bilinear Hilbert transform for $2<p<\infty$. Ann of Math, 1997, 146: 693-724
[5] Lacey M, Thiele C. On Calderón conjecture. Ann of Math, 1999, 149: 475-496
[6] Lacey M, Thiele C. A proof of boundedness of the Carleson operator. Math Res Lett, 2000, 7：361-370
[7] Muscalu C, Pipher J, Tao T, Thiele C. Bi-parameter paraproducts. Acta Math, 2004, 193: 269-296
[8] Muscalu C, Tao T, Thiele C. A Carleson type theorem for a Cantor group model of the scattering transform. Preprint
[9] Muscalu C, Tao T, Thiele C. Multi-linear operators given by singular multipliers. J Amer Math Soc, 2002, 15: 469-496

撰稿人：颜立新
中山大学

亚纯函数的亏量问题

The Deficiency Problem of Meromorphic Functions

设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的亚纯函数, 则值分布理论主要关注方程 $f(z)=a(a\in\overline{\mathbb{C}})$ 的根在平面内的分布情况.

记 $\log^+ x=\max(\log x,0)(x\geqslant 0)$. 对 $\mathbb{C}$ 中亚纯函数 $f(z)$, 记 $n(r,f)$ 为 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的极点个数. Nevanlinna 曾引进了

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log r$$

和

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

我们知道, 当 $f(z)$ 为非常数整函数时, $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 的最大模 $M(r)$ 是 r 的严格递增函数. 经过简单的分析, 我们可以证明 $T(r,f)$ 也是 r 的严格递增函数. 当 f 是整函数时, $T(r,f)$ 与 $\log M(r,f)$ 具有很多类似的性质. 因此我们可以定义 $f(z)$ 的下级 μ 与级 λ:

$$\mu=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},\quad \lambda=\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

以下定义的亏值是值分布理论中最重要的概念之一:

$$\delta(a,f)=\lim\inf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\lim\sup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)},$$

$a\in\overline{\mathbb{C}}$, 当 $a=\infty$ 时, $m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=m(r,f)$. 当 $\delta(a,f)>0$ 时, a 称为 $f(z)$ 的一个亏值. Nevanlinna 证明了

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a,f)\leqslant 2 \text{ 对一切超越亚纯函数均成立.}$$

Nevanlinna 曾经猜测当上述等号成立时, $f(z)$ 必具有特别的性质, 如 $f(z)$ 的级必

是 $\dfrac{n}{2}$, 其中 n 为一正整数. 这个猜测被 Drasin 所证实. 现在值分布理论中遗留的最重要问题是以下的问题.

问题(亏量问题)　设 $\mathcal{F}_\mu$ 是下级为 $\mu(<+\infty)$ 的全体亚纯函数. 试确定

$$\Omega(\mu)=\sup_{f\in\mathcal{F}_\mu}\left\{\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a,f)\right\}.$$

由于 n 是正整数时, $f(z)=\mathrm{e}^{z^n}$ 是级和下级都为 n 的整函数, 且 $\delta(0)=\delta(\infty)=1$. 对这种情形, 亏量问题是平凡的. 换句话说, 亏量问题主要是考虑 μ 是非整数的情形.

该问题有以下重要进展：当 $\mu<1$ 时, A. Edrei 于 1962 年证明了

$$\Omega(\mu)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\mu\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2mm] 2-\sin\mu\pi, & \dfrac{1}{2}<\mu\leqslant 1.\end{cases}$$

而当 $\mu>1$ 时, 亏量问题的研究几乎没有什么进展.

参 考 文 献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究. 北京: 科学出版社, 1982

[2] Edrei A, Fuchs W. The deficiencies of meromorphic functions of order less than one. Duke Math J, 1960, 27: 233-249

[3] Drasin D, Weitsman A. Meromorphic functions with large sums of deficiencies. Advance in Math, 1974, 15: 93-126

撰稿人：伍胜健
北京大学

亚纯函数与其导函数有公共的波雷尔 (Borel) 方向吗?

Do A Meromorphic Function and Its Derivates Share A Common Borel Direction?

一些理论和实际问题的研究往往归结为函数的零点分布. 这时人们考虑的对象往往是整函数 (全平面上的解析函数) 与亚纯函数. 整函数是多项式的推广, 而亚纯函数是有理函数的推广. 一方面它们将许多常见的函数类都包含在内, 另一方面它们保持了许多优良的品质. 设 $f(z)$ 为一整函数或亚纯函数, a 为一个任意复数, 研究方程 $f(z)=a$ 是否有根以及根的多少与如何分布, 形成了一个专门的数学分支 —— 函数值分布论. 自 19 世纪以来, 这个领域吸引了许多著名学者的兴趣并积累了丰硕的成果.

1879 年, 法国数学家 E. Picard 借助于模函数证明了定理：若 $f(z)$ 为一整函数, 且不蜕化为常数, 则对于任意复数 a, 方程 $f(z)=a$ 都有根, 至多除去 a 的一个例外值.

Picard 定理是数学历史上一个十分重要的结果, 它是值分布理论的开端.

代数基本定理告诉我们, 复数域多项式的零点个数由其次数确定. 那么, 如果考虑整函数或亚纯函数, 有没有一个量可以起到象多项式次数那样的作用来度量零点个数呢? 1896 年, Borel 正式引入整函数的级的概念, 把 Picard 定理大大推进了一步. 他证明了定理：若 $f(z)$ 为一整函数, 其级 ρ 是有穷正数, 则对于任意复数 a 有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,f=a)}{\log r}=\rho,$$

至多除去 a 的一个例外值. 这里 $n(r,f=a)$ 表示圆盘 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)=a$ 的根的个数 (记重数).

若对整函数 $f(z)$, 上述提到的例外值 a 存在, 则把 a 叫做 $f(z)$ 的 Borel 例外值. Borel 引入的级可以度量整函数取值的情况! 这种级在整函数值分布的研究中起了巨大的作用. Borel 定理的证明基于函数的增长性, 是纯分析的, 对以后值分布论的发展有很大影响. 20 世纪初, 有很多学者从事值分布论的研究, 其中应特别提到 E. L. Lindelöf, L. O. Blumenthal, A. Denjoy, A. Wiman, G. Varilon, J. E. Littlewood 等.

1919 年, G. Julia 应用 P. Montel 的正规定则证明了定理: 若 $f(z)$ 为超越整函数, 则至少存在一条从原点发出的射线 $J: \arg z = \theta_0$ $(0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$, 使得对于任意正数 ε 与所有复数 a, 在角域 $|\arg z - \theta_0| < \varepsilon$ 内 $f(z) = a$ 都有根, 至多可能除去 a 的一个例外值. 这样的射线称为的 Julia 方向. Julia 定理开创了在一射线附近函数取值情况的研究, 这类研究形成了专门的理论, 称为辐角分布论; 而在整个平面上函数取值的研究, 则称为模分布论.

1925 年, 芬兰数学家 R. Nevanlinna 把亚纯函数作为主要研究对象, 建立了两个基本定理. 他的研究使值分布论呈现了崭新的面貌, 开始了值分布的近代理论 (也常常称为 Nevanlinna 理论). 这是对 20 世纪数学发展的一个重大贡献. 对于一个亚纯函数 $f(z)$, Nevanlinna 引进了特征函数 $T(r,f)$. $T(r,f)$ 刻划了 $f(z)$ 的增长性, 例如 $f(z)$ 的级 ρ 可定义为

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

当 f 是整函数时, Nevanlinna 证明了这个级与 Borel 定义的级相吻合. 更重要的是, Nevanlinna 建立了两个基本定理, 成为函数值分布近代理论的基石. Nevanlinna 借此得到了著名的亏量关系.

应用 Nevanlinna 理论, G. Valiron 于 1928 年将 Julia 方向作了重大发展, 证明了 ρ 级 Borel 方向的存在性: 若 $f(z)$ 为 ρ $(0 < \rho < \infty)$ 级亚纯函数, 则至少存在一条从原点出发的射线 $J: \arg z = \theta_0$ $(0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$, 使得对于任意正数 ε 与所有复数 a(包括 ∞) 有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)}{\log r} = \rho,$$

至多除去关于 a 的两个例外, 其中 $n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)$ 表示扇形 $\{z;|z|\leqslant r\}\cap\{z;\ |\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon\}$ 上 $f(z)=a$ 的根的个数.

这一阶段有很多杰出的学者从事值分布论的研究. 除了 Nevanlinna 兄弟、Valiron, Milloux 等人外, 还有 Ahlfors, Bloch, Cartan 等. 在整函数和亚纯函数的值分布论中, 有一个很重要的方向就是将函数取值与其导数的取值联系起来. Valiron 曾经在 1928 年提出了一个重要而困难的问题:

Valiron 问题 是否亚纯函数与其导函数有公共的 Borel 方向?

这个问题是值分布论中最受人们关注的问题之一, 但是至今还没有完全解决. 在 A. Rauch, 庄圻泰等获得了一些附加了条件的结论后, H. Milloux 获得了重大进展, 对整函数从正面回答了 Valiron 的问题: 设 $f(z)$ 是一个具有正级 ρ 的整函数, 则 $f'(z)$ 的 ρ 级 Borel 方向是 f 的 ρ 级 Borel 方向.

Milloux 本人的证明相当复杂, 篇幅长达 80 多页. 到 20 世纪 70 年代, 杨乐和张广厚大大简化了原来的证明. Milloux 的这一工作问世后, 人们的目光自然集中

到了亚纯函数, 但是 Valiron 问题始终没有完全解决. 在这一问题的研究上, 庄圻泰在假设 $f(z)$ 具有两个 Borel 例外值的条件下, 证明了 f 及其导数有公共 Borel 方向. 杨乐、张广厚、张庆德等人在假设 $f(z)$ 具有一个 Borel 例外值的条件下, 证明了 f 及其导数有公共 Borel 方向, 这似乎是迄今为止最重要的进展.

参 考 文 献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究. 北京: 科学出版社, 1982
[2] Nevanlinna R. Analytic Functions. Berlin: Springer-Verlag, 1970
[3] Valiron G. Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes. Acta Math, 1928, 52: 67-92

撰稿人：张广远
清华大学

游荡连续统存在性问题

The Existence of Wandering Continua

有理函数 f 的 Fatou 集 $F(f)$ 是指 f 的迭代序列 $\{f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ 的正规点集合, 其余集 $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} - F(f)$ 称为 Julia 集. 我们提出下面这个问题.

问题 是否存在非退化的连续统 $K \subset J(f)$, 使得对于所有 $n > m \geqslant 0$, $f^n(K) \cap f^m(K) = \varnothing$.

上述问题中的 K 称为游荡连续统.

在很多情况下, 我们知道没有游荡连续统. 当 f 是多项式, $J(f)$ 连通且局部连通时, 则没有游荡连续统[1]. 当 $J(f)$ 不连通时, 对周期的连通分支, McMullen[2] 证明其可以拟共形共轭于一个多项式的连通 Julia 集. 对游荡分支, 上述问题等价于著名的 Branner-Hubbard 猜想[3], 这个猜想最近已被解决[4].

当 f 是几何有限的有理函数时, 如果 $J(f)$ 不连通, 则其 Julia 集的游荡分支是单点或 Jordan 曲线[5]. 基于这些观察, 我们猜测:

猜想 设 f 是几何有限的有理函数且 $J(f)$ 连通, 如果 f 不是 flexible Lattès 映射, 则 $J(f)$ 上没有充满的游荡连续统.

一个连续统称为是充满的, 如果其余集是连通的. 如果 f 是 flexible Lattès 映射, 那么可以在 $J(f)$ 上找到游荡的连续统. 这是目前知道的唯一反例.

参 考 文 献

[1] Blokh A, Levin G. An inequality for laminations, Julia sets and “growing trees”. Erg Th Dyn Sys, 2002, 22(1): 63-97

[2] McMullen C. Automorphism of rational map// Holomorphic Functions and Moduli. Berlin: Springer-Verlag, 1998: 31-60

[3] Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials, Part II. Acta Mathematica, 1992, 169: 229-325

[4] Qiu W Y, Yin Y C. A proof of the Branner-Hubbard conjecture on Cantor Julia sets. Arxiv: math.DS/0608045

[5] Pilgrim K, TAN Lei. Rational maps with disconnected Julia set. Astérique, 2000, 261: 349-384

撰稿人：崔贵珍

中国科学院数学与系统科学研究院

阿诺德 (Arnold) 猜想

Arnold Conjecture

Arnold 猜想是辛几何与辛拓扑的前沿焦点问题之一. 这个问题涉及微分几何、微分拓扑与代数拓扑、微分方程与动力系统以及非线性分析和临界点理论等众多数学分支领域, 是近二十年来辛几何与辛拓扑领域发展的重要动力之一. 这个猜想是 Poincaré-Birkhoff 定理的推广.

一个 $2n$ 维流形 M 称为辛流形, 如果其上具有一个处处非退化闭的 2 形式 ω. 它的 n 维子流形 L 称为 Lagrange 子流形, 如果 $\omega|_L = 0$. 设 $H : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数, 它定义了一个向量场 X_H 满足 $\omega(\cdot, X_H) = dH$, 这个向量场称之为 Hamilton 向量场. 把 Hamilton 系统 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x) = X(\varphi(t,x))$ 满足条件 $\varphi(0,x) = x$ 的解确定的微分同胚 $\varphi(1,\cdot) : M \to M$ 称为 Hamilton 微分同胚, 简记 $\varphi = \varphi(1,\cdot)$. Hamilton 微分同胚有退化和非退化两种情况.

Arnold 关于 Hamilton 微分同胚 φ 的不动点个数的猜想 (猜想 A):

对于一个紧 (无边) 辛流形 M, φ 的不动点个数不小于 M 上的光滑函数的临界点个数的下确界[1].

这个命题对于 φ 很靠近恒等映射时已被证明. 大家知道, 对于 M 上的 Morse 函数 (每个临界点皆非退化), 其临界点的个数不小于 M 的 Betti 数之和 (依赖于系数群). 一般情况下, 任何一个 M 上的光滑函数, 其临界点的个数不小于 M 的畴数, 后者不小于 M 的上同调群的 cup 积长. 这些量都是 M 的拓扑不变量.

把非退化 Hamilton 微分同胚 φ 的不动点个数用 M 的 Morse 函数临界点的下确界 (弱化为用 M 的 Betti 数之和) 估计的命题称为上述 Arnold 猜想的非退化情况. 把退化 Hamilton 微分同胚 φ 的不动点个数用 M 的光滑函数临界点的下确界 (弱化为用 M 的畴数或上同调群的 cup 积长) 估计的命题称为上述 Arnold 猜想的退化情况.

Eliashberg 在 1978 年对 $n = 1$ 证明了这个猜想, 但是他未发表他的工作. 对于标准环面 T^{2n} 而言, 猜想 A 的退化与非退化情况于 1983 年被 C. Conley 和 E. Zehnder 证明[2], 这个工作是用变分方法于 Arnold 猜想研究的第一个突破. 接下来的突破当属 Floer 于 20 世纪 80 年代末的一系列工作[3,4], 他的这个时期的工作, 除了在某种条件下证明了上述猜想和后面的猜想 B 外, 其方法对于后来的一系列工

作起着很重要的作用. 接下来, Hofer 等的一系列的工作[7], 为研究这个猜想作出了重要贡献. 20 世纪 90 年代末, 非退化情况 φ 的不动点的个数不小于关于实数域的 Betti 数之和的命题分别被 Fukaya-Ono[6]、刘刚、田刚[8]、阮勇斌[9] 等证明. 在这些证明中 Gromov 的 J 全纯曲线理论和 Floer 同调理论等起到了关键作用. 其实, Floer 当年就是为了研究这个猜想而发展了 Floer 同调理论[3,4]. 对于退化情况, 无论是用 M 的畴数还是 M 的上同调类的 cup 积长做 φ 的不动点的个数的下界估计, 没有完全被证明, 一些部分结果可见文献 [2]、[10].

Arnold 关于 Lagrange 子流形相交数的猜想 (猜想 B):

对于辛流形 M 的紧 Lagrange 子流形 L, 它与另一个紧 Lagrange 子流形 $\varphi(L)$ 的交点个数不小于 L 上的光滑函数的临界点个数的下确界[1].

这个命题对于 φ 很靠近恒等映射时已被证明. 猜想 A 可从猜想 B 推出. 猜想 B 也有非退化 (L 与 $\varphi(L)$ 横截相交) 与退化两种情况. 和猜想 A 一样, 对于非退化情况可弱化为用 L 的 Betti 数之和来做相交数的下界估计. 退化情况可弱化为用 L 的畴数或上同调群的 cup 积长来做相交数的下界估计. 但是, 值得注意的是, 这个命题一般情况下还需要加一个条件, 否则有反例, 例如 2 维环面上的经圆, 可用一个 Hamilton 微分同胚推开而与之不相交. 找到合适的附加条件或者针对一些特例, 证明这个命题, 也是相当有意义的工作[5,7].

参 考 文 献

[1] Arnold V I. Sur une proprétés des application globalement canoniques de la méchanique classique. COMPTES Rendus de l'Académic des Sciences. Paris, 1965, 261: 3719-3722

[2] Conley C, Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. Invent Math, 1983, 73: 33-49

[3] Floer A. The unregularized gradient flow of the symplectic action. Comm Pure and Appl Math, 1988, 41: 775-813

[4] Floer A. Symplectic fixed point and holomorphic spheres. Comm Pure and Appl Math, 1989, 120: 575-611

[5] Floer A. Cuplength estimates on Lagrangian intersections. Comm Pure Appl Math, 1989, 42: 335-356

[6] Fukaya K, Ono K. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants. Topology, 1999, 38(5): 933-1048

[7] Hofer H. Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections. Ann Inst H Poincaré Anal Nonlinéaire, 1988, 5(5): 465-499

[8] Liu G, Tian T. Floer homology and Arnold conjecture. J Diff Geom, 1998, 49(1): 1-74

[9] Ruan Y. Virtual neighborhood and pseudo-holomorphic curves. Proceedings of 6th Gokova Geometry-Topology conference, Turkish J Math, 1999, 23(1): 161-231

[10] Schwarz M. A quantum cup-length estimate for symplectic fixed points. Invent Math, 1998, 133: 353-397

撰稿人：刘春根
南开大学

Dry Ten Martini 问题

The Dry Ten Martini Problem

Schrödinger 算子在量子力学, 晶体学等方面有重要的背景[1]. Schrödinger 算子的谱问题有很长的研究历史. Simon[7] 在 21 世纪初曾撰文总结了 20 世纪这个问题的研究成果并为 21 世纪提出一些公开问题. 我们介绍其中的一个.

考虑定义在 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的准周期 Schrödinger 算子 $H = H_{\lambda v,\alpha,\theta}$:

$$(Hu)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda v(\theta + n\alpha)u_n,$$

这里 $v(\theta)$ 是周期函数, $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \theta \in \mathbb{R}$. 通常 $v(\theta)$ 称为位势, α 称为频率, θ 称为相位. λ 称为耦合参数. 当 $v(\theta) = \cos\theta$ 时, 称 $H_{\lambda\cos,\alpha,\theta}$ 为 Mathieu 算子. 准周期 Schrödinger 算子是一族特殊的有界自共轭算子, 我们要研究这类算子谱的信息 (如谱集是否为 Cantor 集? 谱集的 Lebesgue 测度? 是否有绝对连续谱、奇异连续谱、点谱?). 我们知道 $H_{\lambda v,\alpha,\theta}$ 的谱集与 θ 无关, 正则点是开集且其每一个连通开子区间 (称为谱隙) 和一个形如 $\frac{1}{2}k\alpha$ 的旋转数唯一对应(本结果称为 Gap Labelling 定理[6]). 下面关于 Mathieu 算子的谱问题被 Kac 和 Simon[7] 称为 Ten Martini 问题和 Dry Ten Martini 问题.

Ten Martini 问题 Mathieu算子 $H_{\lambda\cos,\alpha,\theta}$ 的谱集是否为Cantor集?

这个问题近期被 Avila-Jitomirskaya 解决[3].

Dry Ten Martini 问题 Mathieu算子$H_{\lambda\cos,\alpha,\theta}$ 的所有谱隙是否都是打开的? 即是否对所有的 k, 存在谱隙使得其对应的旋转数为 $\frac{1}{2}k\alpha$?

这个问题目前只有部分结果[3,4]. Mathieu 算子只是极其特殊的 Schrödinger 算子. 进一步的问题还有: 是否对通有的 $v(\theta)$, $H = H_{v,\alpha,\theta}$ 的谱集是 Cantor 集? 是否对通有的 $v(\theta)$, $H = H_{v,\alpha,\theta}$ 的谱隙都是打开的? 其中第一个问题等价于一致双曲系统在下面特殊的单参数族动力系统中的稠密性.

准周期 Schrödinger 算子 $H = H_{\lambda v,\alpha,\theta}$ 对应一个 $\mathbb{T}^1 \times SL(2,\mathbb{R})$ 上的线性斜积映射:

$$\begin{aligned}(\alpha, A):\quad & \mathbb{T}^1 \times SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{T}^1 \times SL(2,\mathbb{R}) \\ & (\theta, x) \mapsto (\theta + \alpha, A(\theta)x),\end{aligned}$$

其中

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} E - v(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们把 $H_{\lambda v,\alpha,\theta}$ 的谱问题归入动力系统是因为它的谱性质和其对应的斜积映射 (α, A) 的动力学性质有着极其密切的关系 (如正则点和一致双曲性、点谱和非一致双曲性、绝对连续谱和可约性等), 因此谱理论问题可以被转化为动力系统问题. 动力系统的许多理论和方法, 如光滑遍历论、KAM 理论、重整化方法、Green 函数方法等对研究这个问题起重要作用. 另外, 这个问题还和频率的数论性质密切相关.

参 考 文 献

[1] Aubry S, Andre G. Analyticity breaking and Andeson localization in imcommensurate lattices. Ann Israel Phys Sci, 1980, 3: 133-164

[2] Avila A, Krikorian R. Reducibility or non-uniform hyperbolicity in quasi-periodic Schödinger cocycles. Annals of Mathematics, 2006, 164: 911-940

[3] Avila A, Jitomirskaya S. The ten Martini problem. to appear in Annals of Mathematics

[4] Avila A, Jitomirskaya S. Almost localization and almost reducibility. to appear in J European Math Soc

[5] Bourgain J, Jitomirskaya S. Absolutely continuous spectrum for quasi-periodic Schrödinger operators. Invent Math, 2002, 148: 453-463

[6] Johnson R, Moser J. The rotation number for almost potentials. Commun Math Phys, 1982, 84: 403-438

[7] Simon B. Schödinger operators in the tweenty-first century. Mathematical Physics. 2000: London: Emp Coll Press, 283-288

撰稿人：尤建功

南京大学

菲尔斯滕贝格 (Fürstenberg) 猜想

Fürstenberg's Conjecture

复平面单位圆周 $\mathbb{T}$ 上最简单的连续映射之一是 $\times_n : z \in \mathbb{T} \to z^n \in \mathbb{T}$, 这里 n 是自然数. 对单个映射 $\times_n$ 而言, $\mathbb{T}$ 中存在大量 $\times_n$- 不变的闭子集, 同时 $\mathbb{T}$ 上也存在大量 $\times_n$- 不变 Borel 概率测度. 现在如果考虑两个映射 $\times_n$, $\times_m$, 情况就非常不同了. 为了让 $\times_n$, $\times_m$ 本质上是两个不同非恒同映射, 我们自然地要假设 $n, m \geqslant 2$ 且 n, m 为乘积独立, 即 $\dfrac{\log n}{\log m}$ 为无理数. 在这种情况下, 1967 年, Fürstenberg[1] 证明了 $\mathbb{T}$ 中只有特殊少数闭子集同时在映射 $\times_n$, $\times_m$ 下不变.

Fürstenberg 定理 设 $n, m \geqslant 2$ 为两个乘积独立的自然数. 假设 X 是 $\mathbb{T}$ 的非空闭子集且在映射 $\times_n$, $\times_m$ 下不变 (即 $\times_n(X) \subseteq X$, $\times_m(X) \subseteq X$), 则要么 $X = \mathbb{T}$, 要么 X 为有限集. 且当 X 为有限集时, X 的每个元素均为单位根.

同年, Fürstenberg 猜想对 $\mathbb{T}$ 上在映射 $\times_n$, $\times_m$ 下不变 Borel 概率测度也有类似的测度刚性的结论. 为此对自然数 k, 我们称 $\mathbb{T}$ 上 Borel 概率测度 μ 为 $\times_k$ 不变, 如果对 $\mathbb{T}$ 的任意一个 Borel 子集 A 均有 $\mu(\times_k^{-1} A) = \mu(A)$. 对自然数 k, l, 我们称 μ 在 $\times_k$,$\times_l$ 生成的半群作用下遍历, 如果 μ 同时为 $\times_k$, $\times_l$ 不变, 且对 $\mathbb{T}$ 的任意一个满足 $\times_k^{-1} A = A$ 和 $\times_l^{-1} A = A$ 的 Borel 子集 A 均有 $\mu(A) = 1$ 或 $\mu(A) = 0$.

Fürstenberg 猜想 设 $n, m \geqslant 2$ 为两个乘积独立的自然数. 如果 μ 是 $\mathbb{T}$ 上一个 Borel 概率测度且在 $\times_n, \times_m$ 生成的半群作用下遍历, 则 μ 要么为 $\mathbb{T}$ 上的 Lebesgue 测度, 要么为等分布在有限个点上的原子测度.

Fürstenberg 猜想是遍历理论中的最著名的问题之一. 该猜想的第一个本质进展是 Lyons[2] 在 1988 年获得的, 他证明了在 Fürstenberg 猜想原有的条件下, 如果还要求 μ 相对于 $\times_n$ 具有 Kolmogorov 属性 (即保测系统 $(\mathbb{T}, \mu, \times_n)$ 没有非平凡的零熵因子), 则 μ 为 $\mathbb{T}$ 上的 Lebesgue 测度. 随后, 1990 年 Rudolph[3] 证明了：

Rudolph 定理 设 $n, m \geqslant 2$ 为两个互素的自然数, μ 是 $\mathbb{T}$ 上一个 Borel 概率测度且在 $\times_n, \times_m$ 生成的半群作用下遍历. 如果 μ 相对于 $\times_n$ 有正熵, 则 μ 为 $\mathbb{T}$ 上的 Lebesgue 测度.

1992 年, Johnson[4] 将 Rudolph 定理推广到 n, m 乘积独立的情形. 随后 Feldman[5], Host[6] 和 Lindenstrauss, Meiri, Peres[7] 也分别给出 Roudolph 定理不同的证明, 特别是 Host 的证明巧妙的使用了调和分析中的想法和技巧. 这些在 Fürstenberg 猜想研究中所产生的方法和思想目前已经成功地应用到微分几何和数论等领域的

一些问题的研究中, 例如, Lindenstrauss[8,9] 将它用到微分几何量子唯一遍历性问题的研究中; Lindenstrauss, Einsieder 和 Katok[9,10] 将它用到数论 Littlewood 猜测的研究中. 尽管 Fürstenberg 猜想研究对正熵的情形已经完全解决, 但对于零熵的情形目前还没有任何进展, 它的完全解决将是一件任重道远的事情.

参 考 文 献

[1] Fürstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. Math Sys Theory, 1967, 1: 1-49

[2] Lyons R. On measures simultaneously 2- and 3-invariant. Israel J Math, 1988, 61: 219-224

[3] Rudolph D J. $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy. Ergodic Theory Dynam Systems, 1990, 10: 395-406

[4] Johnson A. Measures on the circle invariant under multiplication by a nonlacunary subsemigroup of the integers. Israel J Math, 1992, 77: 211-240

[5] Feldman J. A generalization of a result of R. Lyons about measures on [0, 1). Israel J Math, 1993, 81: 281-287

[6] Host B. Nombres normaux, entropie, translations. Israel J Math, 1995, 91: 419-428

[7] Lindenstrauss E, Meiri D and Peres Y. Entropy of convolutions on the circle. Ann of Math, 1999, 149(2): 871-904

[8] Lindenstrauss E. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. Ann of Math, 2006, 163(2): 165-219

[9] Einsieder M, Lindenstrauss E. Diagonal flows on locally homogeneous spaces and number theory. International Congress of Mathematicians, Vol. II. Eur Math Soc, Zürich, 2006: 1731-1759

[10] Einsieder M, Katok A and Lindenstrauss E. Invariant measures and the set of exceptions to Littlewoods conjecture. Annals of Math, 2006, 164: 513-560

撰稿人: 黄 文 叶向东

中国科学技术大学

埃农 (Hénon) 映射族中奇异吸引子的存在性问题

Existence of Strange Attractors in Hénon Family

Hénon 映射族中奇异吸引子的存在性问题是非双曲动力系统研究中的一个焦点问题. 现代动力系统的研究始于 20 世纪 Smale 等人关于双曲动力系统的理论工作, 而关于非双曲动力系统的研究则主要是围绕几类著名的系统展开的, 而通过这些特例的研究也带动了一般的非双曲系统的研究.

目前受到人们普遍重视并得到充分研究的几类含有奇异吸引子的系统包括 Logistic 映射族、Hénon 映射族以及 Lorenz 方程等. 关于 Logistic 映射族人们已经有了充分的理解, Lorenz 方程也证明了奇异吸引子的存在性, 但是有关 Henon 映射族在原始参数附近奇异吸引子的存在性问题的进展却很少.

问题 Henon 映射族 $\mathrm{H}_{a,b}(x,y)=(1-ax^2+by,x)$ 在参数 $a=1.4,b=0.3$ 附近是否存在奇异吸引子?

1991 年, Benedicks 和 Carleson 利用一维扰动的方法探讨了在 a 接近 2, b 接近 0 时 Hénon 映射族的动力行为, 他们证明了对于正测度的参数集合, Hénon 映射都具有奇异吸引子. Benedicks, Carleson 等人的工作使非双曲系统的研究得到了迅速而富有成果的发展, 许多数学家进一步探讨了同宿相切、各类分支问题等复杂的动力现象, 他们的工作推动了整个动力系统的研究, 而相关的研究也在其他学科以及数学的其他分支中得到了广泛的应用.

就 Hénon 映射族本身来讲, 目前人们只是关于非常特殊的参数获得了一些成果, 至今尚不知道在初始参数附近存在奇异吸引子还是周期非常大的周期轨道. 如果能够证明 Hénon 映射族在初始参数附近存在奇异吸引子, 那么就解决了目前的一维系统的扰动方法所无法处理的情形, 这必然是引进了新的方法或思想的结果, 因此, 该问题的解决必将带动整个非双曲系统研究的进一步发展, 使人们能够更好地理解复杂系统的动力性态, 同时这些新的方法与技巧也会在一般的动力系统的研究中发挥强有力的作用.

参 考 文 献

[1] Benedicks M, Carleson L. The dynamics of the Henon map. Annals of Math, 1991, 133: 73-169

[2] Benedicks M, Young L S. Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Henon maps. Invent Math, 1993, 112: 541-576

[3] Hénon M. A two dimensional mapping with a strange attractor. Comm Math Phys, 1976, 50: 69-77

[4] Luzzatto S, Viana M. Parameter exclusions in Henon-like systems. Russian Math Surveys, 2003, 58: 1053-1092

撰稿人：王兰宇

中国科学院数学与系统科学研究院

希尔伯特 (Hilbert) 第 16 问题
Hilbert's 16th Problem

Hilbert 第 16 问题的后半部分是寻求全体 n 次平面多项式微分系统极限环的最大个数 $H(n)$, 以及这些极限环可能出现的各种相对位置. 这是德国数学家 Hilbert 在一百多年前所提的 23 个著名数学难题之一, 也是其中少数尚未解决的问题之一.

极限环是平面动力系统的孤立闭轨. 当时间 (正向或负向) 趋于无穷时, 它是临近轨道的极限集. 从数学上看, 当研究一个平面系统的轨道拓扑结构时, 最核心和最困难的问题就是掌握它的极限环的个数及其分布; 从应用上看, 在物理、力学、工程、生物、医学, 乃至社会科学等领域的大量数学模型中, 极限环代表着某种稳定的周期态, 它的存在与否、存在时的个数与分布都是至关重要的.

然而对此问题的研究却波折迭出. 1923 年, 法国人 Dulac 证明, 一个给定的平面多项式系统的极限环个数是有限的. 但是在 20 世纪 80 年代, 人们发现他的证明中有一个严重漏洞. 俄罗斯的 Ilyashenko 和法国的 Ecalle 等人经过坚苦努力独立给出长篇修补证明, 受到了广泛关注. 1955 年, 前苏联的 Petrovskii 和 Landis"证明"$H(2) = 3$. 但其证明长期受到一些西方学者的质疑, 直到 1979 年我国的史松龄和陈兰荪、王明淑分别举出至少存在 4 个极限环的二次系统的反例, 这个问题才尘埃落定, 并重新引发了人们对平面二次系统的研究热情.

值得指出的是, 上述有限性结果只是对每一个给定的 n 次多项式系统而言. 而 $H(n)$ 的有限性, 是指全体 n 次多项式系统极限环个数的一致有限性. 尽管人们猜测 $H(2) = 4$, 但 $H(2)$ 是否有限的问题都没有结果, 这也是国际上一批数学家至今还在研究的一个课题, 而对 $n > 2$ 的情形下 $H(n)$ 是否有限的研究尚无头绪.

对 Hilbert 第 16 问题的研究如此艰难, 缘于缺乏有效的数学工具对极限环的个数给出精确刻画. 俄罗斯数学家 Arnold 从 20 世纪 70 年代以来多次提出所谓弱化的 Hilbert 第 16 问题：寻求全体 n 次多项式 1 形式沿所有可能的 $n+1$ 次闭代数曲线族的 Abel 积分零点个数的上确界 $Z(n)$. 粗略地说, 当把多项式系统限制在接近 Hamilton 系统的范围内时, $H(n)$ 就可以用 $Z(n)$ 代替. 对这个限制形式, 可以应用一些实分析, 复分析和代数拓扑的工具. $Z(n)$ 的有限性已在 1984 年得到了证明. 另外, 经过很多人十余年的努力, 对 $Z(2)$ 的研究也于 2002 年取得突破. 如果把"接近 Hamilton 系统"扩展为"接近可积系统", 或考虑 $n > 2$ 的情形, 弱化的问题依然十分困难.

近几十年来, 国际上对 Hilbert 第 16 问题的研究相当活跃, 文章大量涌现, 这其中也包括我国数学工作者的多方面贡献. 我们在参考文献里列出了 Ilyashenko 和李继彬的两篇综述文章, 以及叶彦谦等和张芷芬、丁同仁等的两本专著.

困难与挑战召唤并激励着有为青年, 也促进着数学的发展与创新. 我们有理由相信, 这个世纪难题的解决之日, 将是数学理论走上一个更高阶梯之时.

参 考 文 献

[1] Hilbert D. Mathematical problems. Bull Amer Math Soc, 1902, 8: 437-479

[2] Yu S Ilyashenko. Centennial history of Hilbert's 16th problem. Bull Amer Math Soc (N.S.), 2002, 39: 301-354

[3] Li J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar vector fields. Inter J Bifur and Chaos, 2003, 13: 47-106

[4] 叶彦谦等. 极限环论. 上海：上海科学技术出版社, 1965

[5] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜. 微分方程定性理论. 北京：科学出版社, 1985

撰稿人：李承治
北京大学

Palis 猜测

Palis' Conjecture

微分动力系统是 20 世纪 60 年代以来, 以结构稳定性研究为缘起发展起来的一个数学学科. 该学科一方面有微分方程定性论和拓扑动力系统的深厚背景, 一方面有物理、力学、工程技术, 乃至生物学、金融等多方面的实际应用, 很受各界的关注. 像 "浑沌"、"奇异吸引子" 这样一些引人入胜的概念, 就是这个学科中的一些 "关键词". 这一学科早期的著名人物有 S. Smale, D. Anosov, J. Moser, Ya. Sinai 等, 后来渐渐群英荟萃, 竟不胜枚举.

微分动力系统几十年来的发展线索, 从结构稳定性角度来看, 大体是从结构稳定系统到结构不稳定系统, 或者说从双曲系统到 "双曲之外"("beyond hyperbolicity"). 早些年这方面的一个中心问题是所谓稳定性猜测, 是以双曲性为要素的关于结构稳定系统的特征刻划. 这一问题经过几十年的努力, 特别是廖山涛和 Mane 等人的系统贡献, 已基本解决. 目前微分动力系统的主要发展趋势是试图 "走出双曲之外". Palis 猜测就是这方面一个有重大影响的问题. 该猜测粗略地是说：大多数微分同胚, 或者相当稳定, 或者极不稳定. 其准确陈述如下：

Palis 猜测：任一微分同胚或者能被双曲系统 C^r 逼近, 或者能被具有同宿切或异维环现象的系统 C^r 逼近.

这里, 所谓双曲系统是指非游荡集为双曲集的系统. 这种系统概括了结构稳定系统的精髓, 具有相当程度的结构稳定性. 与此相对照, 所谓同宿切是指一个双曲周期点的稳定和不稳定流形不横截相交的现象, 而异维环是指两个不同指标的双曲周期点的稳定和不稳定流形连接成环的现象. 就精神实质而言, 这两种现象是一百年前庞加莱 (Poincaré) 就注意到的极不稳定的现象. 庞加莱发现其动力形态极端复杂、瞬息万变. 这个猜测如果成立, 就说明在 "双曲之外" 的世界, 处处会碰到这两种经典的极不稳定的现象. 有人曾问 Palis 他为什么做这样的猜测, 他简单地回答："我相信庞加莱的洞察力".

对于 2- 维情形, 在 C^1 拓扑下, 这一猜测在 2000 年被 E. Pujals 和 M. Sambarino 合作解决. 由于异维环现象在 2- 维不可能出现, 他们所证明的, 也即 Palis 对 2- 维情形所特别猜测的, 实际上是曲面上任一微分同胚或者能被双曲系统 C^1 逼近, 或者能被具有同宿切现象的系统 C^1 逼近. 这是一个重大的进展.

目前, 对于这一猜测的高维情形的研究在 C^1 拓扑下出现了一些重要的进展, 引起了整个学科的注意. 其结果和方法有许多本质的创新, 牵动了许多的方面. 近些年出现的关于部分双曲 (partially hyperbolic) 系统的理论、由连接引理引发刷新了的通有 (generic) 理论和一些经典的筛滤理论、Conley 理论等, 也不约而同为此准备了条件. 该猜测高维情形的研究目前颇为看好.

如上所述, 到目前为止, 关于这一猜测所取得的进展都是对 C^1 拓扑而言的, 也即 $r = 1$ 的情形. 这与微分动力系统的若干基本扰动技术如封闭引理和连接引理都是对C^1拓扑而言的现状有关. 在这个意义上, 微分动力系统更广阔、更精彩的故事还在前方.

参 考 文 献

[1] Bonatti C, Lorenz L, Viana M. Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Berlin: Springer-Verlag, 2005

[2] Palis J. A global perspective for non-conservative dynamics. Ann Inst H Poincare, Anal Non Lineaire, 2005, 22(4): 485-507

[3] Pujals E, Sambarino M. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. Ann of Math, 2000, 151: 961-1023

[4] Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 747-817

撰稿人: 文 兰

北京大学

罗林 (Rohlin) 问题

Rohlin's Problem

Rohlin 猜测是遍历理论中前沿焦点问题之一. 遍历理论是动力系统的一个重要分支, 它与概率论、调和分析、泛函分析、组合数论、拓扑动力系统等其他数学分支有着密切的联系. 称 $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为一个保测系统, 指 $(X,\mathcal{X},\mu)$ 为概率空间, $T:X\to X$ 为可测的, 且 $\mu(T^{-1}A)=\mu(A),\forall A\in\mathcal{X}$. 对于一个保测系统 $(X,\mathcal{X},\mu,T)$, 如果对 $A\in\mathcal{X}$, $T^{-1}A=A$, 那么就有 $\mu(A)=1$ 或 0, 此时称系统为遍历的. 遍历系统是遍历理论的主要研究对象. 如果一个遍历系统和自己的乘积系统仍为遍历的, 那么此时系统称为弱混合的. 可以证明保测系统 $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为弱混合的当且仅当对于任何可测子集 A,B 都有

$$\lim_{J\ni n\to\infty}\mu(A\cap T^{-n}B)=\mu(A)\mu(B),$$

其中 J 为密度为 1 的序列. 如果对于任何可测子集 A,B 都有

$$\mu(A\cap T^{-n}B)\to\mu(A)\mu(B),\quad n\to\infty,$$

那么称系统为 2 混合的, 或直接称为混合的. 遍历性、弱混合和强混合性都是动力系统谱的性质.

Rohlin 问题是一个与混合相关的问题. 系统称为 3 混合的是指, 对于任何可测子集 A,B,C, 都有 $\mu(A\cap T^{-n}B\cap T^{-(n+m)}C)$, 当 n,m 趋向于无穷时, 它趋向于 $\mu(A)\mu(B)\mu(C)$. 类似可以定义 n 混合性. Rohlin 的问题是：

是否 2 混合性蕴涵了任意的 n 混合性?

Rohlin 问题是遍历理论中的一个核心问题[4], 自它提出来以后许多优秀的数学工作者为之奋斗, 但是迄今尚未彻底解决这个问题.

这个问题对于一般的群作用是不正确的, Ledrappier[3] 指出在 $\mathbb{Z}^2$ 的作用下, 存在 2 混合但是不是 3 混合的例子. Rohlin 问题的相对化问题也是不正确的, 最近 Rue[5] 指出了此点. 但是也有许多例子支持了这个问题的正面回答：Host[1] 证明了在奇异谱的时候, 2 混合蕴涵了任意混合; Kalikow[2] 和 Ryzhikov[6] 分别对阶为一和阶有限的系统证明了 2 混合蕴涵了任意混合.

Rohlin 问题的解决对于深入理解保测系统的内在结构有着重要的意义. 它是遍历论中一个十分重要的问题, 围绕着这个问题, 这个领域的数学工作者已经创立

了许多新的技巧和方法, 这些都已经极大丰富了遍历理论的本身. 但是彻底解决 Rohlin 问题仍是一件十分艰难的工作.

参 考 文 献

[1] Bernard Host. Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum. Israel J Math, 1991, 76(3): 289-298

[2] Steven Arthur Kalikow. Twofold mixing implies threefold mixing for rank one transformations. Ergodic Theory Dynam Systems, 1984, 4(2): 237-259

[3] François Ledrappier. Un champ markovien peut être d'entropie nulle et mélangeant. (French) C R Acad Sci Paris Sér A-B, 1978, 287(7): A561-A563

[4] Rohlin V A. On endomorphisms of compact commutative groups. (Russian) Izvestiya Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1949, 13: 329-340

[5] Thierry de la Rue. An extension which is relatively twofold mixing but not threefold mixing. Colloquium Mathematicum, 2004, 101: 271-277

[6] Ryzhikov V V. Joinings and multiple mixing of the actions of finite rank. (Russian) Funktsional Anal i Prilozhen, 1993, 27(2): 63–78, 96; translation in Funct Anal Appl, 1993, 27(2): 128-140

撰稿人：邵 松 叶向东
中国科学技术大学

Veech 猜测

Veech's Conjecture

Veech 猜测是拓扑动力系统中一个长期未解决的重要问题. 众所周知, 拓扑动力系统是动力系统理论的一个重要研究分支. 它与遍历理论、调和分析、组合数论、Ramsey 理论等众多数学分支有着密切的关系. 运用拓扑动力系统的方法可以解决许多其他分支中的问题, 例如, Wolf 奖得主 Furstenberg 运用拓扑动力系统的方法重新证明了 van der Waerden 定理, 并且得到一系列的推广, 其中很多结果至今没有组合证明[1,3].

很久以前, 拓扑动力系统专家们就认识到许多组合数论以及调和分析中的问题与动力系统中的回复属性密切联系在一起. Veech 猜测就是其中一个古老的问题. 这个问题虽然很早就有, 但是最早是由 Veech[4] 明确提出的：

如果 S 是一个相对稠密的整数集合, 那么 $S-S$ 是否为 0 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中的 Bohr 邻域?

其中一个序列具有相对稠密性是指它有一个有限的间距 (即如果 $S=\{a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots\}$, 那么 S 为相对稠密或者称为 syndetic 是指存在 $M>0$ 使得 $a_n-a_{n-1}<M$, $\forall n\geqslant 2$), 而 $S-S=\{m-n: m,n$ 属于 $S\}$. 一个群的 Bohr 紧化是指它的一个万有群紧化, 对于 $\mathbb{Z}$ 的 Bohr 紧化就是在离散拓扑下一维环面 $\mathbb{T}^1$ 的对偶群. 在文献 [4] 中, Veech 在刻画交换群下极小系统的等度连续结构关系时, 证明了在忽略一个零密度集合的情况下, 对相对稠密集合 S, $S-S$ 为 0 在 $\mathbb{Z}$ 中的 Bohr 邻域. 但是对于一般的情况直到现在还没有进展.

现在已经知道这个问题与许多其他重要的问题密切相关, 其中比较著名的是 Katznelson 的问题. 一个集合 A 称为拓扑回复的是指, 对于任何拓扑动力系统 (X,d,T) (其中 X 为紧致度量空间, d 为其度量, $T: X\to X$ 为连续映射) 以及任何 $a>0$, 存在点 $x\in X$ 和 A 中数 n 使得 $d(T^nx,x)<a$. 如果在上面定义中将 "任何动力系统" 改为 "任何有限维环面的旋转", 那么集合 A 称为 Bohr 回复集. 明显地, 根据定义任何拓扑回复集必为 Bohr 回复集. Katznelson 的问题是：

是否任何 Bohr 回复集必为拓扑回复集[2,3]？

可以证明, 一个集合 A 为拓扑回复的当且仅当对任意相对稠密集合 S, $A\cap(S-S)\neq\varnothing$. 根据这个结果可以看出：如果 Veech 猜测成立, 那么 Katznelson 的问题

的答案也是肯定的. 我们还可以举出许多类似的例子说明 Veech 问题的重要性. 这个问题的解决将不仅对理解动力系统的回复属性有着重要帮助, 而且也将对组合数论、调和分析等其他领域有着重要的意义. 但是从目前的发展来看, 这个问题的完全解决似乎还是一件遥远而困难的事情.

参 考 文 献

[1] Furstenberg H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton, N J: Princeton University Press, 1981

[2] Katznelson Y. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence. Paul Erdös and his mathematics (Budapest, 1999). Combinatorica, 2001, 21(2): 211-219

[3] Benjamin Weiss. Single orbit dynamics. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 95. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000

[4] William A Veech. The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups. Amer J Math, 1968, 90: 723-732

撰稿人：邵　松　　叶向东
中国科学技术大学

魏因施泰因 (Weinstein) 猜想

Weinstein Conjecture

Weinstein 猜想是关于 Hamilton 系统在给定能量面上周期解存在性的一个猜想, 由 A. Weinstein 在 1979 年提出[1]. 问题的背景如下: 考虑 Hamilton 系统

$$-\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \tag{1}$$

很容易发现, 对上述 Hamilton 系统的一个解 $(x(t), y(t))$ 有 $H(x(t), y(t)) =$ 常数. 方程 (1) 的最简单的解为常数解, 除常数解外, 最简单的解就是周期解了, 因此研究方程 (1) 的周期解存在性具有重要的意义. 对于给定的常数 c, 设 $H(x,y) = c$ 时 $\nabla H \neq 0$, 那么 $\Sigma = \{(x,y) \in R^{2n}, H(x,y) = c\}$ 就是 R^{2n} 中的超曲面, 且 Hamilton 系统 (1) 在 Σ 上周期解存在性不依赖于 Hamilton 函数 H 的选取, 即给定另外 Hamilton 函数 H_1, 若 $\Sigma = \{(x,y) \in R^{2n}, H_1(x,y) = c_1\}$, $\nabla H_1 \neq 0$ $(x,y) \in \Sigma$, 则 Hamilton 系统 (1) 在 Σ 上的解经过适当的参数变换后就是以下 Hamilton 系统

$$-\dot{x} = \frac{\partial H_1(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H_1(x,y)}{\partial x} \tag{2}$$

在 Σ 上的解. Weinstein 猜想要解决的问题是在一定的几何条件下, Hamilton 系统 (1) 在给定能量面 Σ 上周期解的存在性. 因为 Hamilton 系统 (1) 可以推广到一般的辛流形 (M^{2n}, ω) 上, 因此也可以对一般的辛流形 (M^{2n}, ω) 提相应的问题. (M^{2n}, ω) 称为辛流形, 若满足 (i) M^{2n} 是 $2n$ 维微分流形, (ii) ω 是闭 2 形式, 非退化, 即 $d\omega = 0$, $\omega^n \neq 0$. 给定可微函数 $H: M^{2n} \to R$, 可由等式 $-dH(\xi) = \omega(X_H, \xi)$ $\forall \xi$ 定义 M^{2n} 上的一个向量场 X_H, M^{2n} 上的 Hamilton 系统由以下方程

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{3}$$

所定义. 当 $(M, \omega) = (R^{2n}, \omega_0)$, $\omega_0 = \sum_1^n dx_i \wedge dy_i$ 时, (3) 和 (1) 是等价的.

1978 年, A. Weinstein 和 P. H. Rabinowitz 分别证明了当 Σ 是 R^{2n} 中凸或者星形紧致超曲面时, 以 Σ 为能量面的 Hamilton 系统 (1) 在 Σ 上存在周期解.

Hamilton 系统 (1) 是关于辛变换是不变的, 即若 R^{2n} 的微分同胚 $(X, Y) \to (x(X,Y), y(X,Y))$ 满足 $\sum_1^n dX_i \wedge dY_i = \sum_1^n dx_i \wedge dy_i$, 则 Hamilton 系统 (1) 等价于

Hamilton 系统

$$-\dot{X} = \frac{\partial K(X,Y)}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = \frac{\partial K(X,Y)}{\partial X}, \tag{4}$$

其中 $K(X,Y) = H(x(X,Y), y(X,Y))$. 但凸和星形的条件不是关于辛变换不变的. 为此, A. Weinstein 在 1979 年提出了如下猜想:

Weinstein 猜想 [1] 设 $\Sigma \subset (M^{2n}, \omega)$ 为紧致切触超曲面, $H^1(\Sigma, R) = 0$, $H: M^{2n} \to R$ 为光滑函数, $H(x) = c$, $\nabla H \neq 0\ \forall x \in \Sigma$, 那么 Hamilton 系统 (3) 在超曲面 Σ 上存在周期解.

这里超曲面 $\Sigma \subset (M^{2n}, \omega)$ 称为切触超曲面, 若存在定义在 Σ 附近的非零向量场 ξ 使得 (i) ξ 与 Σ 横截, (ii) $L_\xi \omega = \omega$, 其中 $L_\xi \omega$ 为 ω 关于 ξ 的 Lie 导数. 此猜想的另外一种叙述形式如下: (Σ^{2n-1}, α) 称为切触流形, 若满足 (i) Σ^{2n-1} 是 $2n-1$ 维微分流形, (ii) α 是 1 形式满足 $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$. 由等式 $\alpha(X) = 1, d\alpha(X, \xi) = 0$ $\forall \xi$ 可定义一个 Σ^{2n-1} 上的 Reeb 向量场 X.

Weinstein 猜想 紧致切触流形 (Σ^{2n-1}, α) 上 Reeb 向量场 X 存在闭轨.

目前的研究状况：(以下所有结果没有假设条件 $H^1(\Sigma, R) = 0$.)

1. 当 $(M, \omega) = (R^{2n}, \omega_0)$ 时, 此猜想由 C. Viterbo 在 1987 年证明, 随后, H. Hofer-E.Zehnder 给出了一个简单的证明和推广 [2,3]. 将他们的这一结果用于 $H(x,y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$ 情形, 就得到 H. Seifert, S. Bolotin, V. Benci 等人关于二阶 Hamilton 系统的有关结果. A. Floer-H. Hofer-C. Viterbo 在文献 [4] 中将这一结果推广到辛流形 $(M \times R^{2n}, \omega \oplus \omega_0)$, 其中 (M, ω) 为紧致无边辛流形满足 $\pi_2(M) = 0$, $n \geqslant 1$. 刘刚, 田刚[5] 证明了不需要假设 $\pi_2(M) = 0$, 同样结果成立.

2. 当 $(M, \omega) = (T^*N, \omega_N)$ 时, 其中 N 为紧致无边流形, ω_N 是余切从 T^*N 上标准辛形式, H. Hofer-C. Viterbo[10] 证明了当 Σ 所围的有界区域包含零截面时, 猜想成立. 没有这一附加条件, 蒋美跃和卢广存分别证明了 $N = T^n$, $N = S^1 \times N_1$, 其中 N_1 为紧致无边流形, 猜想成立, C. Viterbo 证明了 N 的基本群有限时, 猜想成立[3,6].

3. 当 $(M, \omega) = (CP^n, \Omega_0)$ 时, 其中 CP^n 为 n 维复射影空间, Ω_0 为标准辛形式, H. Hofer, C. Viterbo 证明了此猜想. 刘刚, 田刚[5] 证明了若干个复射影空间的乘积 $(\Pi_1^k CP^{n_i}, \oplus_1^k \lambda_i \Omega_0)$, 猜想成立.

4. H. Hofer[7] 对 3 维紧致切触流形 (M, α), 满足条件 $M = S^3$ 或者 $\pi_2(M) \neq 0$ 或者 α overtwisted, 猜想成立. 最近, C. H. Taubes[8] 宣布对所有 3 维紧致切触流形, 猜想成立.

5. 对于 $(M, \omega) = (T^*N, \omega_N + \Omega)$ 情形, 其中 Ω 为 N 上闭 2 形式, 关于这个猜想近年来有许多结果[9].

6. 对于周期轨道的多重性问题, 特别是凸能量面上周期轨道的多重性问题, H.

Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder 和龙以明、朱朝锋得到了重要的结果[10].

参 考 文 献

[1] Weinstein A. On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems. J Differential Equations, 1979, 33: 353-358

[2] Viterbo C. A proof of the Weinstein conjecture in R^{2n}. Ann Inst H Poincaré, Analyses non linéaire, 1987, 4: 337-356

[3] Hofer H, Zehnder E. Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkhäuser, 1994

[4] Floer A, Hofer H, Viterbo C. The Weinstein conjecture in $P \times C^l$. Math Z, 1989, 203: 355-378

[5] Liu G, Tian G. Weinstein conjecture and GW-invariants. Commun Comtemp Math, 2000, 2: 405-459

[6] Viterbo C. Exact Lagrange submanifolds, periodic orbits and the cohomology of loop spaces. J Differential Geometry, 1979, 47: 420-468

[7] Hofer H. Pseudoholomorphic curves with applications to the Weinstein conjecture in dimension three. Invent Math, 1993, 114: 515-563

[8] Taubes C H. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, I and II. arxiv:Math/0611007, 0702366

[9] Ginzburg V L. The Weinstein conjecture and the theorems near by and almost existence. Progr Math, 2005, 232: 139-172

[10] Long Y, Zhu C. Closed characteristics on compact convex hypersurfaces in R^{2n}. Ann of Math, 2002, 155: 317-368

撰稿人：蒋美跃

北京大学

多重遍历定理

Multiple Ergodic Theorems

遍历理论研究群在概率空间作用的定性性质, 它是研究动力系统的基本工具, 并在数学的许多分支中有应用. 遍历理论的起源与统计物理学的研究有密切的关系, 当时人们猜想系统的时间平均和空间平均是一样的. 如果 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间, $T: X\to X$ 为保测变换, 即 $\mu(A)=\mu(T^{-1}A)$ 对于所有 $A\in\mathcal{B}$ 成立, 那么称 T 为遍历的, 如果对于满足 $T^{-1}A=A$ 的 $A\in\mathcal{B}$ 有 $\mu(A)=0$ 或者 $\mu(A)=1$. 20 世纪 40 年代 Birkhoff[1] 证明了：如果 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间, $T: X\to X$ 为保测变换, 那么对于任意 $f\in L^1(X,\mu)$, 存在 $f^*\in L^1(X,\mu)$ 使得对于几乎所有的 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}fT^i(x)=f^*(x).$$

特别地, 当 T 为遍历时, $f^*=\int f\mathrm{d}\mu$. 也就是说, 当 T 为遍历时, 时间平均和空间平均才是一样的. 上面的 Birkhoff 遍历定理一般称为逐点遍历定理. von Neumann 平均遍历定理[1] 是说, 如果 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $1\leqslant p<\infty$, 那么对于 $f\in L^p(X,\mu)$, 那么存在 $f^*\in L^p(X,\mu)$ 满足 $f^*\circ T=f^*$ 且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}fT^i(x)-f^*(x)\to 0$$

在 L^p 意义下成立.

自然数的一个子集 S 的**上半 Banach 密度**定义为

$$BD^*(S)=\limsup_{|I|\to+\infty}\frac{|S\cap I|}{|I|},$$

其中 I 取遍自然数的所有子区间. 著名的 Szemerédi 定理说明：如果 S 为自然数的具有正上 Banach 密度的子集, 则 S 包含了任意长的算术级数. Furstenberg[2] 利用遍历理论给出了 Szemerédi 定理的一个证明. 在他的证明中, 他首先给出遍历系统的一个结构定理, 然后证明了：如果 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 为概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的相互可交换的保测变换, $A\in\mathcal{B}$ 满足 $\mu(A)>0$, 那么

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mu(T_1^{-n}A\cap T_2^{-n}A\cap\cdots\cap T_k^{-n}A)>0.$$

于是一个自然的问题是：如果 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 为概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的相互可交换的保测变换, 是否对于任意的有界函数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x) f_2(T_2^n x) \cdots f_k(T_k^n x)$$

在逐点或在平均的意义下成立?

关于多重遍历定理, 一个很大的进展是 Host 和 Kra[3] 的工作. 他们证明了：如果 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $k \geqslant 1$ 为整数以及 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为有界函数, 那么

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \cdots f_k(T^{kn} x)$$

在 $L^2(\mu)$ 中收敛. 另外 Ziegler[4] 独立地给出了这个定理的不同的证明. 最近 Tao[5] 证明了当 $T_1, \cdots, T_k$ 为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上可交换的保测变换并且 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为有界函数时

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x) f_2(T_2^n x) \cdots f_k(T_k^n x)$$

在 $L^2(\mu)$ 中收敛, 从而彻底证明了多重遍历定理 (在 $L^2(\mu)$ 意义下). 有意思的是 Tao 的证明采用有限遍历理论 (finitary ergodic theory), 并没有用到遍历理论中的高深知识. 目前人们正在寻找标准遍历理论的证明. H. P. Towsner (arXiv:org:0711.1180) 和 T. Austin (arXiv:0805.0320v2) 进行了尝试.

另外值得一提的是 $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x) f_2(T_2^n x) \cdots f_k(T_k^n x)$ 是否是逐点收敛的是目前遍历理论中的一个重要问题. Bourgain[6,7] 在 $l = 2$ 和 $T_1 = T_2$ 时解决了这个问题. 另外, J. Bourgain[8] 证明了如果 a_n 为多项式或素数则 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f T^{a_i} x$ 是逐点收敛的.

参 考 文 献

[1] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982

[2] Furstenberg H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton: Princeton University Press, 1981

[3] Host B, Kra B. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann of Math, 2006, 161: 397-488

[4] Ziegler T. Universal characteristic factors and Furstenberg averages. Accepted for publication in the Journal of the AMS, 2005

[5] Tao T. Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations. Ergodic Theory Dynam Systems, 2008, 28: 657-688

[6] Bourgain J. On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integer. Israel J of Math, 1988, 61: 39-72

[7] Bourgain J. Doubel recurrence and almost sure convergence. J Rein Angew Math, 1990, 404: 140-161

[8] Bourgain J. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. Publ Math IHES, 1989, 69: 5-41

撰稿人：叶向东
中国科学技术大学

关于闸轨道多重性的塞弗特 (Seifert) 猜想

Seifert's Conjecture on The Multiple Existence of Brake Orbits

设 Hamilton 函数 $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R}) \equiv \{\mathbb{R}^{2n}$ 上二次连续可微实值函数全体$\}$, 它具有以下形式：

$$H(p,q)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q)p_ip_j+V(q),$$

其中 $V\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $a_{ij}=a_{ji}\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 对任意 $q\in\mathbb{R}^n$ 均有 $(a_{ij}(q)^n_{i,j=1})$ 是 n 阶对称正定矩阵. 相应的 Hamilton 系统为

$$\begin{cases} \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}. \end{cases} \tag{1}$$

对于系统 (1) 的任意一个周期解 $(p(t),q(t))$, $H(p(t),q(t))\equiv H(p(0),q(0))$, 即 $(p(t),q(t))$ 均落在能量面 $\Sigma=H^{-1}(H(p(0),q(0))$ 上, 其中 $t\in\mathbb{R}$. 当 $a_{ij}(q)\equiv\dfrac{1}{2}$ 时, q 可以看作单位质量质点的位移, $p=\dot{q}$ 为速度, V 为势函数, $H(p,q)$ 为该质点的动能与势能之和, 我们称之为能量函数. 系统 (1) 描述了保守系统中质点的运动. 对于给定能量面上的周期解的多重性以及稳定性已经有许多的研究[6].

1948 年, Seifert[9] 研究了 (1) 的一种特殊的非常值周期解 $(p(t),q(t))$, 它满足 $p(0)=p(T)=0$. 因为 Hamilton 函数 H 关于 p 是偶函数, 所以 (p,q) 是 $2T$ 周期的, 且其中 p 在 $t=0$ 和 $t=T$ 处是**奇**的 (即对任意 $t\in\mathbb{R}$ 皆有 $p(-t)=-p(t), p(T-t)=-p(T+t)$), q 在 $t=0$ 和 $t=T$ 处是**偶**的 (即对任意 $t\in\mathbb{R}$ 皆有 $q(-t)=q(t), q(T-t)=q(T+t)$). 这样的周期解我们称之为**闸轨道**. 记 (p,q) 的能量 $E=H(p(t),q(t))$, 则 $V(q(0))=V(q(T))=E$. 自然地, 我们可以把闸轨道周期延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 若闸轨道 (p,q) 和 $(\tilde{p},\tilde{q})$ 的像集 $\{(p(t),q(t))|t\in\mathbb{R}\}\neq\{(\tilde{p}(t),\tilde{q}(t))|t\in\mathbb{R}\}$ 我们称它们是**几何相异**的, 否则称它们是**几何相同**的.

Seifert[9] 研究了势井 $\Omega=\{q\in\mathbb{R}^n|\ V(q)<E\}$ 内闸轨道的存在性. 当$\dfrac{\partial H}{\partial q}$ 在 $\partial\Omega$ 上恒不为零, a_{ij} 与 V 均为解析函数且 $\bar{\Omega}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中标准单位闭球时, 运用 Jacobi 度量

$$ds^2 = (E - V(q)) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{-1}(q) p_i p_j$$

Seifert 证明了系统 (1) 至少存在一条能量为 E 的闸轨道. 该证明基于 Maupertuis-Jacobi 准则：任意一条 Jacobi 度量下的非常值的测地线都可以经过重新参数化使之成为系统 (1) 的具有能量 E 的闸轨道. 同时Seifert[9] 提出如下猜想：在上述条件下, 系统 (1) 存在至少 n 条几何相异的能量为 E 的闸轨道.

这一猜想及闸轨道的相关问题引起了许多数学家的兴趣. 1978~1987 年间, 在与文献 [9] 中不同或者更弱的条件下, Bolotin, Hayashi, Gluck 与 Ziller, Benci 和 Rabinowitz 等许多数学家证明了闸轨道的存在性结果.

关于闸轨道的多重性, 也有许多人进行了研究. 1989 年 Szulkin[10] 证明若 $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, H 关于 p 是偶函数, $\Sigma \equiv H^{-1}(1)$ 是星形曲面且被 $\mathbb{R}^{2n}$ 中两个半径之比小于 $\sqrt{2}$ 的同心球面夹住, 则 Σ 上至少有 n 条几何相异的系统 (1) 的闸轨道. 在不同的夹条件之下 1985 年 van Groesen[5], 1993 年 Ambrosetti, Benci 和龙以明[1] 分别得到了 n 条几何相异闸轨道的存在性. 以上论文中假设夹条件都是为了保证其证明过程中应用变分方法和临界点理论得到的 n 条闸轨道是两两几何相异的.

在不假定两面夹条件时, 龙以明、张端智和朱朝锋[7] 于 2005 年对 Hamilton 系统的闸轨道定义了 Maslov 型指标. 以此为工具他们证明了：当 $n \geqslant 2$ 时, 若 H 关于变量 p 与 q 均为偶函数, 即 $H(\pm p, q) = H(p, q) = H(p, \pm q)$, 且 $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ 严格凸时, 对任意 $h > \min\{H(p,q) | (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\} = H(0,0)$, 能量面 $H^{-1}(h)$ 上至少有两条几何相异的系统 (1) 的闸轨道. 由此当 $a_{ij}(q) \equiv \dfrac{1}{2}$ 时, 若 $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, V 为偶函数, 则 Ω 内至少有两条几何相异的能量为 E 的闸轨道.

但是, 迄今为止 Seifert 关于闸轨道多重性的猜想还远未解决. 即使是在 $a_{ij}(q) \equiv \dfrac{1}{2}$, Ω 有界严格凸时的特殊情形下, $n \geqslant 2$ 时两条几何相异闸轨道的存在性也还没有得到证明 (文献 [7] 中需要对 Ω 加对称性条件, 即 V 为偶函数). 该猜想中 $\bar{\Omega}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中标准单位闭球是一个拓扑条件, 困难之处在于如何有效地运用它. Seifert 这一猜想涉及分析、拓扑、几何等众多领域, 我们相信通过对该猜想及相关问题的研究一定会促进上述各领域的进一步发展.

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A, Benci V and Long Y. A note on the existence of multiple brake orbits. Nonlinear Anal T M A, 1993, 21: 643-649

[2] Benci V. Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems. Ann I H P Analyse Nonl, 1984, 1: 401-412

[3] Bolotin S. Libration motions of natural dynamical systems. Vestnik Moskov Univ Ser I Mat Mekh, 1978, 5: 72-77 (in Russ)

[4] Gluck H, Ziller W. Existence of periodic solutions of conservtive systems. Seminar on Minimal Submanifolds. Princeton University Press, 1983, 65-98

[5] van Groesen E W C. Analytical mini-max methods for Hamiltonian brake orbits of prescribed energy. J Math Anal Appl, 1988, 132: 1-12

[6] Long Y. Index Theory for Symplectic Paths with Applications. Basel: Birkhäuser, 2002

[7] Long Y, Zhang D and Zhu C. Multiple brake orbits in bounded convex symmetric domains. Advances in Math, 2006, 203: 568-635

[8] Rabinowitz P H. On the existence of periodic solutions for a class of symmetric Hamiltonian systems. Nonlinear Anal T M A, 1987, 11: 599-611

[9] Seifert H. Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math Z, 1948, 51: 197-216

[10] Szulkin A. An index theory and existence of multiple brake orbits for star-shaped Hamiltonian systems. Math Ann, 1989, 283: 241-255

撰稿人：张端智

南开大学

哈密顿 (Hamilton) 系统平衡点附近的不变环面

Invariant Tori in The Neighborhood of An Elliptic Equilibrium of Hamiltonian Systems

考虑原点为平衡点的哈密顿系统

$$\dot{x} = J(Ax + \nabla P(x)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{1}$$

这里 A 为对称常矩阵, $P(x) \in O_3(x)$, 我们有下面的 Liapunov 中心定理.

定理(Liapunov 中心定理) 如果 JA 有一对纯虚根 $\pm\lambda_1$, 且

$$k\lambda_1 \neq \lambda_i, \quad i = 2, \cdots, n; k \in \mathbb{Z},$$

这里 $\pm\lambda_i (i = 2, 3, \cdots, n)$ 是 JA 的其他特征根, 则非线性系统 (1) 在平衡点附近有一个 (局部) 两维不变流形, 上面充满周期解.

如果 JA 有 l 对有理无关的纯虚特征根 $\pm\lambda_1, \cdots, \pm\lambda_l, l \leqslant n$, 则线性系统 (即 $P = 0$) 有一个 $2l$ 维不变子空间, 上面都是 l 维不变环面. 我们考虑 Liapunov 中心定理的推广问题:

问题 对线性系统加一些条件, 使得线性系统在平衡点附近的大多数不变环面对任意的高阶非线性扰动保存下来.

这个问题属于 KAM 理论的范畴. 通常我们需要假设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 Diophantine 向量, 即要求存在 $\tau > 0$ 使得 $\langle k, \lambda \rangle > \dfrac{\gamma}{|k|^\tau}$ 对任意的 $k \neq 0$ 成立, 不然结论不对. 另外我们假设扰动是解析的.

这个问题的特殊情况是下面的 Herman 猜测:

Herman 猜测 设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为Diophantine向量, $P(x) \in O_3(x)$ 解析, 则非线性系统 (1) 在平衡点附近有一族 n 维不变环面, 且不变环面全体构成 $2n$ 维Lebesgue正测集.

Herman 猜测对 $n = 2$ 成立[6,7], 但对 $n \geqslant 3$ 仍是公开问题. 扰动的解析性假设至关重要, 不然猜测可能不对[8].

这个问题的困难点是未扰系统没有任何“扭转”. 应用规范型理论和 KAM 理论可以证明对通有的高阶扰动上述问题的答案是肯定的[1~4]. 但这不是 Liapunov 中心定理在 $l \geqslant 2$ 时的对应物. 我们希望结论对任意的高阶非线性扰动成立.

参 考 文 献

[1] Melnikov V K. On some cases of the conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function. Soviet Math Dokl, 1965, 6: 1592-1596

[2] Eliasson L H. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1988, 15: 115-147

[3] Kuksin S B. Nearly Integrable Infinite Dimensional Hamiltonian Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1993

[4] Pöschel J. On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems. Math Z, 1989, 202: 559-608

[5] Herman M R. Some Open Problems in Dynamical Systems. Doc Math J DMV, Extra Volume ICM II, 1998: 797-808

[6] Rüssmann H. Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems. Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 6(2): 119-204

[7] Rüssmann H. Stability of elliptic fixed points of analytic area-preserving mappings under the Bruno condition. Ergod Th & Dynam Sys, 2002, 22: 1551-1573

[8] Marmi S, Yoccoz J C. Some Open Problems Related To Small Divisors. Lecture Notes in Mathematics, 2002, 1784: 175-191

撰稿人：尤建功
南京大学

紧流形上的闭测地线猜想

Closed Geodesic Conjectures on Compact Manifolds

如所周知, 平面上连接给定两点的测地线 (即最短曲线) 为直线. 但在地球表面上来确定这些最短曲线却是非常困难的, 确定地球表面上封闭的测地线的问题则是更加困难的. 数学上对于这个问题的刻画一般需要引进 Finsler 流形与 Riemann 流形的概念. 设 M 为一个有限维流形, 如果函数 $F: TM \to [0, +\infty)$ 为满足下述条件的连续函数:

(1) $F: TM \setminus \{0\} \to [0, +\infty)$ 是光滑的, 这里 $\{0\}$ 表示 M 的切丛 TM 的零截面,

(2) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ 对所有 $y \in T_xM$, $x \in M$ 和 $\lambda > 0$ 成立,

(3) 对所有 $x \in M$ 和 $u, v \in T_xM$, 下面的二次型总是正定的:

$$g_{x,y}(u, v) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}F^2(x, y + su + tv)|_{t=s=0},$$

则称 F 为 M 上的一个 Finsler 结构. (M, F) 称为一个 Finsler 流形. 如果 F 还满足 $F(x, -y) = F(x, y)$, 则称 F 是可逆的. 如果存在光滑依赖于 $x \in M$ 的对称正定矩阵 $G(x) \in GL(T_xM)$, 使 $F(x, y)^2 = \dfrac{1}{2}G(x)y \cdot y$ 总成立, 则称 F 为一个 Riemann 结构, 称 (M, F) 为一个 Riemann 流形.

设 $M = (M, F)$ 为一个 Finsler 流形. 记周长为 1 的圆周为 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 记由 S^1 到 M 的所有绝对连续一阶导数平方可积的映射 (称为闭曲线) 的集合为 ΛM, 称为 M 的圈空间. 对任意 $c \in \Lambda M$ 和两个实数 $a < b$, 曲线 c 由 $c(a)$ 到 $c(b)$ 的长度定义为 $\displaystyle\int_a^b F(c(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t))\mathrm{d}t$. 对 $c \in \Lambda M$, 如果 $c(S^1)$ 上足够接近的任意二点 p 与 q 都有曲线 c 总是 M 上连接 p 与 q 的所有绝对连续一阶导数平方可积的曲线中之最短者, 则称 c 为一条闭测地线. 对任意自然数 m, 定义 c 的 m 次迭代为 $c^m(t) = c(mt)$, 其中 $t \in \mathbb{R}$. 如果 c 不是其他闭测地线的迭代, 称 c 为本原的. 称一个 Finsler 流形上的两条本原闭测地线 c_1 与 c_2 是相异的, 如果不存在 $s \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1(t) = c_2(t + s)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立. 称一个可逆 Finsler (或 Riemann) 流形上的两条闭测地线 c_1 与 c_2 是几何相异的, 如果 $c_1(S^1) \neq c_2(S^1)$.

n 维紧 Finsler 或 Riemann 流形上的闭测地线的最简单的例子为经典 n 维球面上的大圆. 显然, 这样的大圆有无穷多条. 一个非常著名的猜想是: 任意紧

Riemann流形上总存在无穷多条几何相异的闭测地线. 关于闭测地线的研究可以追溯到 J. Hadamard, H. Poincaré, G. D. Birkhoff, M. Morse, L. Lyusternik 与 L. Schnirlman 等许多著名数学家一个多世纪来的工作. G. D. Birkhoff[1] 在 1920 年代证明了任意 Riemann 球面上总存在至少一条闭测地线. 1951 年, L. Lyusternik 与 A. Fet[9] 证明了任意紧 Riemann 流形上总存在至少一条闭测地线. 1960 年代以后, W. Klingenberg 领导的研究团队对闭测地线问题做出了许多基本的工作, 获得了许多有趣的成果. 判定几何相异性的两面夹条件就是他们提出的[7]. 1969 年, D. Gromoll 与 W. Meyer[4] 证明了紧 Riemann 流形 M 的圈空间的 Betti 数列无界蕴涵 M 上总存在无穷多条几何相异的闭测地线. 由于 M. Vigué-Poirrier 和 D. Sullivan1976 年的工作[10], 当 M 为单连通时, M 的圈空间的 Betti 数列无界当且仅当 M 的上同调环只有一个生成元, 目前关于闭测地线研究的兴趣主要集中在球面上. 1990 年前后, V. Bangert[2] 与 J. Franks[3] 证明了任意 2 维 Riemann 球面 S^2 上总存在无穷多条几何相异的闭测地线. 但是当维数 $n > 2$ 时, 即使是每个 n 维 Riemann 球面 S^n 上是否总存在至少 2 条几何相异的闭测地线的问题仍尚未解决.

上述关于有限多重性的成果均可用变分方法来导出, 因此类似的结果对紧 Finsler 流形也成立. 1973 年 A. Katok[6] 构造了 n 维球面 S^n 上的一类不可逆 Finsler 结构, 使得其上恰有 $2[(n+1)/2]$ 条相异的本原闭测地线. 这一成果揭示了 Finsler 结构的可逆性对闭测地线的重要影响. 2003 年, H. Hofer, K. Wysocki 和 E. Zehnder[5] 证明了如果一个 2 维 Finsler 球面上的所有闭测地线非退化, 而且所有双曲闭测地线的稳定与不稳定流形横截相交, 则其上相异本原闭测地线的条数必为 2 或无穷多. 2005 年, V. Bangert 与龙以明证明了任意 2 维 Finsler 球面上总存在至少 2 条相异的本原闭测地线[8]. 由于这些结果自然产生的关于一般 Finsler 球面上的闭测地线多重性的一个相关猜想是: *对任意正整数 $n \geqslant 2$, 存在仅依赖于 n 的正整数 p_n 与 q_n 满足 $2 \leqslant p_n \leqslant q_n$, 当 $n \to +\infty$ 时有 $p_n \to +\infty$, 而且 $p_2 = q_2 = 2$ 成立, 使得任意 n 维Finsler 球面 (S^n, F) 上的相异本原闭测地线的条数 $k_n(F)$ 总满足 $p_n \leqslant k_n(F) \leqslant q_n$ 或 $k_n(F) = +\infty$*[8]. 目前关于这一猜想的研究仅有一些部分性的成果.

一百多年来关于闭测地线的研究已经导致了许多数学新思想、新理论和新领域的出现和发展, 但目前距离上述闭测地线猜想的彻底解决还相差甚远. 相信解决这些猜想的努力必将进一步促进数学事业的发展.

参 考 文 献

[1] Birkhoff G D. Dynamical Systems. Amer Math Soc Colloq Publ IX, Providence R.I. Amer Math Soc, 1927

[2] Bangert V. On the existence of closed geodesics on two-spheres. Inter J of Math, 1993, 4: 1-10

[3] Franks J. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus diffeomorphisms. Invent Math, 1992, 108: 403-418

[4] Gromoll D, Meyer W. Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds. J Diff Geod, 1969, 3: 493-510

[5] Hofer H, Wysocki K and Zehnder E. Finite energy foliations of tight three spheres and Hamiltonian dynamics. Ann of Math, 2003, 157: 125-255

[6] Katok A B. Ergodic properties of degenerate integrable Hamiltonian systems. Izv Akad Nauk SSSR, 1973, 37(Russian), Math USSR-Izv, 1973, 7: 535-571

[7] Klingenberg W. Riemannian Geometry. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter, 1995

[8] Long Y. Multiplicity and stability of closed geodesics on Finsler 2-spheres. J of European Math Soc, 2006, 8: 341-353

[9] Lyusternik L A, Fet A I. Variational problems on closed manifolds. Dokl Akad Nauk SSSR (N.S.), 1951, 81: 17-18

[10] Vigué-Poirrier M, Sullivan D. The homology theory of the closed geodesic problem. J Diff Geom, 1976, 11: 633-644

撰稿人：龙以明
南开大学

弱 Pinsker 猜想

Weak Pinsker Conjecture

在我们日常生活中, 经常会碰到不确定性的问题. 例如, 明天下雨的可能性是 80%, 就是一个典型的不确性问题. 不确定性问题所包含复杂度 (或者说不确定性程度) 在多数的情况下是可以用数学来定量的描述. 20 世纪 40 年代末, Shannon 在信息理论中提出的 Shannon 熵, 1958 年, 著名数学家 Kolmogorov 对保测系统引入测度熵, 以及 20 世纪 60 年代中期, 人们对拓扑动力系统引入的拓扑熵等概念, 都是关于不确定性事物复杂度的数学度量. 它们是现代动力系统和遍历理论中不可或缺的概念. 在自然科学和社会科学中有着广泛的应用. 需要指出的是, Shannon 熵、测度熵或拓扑熵与热力学中 Boltzmann 熵并非一致, 但由于在它们的定义中均采用了形如热力学熵的 Boltzmann 公式的思想, 以及均有体系结构越规则, 功能越完善, 这些量就越小这一特性, 所以也称为“熵”.

正如我们所说的, 测度熵反映了保测系统的不确定性程度[3], 一直以来人们对不确定性程度高的系统有着浓厚的研究兴趣. 在不确定性程度高的系统中, 1958 年, Kolmogorov[3] 引入的测度 K 系统是最为典型的一类. 在这里一个保测系统为测度 K 系统当且仅当它的每个非平凡因子系统都有正熵, 测度 K 系统包含所有 Bernoulli 系统, 关于它的研究多年来一直是遍历理论的主要课题之一. 1960 年, Pinsker 就正熵的保测系统与测度 K 系统的内在关系提出如下猜测[6]:

每个遍历的正熵系统可以分解为一个零熵系统和一个测度 K 系统的直积.

Pinsker 猜测研究方面的第一个重要的进展是著名数学家 Sinai 在 1962 年获得的, 他证明了每个遍历的正熵系统具有一个等熵 Bernoulli 因子系统[8]. 但在随后的十多年时间中 Pinsker 猜测没有什么大的进展. 直到 1973 年 Ornstein[5] 取得了本质的突破, 他使用 Ornstein 同构理论否定了 Pinsker 猜测. 1977 年, Thouvenot[9] 称一个遍历的有限正熵系统具有弱 Pinsker 属性, 如果对每个充分小的正数 a, 该遍历系统均能分解为一个熵为 a 的系统和一个 Bernoulli 系统的直积. 与此同时, Thouvenot[9] 提出了弱 Pinsker 猜想:

每个遍历的有限正熵系统均具有弱 Pinsker 属性.

弱 Pinsker 猜想是熵基本属性和 Ornstein 同构理论方面仅有的一个主要的结构性的公开问题, 到目前为止关于它的研究人们只有一些零星的结果[1,2,4,7,10], 还没有本质性的突破.

参 考 文 献

[1] Fieldsteel A. Stability of the weak Pinsker property for flows. Ergodic Theory Dynam Systems, 1984, 4: 381-390

[2] Glasner E, Weiss B. Quasifactors of ergodic systems with positive entropy. Israel of Math, 2003, 134: 363-380

[3] Kolmogorov A N. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.), 1985, 119: 861-864

[4] Marton K, Shields P C. How many future measures can there be? Ergodic Theory Dynam Systems, 2002, 22: 257-280

[5] Ornstein D S. A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails. Advances in Mathematics, 1973, 10: 103-123

[6] Pinsker M S. Dynamical systems with completely positive or zero entropy. Dokl Akad Nauk SSSR, 1960, 133: 1025-1026

[7] Rosenthal A. Weak Pinsker property and Markov processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1986, 22: 347-369

[8] Sinai Ja G. A weak isomorphism of transformations with an invariant measure. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 147: 797-800

[9] Thouvenot J P. On the stability of the weak Pinsker property. Israel J of Math, 1977, 27: 150-162

[10] Thouvenot J P. Weak Pinsker joinings of processes satisfying the weak Pinsker property J Dynam Control Systems, 1999, 5:431-436

撰稿人：黄 文 叶向东
中国科学技术大学

天体力学中的中心构型有限性猜想

Finiteness Conjecture of Central Configurations in Celestial Mechanics

Wintner 在其关于天体力学的经典著作[10] 中提出了中心构型的概念. 中心构型是下述关于 x_i 和 λ 的实系数非线性代数方程组的解

$$\lambda m_i x_i + \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n; \quad x_i \in \mathbb{R}^2 \text{或} \mathbb{R}^3, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

其中参数 $m_i > 0$ 为天体的质量, x_i 为天体的位置, $V(x) = \sum\limits_{i<j} \dfrac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$ 为相应的 Newton 力学系统的势函数. 定义惯量 $I(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \|x_i\|^2$, 并注意到惯量和势函数的齐次性, 由 Euler 定理, 易知 $\lambda = V(x)/I(x) > 0$. 简单地说, 中心构型是这样一种天体的相对位置, 当这些天体在万有引力的作用下运动时, 它们将从静止状态由该相对位置出发, 并在他们的重心 (坐标原点) 发生完全碰撞. 如果两个解之间仅差一个放缩或者 $\mathrm{SO}(d)(d = 2\text{或}3)$ 变换, 我们认为它们确定相同的中心构型.

Wintner[10] 同时提出如下有限性问题:

在天体力学的 n 体问题中, 对于任何选定的正实数 $m_1, \cdots, m_n$ 作为质量, 中心构型的数目是否有限?

在这一领域工作的人们普遍认为该数目应该为有限, 故而上述问题也称为中心构型有限性猜想. Smale 更将其列为 21 世纪的 18 个待解决的数学问题之一[9].

平面时候的中心构型又称为相对平衡点, 因为从它出发可以通过平面旋转构造 Newton 方程的解, 所以上述猜想也称之为相对平衡点有限性猜想.

中心构型也可以解释为某函数的临界点, 其中该函数来自 n- 体问题的势函数. 更精确地说, 中心构型对应于函数

$$\hat{V} : (S - \Delta)/\mathrm{SO}(3) \to \mathbb{R}$$

的临界点, 其中 $S = \{x \in (\mathbb{R}^3)^n | \sum m_i x_i = 0, \frac{1}{2} \sum m_i \|x_i\|^2 = 1\}$, 碰撞集$\Delta = \{x \in S | \text{对于} i \neq j, \text{有} x_i = x_j\}$. 旋转群 $\mathrm{SO}(3)$ 作用在 $S - \Delta$ 上, $\hat{V}$ 是势函数 $V(x) = \sum\limits_{i<j} \dfrac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$ 在商空间 $(S - \Delta)/\mathrm{SO}(3)$ 上诱导的函数. 注意函数 $V : S \to \mathbb{R}$

是在旋转群 SO(3) 下不变的. 对于相对平衡点有类似的解释, 只需将本段中的 3 换成 2, 而且商空间 $S/\mathrm{SO}(2)$ 同胚于 $n-2$ 维复射影空间.

因此 Wintner 问题的一个等价描述是: 对于任何选定的正实数 $m_1, \cdots, m_n$, 上述 $\hat{V}$ 的临界点个数是否有限?

Shub[7] 已经证明临界点集合是紧致集, 因此中心构型的有限性等价于 $\hat{V}$ 的临界点的孤立性. 应该指出文献中已证明了当 $n=3$ 时 $\hat{V}$ 没有退化的临界点, 但当 $n \geqslant 4$ 时确有退化的临界点.

3 体问题共有五个相对平衡点: 其中的三个被 Lagrange 发现, 另外两个被 Euler 所发现. 太阳系中的 Trojans 和 Greeks 小行星群相应于 Lagrange 相对平衡点. Euler 相对平衡点和人造卫星轨道的设计有关. Hampton 和 Moeckel[4] 证明了该猜想对 4 体问题成立, 但他们的方法不容易被推广到 (平面或空间)5 体的情形. 迄今该问题 5 体以上的情形尚未解决.

当 m_i 允许为负时, 中心构型也有很强的物理背景 (漩涡和静电学等). Roberts[6] 通过构造例子证明此时有限性猜想不成立.

众所周知, n 体问题有 10 个著名的首次积分：重心, 线动量, 能量和角动量守恒分别给出其中的 3 个、3 个、 1 个和 3 个首次积分. G. D. Birkhoff 提出如下问题：在 n 体问题中, 相空间中的角动量为常数的子流形的拓扑是什么？Smale[8] 在平面 n 体问题的情况下讨论了拓扑发生变化的特征, Albouy[1] 对空间 n 体问题得到了和 Smale 同样的结果. 该问题的一个阻碍即 Wintner 问题. 所以平面和空间 n 体问题中的 Birkhoff 问题的最后解决依赖于 Wintner 问题的解答. 最近, McCord-Meyer-Wang[5] 对空间 3 体问题情形解决了 Birkhoff 问题. 对于诸多相关材料的一个很好的历史概述和数学背景知识, 也请参见文献[5].

中心构型在天体力学中占有重要地位. 除了上文提及的它和平面或空间 n 体问题的积分流形的密切关系之外, 它还和周期解的构造 (如同形解 (homographic solutions), "8" 字型解等)、所有天体的完全碰撞、非碰撞奇性的研究、n 体问题的不可积性等天体力学的根本问题息息相关. 另外, 从求解实代数方程组的角度来说, 研究中心构型方程本身也很有意义.

和中心构型有限性猜想相关的一个猜想是[2]：对于任意选定的正实数 $m_1, \cdots, m_4$ 作为质量, 4 体凸相对平衡点在每种相对位置下唯一.

更多的背景知识可在 Moeckel 关于中心构型的讲义 (http://www.math.umn.edu/rick/notes/Notes.html) 以及 Abraham 和 Marsden 的书[3] 中找到.

参 考 文 献

[1] Albouy A. Integral manifolds of the N-body problem. Invent Math, 1993, 114: 463-488

[2] Albouy A, Fu Y and Sun S. Symmetry of planar four body central configurations with

equal diagonal masses. Proc Royal Society A, Vol. 2008, 464: 1355-1365

[3] Abraham R, Marsden J E. Foundations of Mechanics. Addison-Wesley Publishing Co, Reading, Mass, 1978

[4] Hampton M, Moeckel R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. Invent Math 2006, 163: 289-312

[5] McCord C, Meyer K and Wang Q. The integral manifolds of the three body problem. Memoirs AMS, Providence, RI, 1998

[6] Roberts G E. A continuum of relative equilibria in the five body problem. Physica D, 1999, 127: 141-145

[7] Shub M. Appendix to Smale's paper: Diagonals and relative equilibria in manifolds, Amsterdam, 1970. NewYork: Springer-Verlag, 1970

[8] Smale S. Topology and mechanics, I and II. Invent Math, 10: 305-331, Invent Math, 11: 45-64, 1970

[9] Smale S. Mathematical problems for the next century, 1st version: Mathematical Intelligencer, 20, 7-15, 1998, Springer；2nd version: Mathematics: Frontiers and Perspectives, Arnold V, Atiyah M, Lax P, Mazur B editors, IMU, 2000, 271-294

[10] Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1941

撰稿人：孙善忠

首都师范大学

波利亚 (Pólya) 猜测

Pólya Conjecture

设 Ω 是 R^n 中具有边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. 考虑 Laplace 算子的如下特征值问题：

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $\Delta\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$ 是熟知的 Laplace 算子.

众所周知问题 (0.1) 有一列特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, 它们可按递增的顺序排列成

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots .$$

1912 年, H. Weyl 在文献 [1] 中运用热核和 Tauber 型定理证得了如下的渐近公式：

$$\lambda_k \sim C_n \left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}}, \quad k \to \infty,$$

其中 $C_n = (2\pi)^2 \Big/ \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$, ω_{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积, 而 $|\Omega|$ 表示区域 Ω 的 Lebesgue 测度.

基于上述结果, Pólya 于 1954 年在文献 [2] 中提出了下面的猜测：

$$\lambda_k \geqslant C_n \left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

1960 年, Pólya 本人在文献 [3] 中就 $n = 2$ 且 Ω 是平面覆盖区域的情形证明了上述猜想. 平面覆盖区域是一类非常特殊的区域, 它是指用该区域不相交地铺垫起来可以覆盖整个平面. 如长方形和三角形是平面覆盖区域, 但圆盘不是平面覆盖区域.

20 年之后, E. Lieb 于 1980 年在文献 [4] 中证明：存在一个正常数 $\tilde{C}_n < C_n$ 使得

$$\lambda_k \geqslant \tilde{C}_n \left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

据我们所知, 关于 Pólya 猜测的最好结果是

$$\lambda_k \geqslant \frac{n}{n+2} C_n \left(\frac{k}{|\Omega|} \right)^{\frac{2}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{0.2}$$

这一结果是由 Peter Li 和丘成桐在 1983 年的文献 [5] 中证明的, 并被他们于 1994 年写进了专著[6].

到目前为止, Pólya 猜测仍然是一个悬而未决的难题. 另外, 关于 Neumann 边值的特征值 Pólya 也给出了一个不等式反向的猜测, 但除了文献 [3] 中的部分结果外没有任何进展. 人们也可考虑多重调和算子特征值的 Pólya 型猜测 [7].

参 考 文 献

[1] Weyl H. Das asmptoticsche verteilungsgesetz der eigenveerte linearer partieller differential gleichungen. Math Ann, 1912, 71: 441-469

[2] Pólya G. Mathematics and Plausible Reasoning. Lodon: Oxford University Press, 1954

[3] Pólya G. On the eigenvalues of vibrating membranes. Proc London Math Soc, 1961, 11(3): 419-433

[4] Lieb E. The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem. Geometry of Laplace operator, Proc Sympos Pure Math, XXXVI. Amer Math Soc Providence, R. I., 1980

[5] Li P, Yau S T. On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem. Comm Math Phys, 1983, 88: 309-318

[6] Yau S T, Li P. Lecture on Differential Geometry. International Press, 1994

[7] Gu Y G. The eigenvalue problems of elliptic equations of higher order. Acta Math Sci, 1991, 11(4): 361-367

撰稿人：戴求亿

湖南师范大学

玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程的 Boltzmann-Grad 极限

Boltzmann-Grad Limit for The Boltzmann Equation

下面介绍的是从微观到介观尺度极限的问题，当中也牵涉到可逆到不可逆的转变。

Boltzmann 方程是统计物理中的一个基本方程, 它描述了稀薄气体中大量粒子通过碰撞相互作用的各种物理现象中其分布随时间的统计演化。

无量纲化的 Boltzmann 方程具有如下形式:

$$Shf_t + \xi \cdot \nabla_x f + \nabla_\xi \cdot (Ff) = \frac{1}{\kappa} Q(f,f), \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

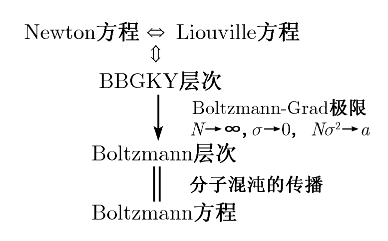
这里 $f(x,\xi,t) \geqslant 0$ 为粒子的分布函数, F 为外力向量, $Q(f,f)$ 为碰撞算子, 它是微观速度的一个双线性非局部算子且其核由粒子间相互碰撞的物理特性所决定. 上述方程中的两个参数 Sh 与 κ 分别是 Strouhal 数以及 Knudsen 数. 它们的乘积 $Sh \cdot \kappa$ 等于平均自由时间与参考时间之比的 $2\sqrt{\pi}$ 倍. 无量纲化的参数 Sh 与 κ 不仅刻画了分子碰撞的不同效应, 而且给出了与碰撞算子相关的时间和空间导数的权.

虽然关于 Boltzmann 方程的数学理论的研究已取得了许多进展, 比如大初值整体弱解 (重正化解) 的存在性、平衡态 (Maxwell 分布) 附近小扰动整体解的存在性及上述整体解的流体力学极限等, 关于从 Newton 力学到 Boltzmann 方程的极限, 即所谓的 Boltzmann-Grad 极限的严格数学论证基本上只限于 Lanford 的经典工作[7]. 事实上由粒子所满足的 Newton 方程组通过取

$$N \to \infty, \quad \sigma \to 0, \quad N\sigma^2 \to a$$

的极限来从数学上严格推导 Boltzmann 方程是由 Grad 提出的[4] 并被 Lanford 从数学上严格证明[7], 这从数学上证实了 Boltzmann 方程推导的正确性 (见下面的示意图). 这里 N 为粒子数, σ 为粒子的半径, $a > 0$ 为一常数.

与下述示意图有关的历史与进展的一个比较好的综述可见文献 [3]. 到目前为止与这一示意图的严格数学理论相关的工作有: 对硬球模型, 关于大初值、小时间段的结果见文献 [7], 小初值、大时间段的结果见文献 [5]、[6]. 另外对小初值以及大时



Boltzmann-Grad 极限

间段, 文献 [2] 讨论了一类修改了的软位势的情形. 所有上面的结果都是限于全空间的情形且没有考虑外力项的影响. Uchiyama 在文献 [8] 考虑了离散速度模型并给出了一个 Lanford 的结论不成立的粒子系统. 文献 [9] 利用一个推广了的 Cauchy-Kovalevskaya 定理给出了上述结果的一个比较简洁的证明. 事实上关于 Newton 方程与 Boltzmann 方程之间的数学联系有两个关键点: **Boltzmann-Grad 极限和分子混沌传播的模式**.

总之, 如何在如下两种情形下来证实 Boltzmann-Grad 极限是一个非常具有挑战性的数学问题: 其一是对大初值以及大的时间段, 其二是对其他的物理情形比如一般的粒子相互作用位势的情形、具有外力的情形和具有物理边界条件的情形.

参 考 文 献

[1] Boltzmann L. Lectures on Gas Theory (Translated by Brush S G). New York: Dover Publ Inc, 1964

[2] Cercignani C. Comm Pure and Appl Math, 1983, 36: 479-494

[3] Cercignani C, Illner R and Pulvirenti M. The Mathematical Theory of Dilute Gases. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1994

[4] Grad H. Comm Pure Appl Math, 1949, 2: 331-407

[5] Illner R, Pulvirenti M. Commun Math Phys, 1986, 105: 189-203

[6] Illner R, Pulvirenti M. Commun Math Phys, 1989, 121: 143-146

[7] Lanford O. III. Lecture Notes in Phys 38 (ed. Moser E J). New York: Springer-Verlag, 1975, 1-111

[8] Uchiyama K. Hiroshima Math J, 1988, 18: 245-297

[9] Ukai S. Japan J Indust Appl Math, 2001, 18: 383-392

撰稿人：杨　彤
香港城市大学

玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程的流体动力学极限

Fluid Dynamical Limits of The Boltzmann Equation

在气体和流体动力学中, 许多著名的运动方程已经被推导, 它们着重于考虑气体和流体在不同物理尺度下的不同方面, 而且它们中的大多数是经典的, 可以追溯到 19 世纪或更早. 下面介绍的问题是关于介观到宏观尺度的极限问题.

气体和流体在宏观尺度下被看作一个连续体, 它们的运动由诸如物质密度、宏观速度、绝对温度、压强、张力、热流等宏观量来描述. 迄今为止, 在流体力学所提出的方程组中最著名的当属 (可压或不可压) Euler 方程组和 Navier-Stokes 方程组.

与之相反的是, 在微观尺度, 气体、流体乃至任何物质都被看作一个由微观粒子 (原子/分子) 组成的多体系统. 于是, 这个系统的运动可在经典力学的框架下由耦合的 Newton 方程组来描述. 如果微观粒子的数目为 N, 所涉及方程的数目则为 $6N$.

虽然 Newton 方程是经典力学的第一原理, 但由于方程的数目太大 (N 与 Avogadro 常数 6×10^{23} 同阶), 故不可能给出所有的初始值, 从而这些方程在实际应用中用处不大, 人们只得转向统计方法. 另一方面, 前面提及的流体动力学宏观量是与依赖于某个微观状态的量的统计平均有关的. 动力学理论则给出了气体和流体的中观描述, 它被认为是联系宏观和微观尺度的一个核心理论. 一个基本且经典的动力学方程是 Boltzmann 方程

$$f_t + \xi \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\kappa} Q(f, f), \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

这里 $f(x, \xi, t) \geqslant 0$ 为粒子的分布函数, κ 称为 Knudsen 数, 它等于微观尺度与宏观尺度之比, $Q(f, f)$ 为碰撞算子, 它是微观速度的一个双线性非局部算子且其核由粒子间相互碰撞的物理特性所决定.

第一个从动力学方程推导出流体力学方程的是 Maxwell 和 Boltzmann. 这些早期的推导基于动力学方程中不同项之间的相互平衡的技巧. 从某种程度上讲, 这些平衡技巧似乎是任意的. 因此, Hilbert 认为这些推导应该基于关于非量纲的小参数 κ 的一个系统的展开, 即 Hilbert 展开. 稍后 Chapman 和 Enskog 独立提出了关于这一小参数的一个不同的展开, 即所谓的 Chapman-Enskog 展开.

Hilbert 展开和 Chapman-Enskog 展开的首项为可压缩 Euler 方程, 其他阶依次为可压缩 Navier-Stokes 方程、Burnett 方程及超 Burnett 方程等. 验证这些形式

展开是很困难的, 部分原因在于对这些流体力学方程基本的适定性与正则性结果都仍旧没有解决. 我们将从下面三个方面介绍流体力学极限的验证：

(1) 注意, 可压缩 Navier-Stokes 方程并不是 Boltzmann 方程的任何极限所导出的方程. 另一方面, 即使 Boltzmann 方程和可压缩 Euler 方程在描述不同尺度下的波现象时有相似之处, 从 Boltzmann 方程到可压缩 Euler 方程的流体力学极限仍是一个本领域具有挑战性的公开问题. 其中的一个主要困难在于可压缩 Euler 方程的解一般会产生奇性, 即激波的形成, 因而人们不得不转向弱解的研究. 于是, 问题是如何对满足适当熵条件的弱解验证上述极限. 关于这方面的一些特殊情形的工作有 Caflisch[5], Nishida[7], Ukai-Asano[9] 和 Yu[10].

(2) 对不可压方程, 有许多工作[1~3,6,8] 研究了在长时间尺度下直接得到不可压 Navier-Stokes 方程. 特别地, Golse-Saint Raymond[6] 证明了 Boltzmann 方程的 DiPerna-Lions 的重整解的适当的 rescaled 序列收敛到不可压 Navier-Stokes 方程的 Leray 解. 即便如此, 该解的唯一性和正则性还是一个大的公开问题.

(3) 最后, 与经典的流体力学方程组相比, Boltzmann 方程提供了更多的信息, 所以它可以用来描述一些经典的方程如 Euler 和 Navier-Stokes 方程等所不能描述的现象. 这些有趣的现象, 比如稀薄气体中的 thermal creep flow, 早在 Maxwell 时代已为人知晓. 关于它们的研究, 从 20 世纪 60 年代起就有一些基于动力学方程的渐近推导和数值计算的工作[8], 但是这些现象严格的数学理论至今完全是一个空白.

参 考 文 献

[1] Bardos C, Golse F and Levermore D J. Stat Phys, 1991, 63: 323-344; Arch Rational Mech Anal, 2000, 153: 177-204

[2] Bardos C, Ukai S. Math Models and Methods in Appl Sci, 1991, 1: 235-257

[3] Bardos C, Levermore D, Ukai S and Yang T. Bulletin of the Institute of Mathematics. Academia Sinica, 2008, 3(1): 1-49

[4] Boltzmann L. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Wien, 1872, 66: 275-370

[5] Caflisch R. Commun Pure Appl Math, 1980, 33: 651-666

[6] Golse F, Saint-Raymond L. Invent Math, 2004, 155(1): 81-161

[7] Nishida T. Comm Math Phys, 1978, 61: 119-148

[8] Sone Y. Boston: Birkhăuser, 2002

[9] Ukai S, Asano K. Hokkaido Math J, 1983, 12: 311-332

[10] Yu S -H. Comm Pure Appl Math, 2004, 58: 409-443

撰稿人：杨　彤
香港城市大学

不可压缩纳维耶-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程

Incompressible Navier-Stokes Equations

不可压缩 Navier-Stokes 方程描述了黏性不可压缩齐次流体的运动. 根据 Newton 力学中的质量守恒和动量守恒, 我们得到如下方程：

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + f, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i u_i = 0, \tag{2}$$

其中, u 表示速度场, p 表示压强函数, ν 是黏性系数, f 表示外力场. 方程 (1) 表示流体的动量守恒, 方程 (2) 表示流体的质量守恒, 即不可压缩条件. 在恒温的情况下, 若速度场适当光滑, 对不可压缩齐次流体来说, 能量守恒是动量守恒和质量守恒的推论. 该方程是法国工程师 Navier 于 1822 年以适当分子模型为基础建立起来的. 随后, 由于 Poisson(1831), de Saint Venant(1843), 特别是 Stokes(1845) 等人的贡献, 他们以连续介质力学为基础, 重新建立了该方程. 因此, 后人称该方程为 Navier-Stokes 方程.

法国著名数学家 J. Leray 于 1933 年和 1934 年连续发表了 3 篇论文, 建立了黏性不可压缩流体力学的数学理论基础. 特别地, Leray 构造了二维和三维 Navier-Stokes 方程 Cauchy 问题具有有限能量的一类整体弱解; 当初始值光滑时, 存在 $T_1(>0)$, 使得该弱解在局部时间 $(0, T_1)$ 内是光滑的; 且在某个适当大的时间 $T_2 \geqslant T_1$ 之后, 该弱解也是光滑的. Leray 进一步分析并证明了他所构造的弱解关于时间的可能奇异点集合的 Lebesgue 测度为零. Hopf(1951) 证明了, 在任意三维区域上, Navier-Stokes 方程初边值问题具有有限能量弱解的整体存在性. 随后, Lions, Prodi(1959) 和 Ladyzhenskaya(1959) 等人证明了对二维 Navier-Stokes 方程, 当初始值适当光滑时, 其整体弱解的唯一性、正则性和稳定性, 从而证明了二维 Navier-Stokes 方程解的适定性.

关于三维初边值问题, 在如下特殊情形之一：① 所给初始值关于某个轴具有轴对称性, 且充满流体的区域不包括该对称轴; ② 所给初值是旋转对称的; ③ 所给初值是螺旋对称的, 则 Navier-Stokes 方程是整体唯一可解的. 对于一般情形, 在给定的初始值的某种范数适当小或流体运动区域适当小的假设条件下, 证明了整体光滑解的存在性; 或在各种不同的正则性假设条件下, 研究了 Leray-Hopf 弱解的唯一性

和正则性. 但是, 当初始值是无穷光滑且有紧支集 (初始值和流体运动区域的大小没有任何限制) 时, 其 Leray-Hopf 弱解的唯一性和正则性, 或光滑解的整体存在性至今没有解决. 从 1976 年起, Scheffer 发表了系列论文, 开始研究一类弱解 (suitable weak solution) 奇异点集合的大小, 即弱解的部分正则性问题. 到目前为止, 最好的结果由 Caffarelli, Kohn 和 Nirenberg(1982) 得到. 对于一类满足广义能量不等式的弱解 (suitable weak solution), 他们证明了关于时间空间的可能奇异点集合的一维 Hausdorff 测度为零. 林芳华教授简化了他们的证明. 1995 年, Necas, Ruzicka 和 Sverak 等证明了 Navier-Stokes 方程不存在非平凡的后向自相似解. Miller, O'Leary 和 Schonbek(2001) 证明了不存在非平凡的更广的一类后向自相似解.

因此, 当初始值是无穷光滑, 散度为零且有紧支集 (初始值和区域的大小没有任何限制) 时, 三维不可压缩 Navier-Stokes 方程光滑解的整体存在性, 或光滑解在有限时间的爆破性, 是不可压缩流体力学数学理论中最基本的公开问题. 它是 Clay 研究所悬赏一百万的七个著名千禧年问题之一, 也是俄罗斯科学院和著名数学家 Smale 认为本世纪需要解决的重大问题之一.

当黏性系数 ν 趋于零时, Navier-Stokes 方程初边值问题的解, 在流体运动区域的内部, 是否趋向于相应的理想流体即 Euler 方程初边值问题的解, 以及流体边界层问题的刻画? Navier-Stokes 方程初边值问题的解究竟在何种程度精确地描述了实际流体的流动? 这些也是不可压缩 Navier-Stokes 方程研究中最基本而很重要的问题.

参 考 文 献

[1] Caffarelli L, Kohn R and Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math, 1982, 35: 771-831

[2] Cannone M. Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations//Friedlander S, Serre D. Handbook of Mathematical Fluidynamics. Elsevier, 2004

[3] Fefferman C L. Existence and uniqueness of the Navier-Stokes Equation, 2002. Avaiable online at http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations

[4] Galdi G P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes equations. Volume I, II. Berlin: Springer-Verlag, 1994

[5] John G Heywood. Open Problems in the Theory of the Navier-Stokes Equations for Viscous Incompressible Flow. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 1-22

[6] Hopf E. über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math Nachr, 1951, 4: 213-231

[7] Ladyzhenskaya O A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, 1969

[8] Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math, 1934, 63: 193-248

[9] Smale S. Mathematical problems for the next century. Math Intelligencer, 1998, 20: 7-15

[10] Scheffer V. Turbulence and Hausdorff dimensions//Turbulence and the Navier-Stokes Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1976: 94-112

撰稿人：何　成

中国科学院数学与系统科学研究院

等 谱 问 题

On The Isospectral Problem

设 Ω_1 和 Ω_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个有界区域, 分别考虑其上的 Laplace 算子的特征值问题

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega_1, \\ u|_{\partial\Omega_1} = 0, \end{cases} \qquad (\mathrm{D}_2)\quad \begin{cases} -\Delta v = \mu v, & x \in \Omega_2, \\ v|_{\partial\Omega_2} = 0, \end{cases}$$

则特征值问题 (D_1) 和 (D_2) 分别有离散谱 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 若对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 均有

$$\lambda_i = \mu_i, \tag{1}$$

则称 Ω_1 和 Ω_2 关于 Dirichlet Laplacian(也可考虑类似的 Neumann Laplacian) 是两个等谱的区域. 于是可以提出这样的问题, 即

等谱问题 若 Ω_1 和 Ω_2 是等谱的两个区域, 那么它们一定是等距同构的吗?

在应用背景下, 每一个特征值 λ_i 可以看成是对 Ω 在作某种测量, 所以形象地说, 以上等谱问题是指如果对 Ω_1 和 Ω_2 在所有的那些 (无穷多种) 测量下得到的数据都是相同时, 是否在几何上可推出 Ω_1 和 Ω_2 是可以完全的重叠在一起的? 遗憾的是对于这一问题的回答, 我们得到的答案一般却是否定的.

这方面的第一个反例是 Milnor[2] 给出的, 他当时构造出了一对等谱的但非等距同构的 16 维环面的例子. 但人们真正感兴趣的是在平面 $\mathbb{R}^2$ 上是否有上述的等谱问题成立[1]. 这方面的研究涉及到分析 (椭圆算子的谱)、几何和拓扑等学科交叉的内容[3~5]. 1992 年, Gordon-Webb-Wolpert[6] 在这方面取得了突破性的进展, 他们在平面 $\mathbb{R}^2$ 上构造出了一对边界逐段光滑的等谱但非等距同构的例子. 随后文献 [6] 中的复杂证明被文献 [7] 和 [8] 利用新的证明思想简化了. 接下来这方面还有两个困难的问题一直困惑着人们: ①是否在平面 $\mathbb{R}^2$ 上可以构造一对有界连通区域, 其边界是非常不光滑 (甚至于是具分形的边界) 的, 使得它们是等谱的但却非等距同构? ② 是否在平面 $\mathbb{R}^2$ 上可以构造一对具光滑边界 (至少要 C^1 光滑的) 的有界连通区域, 它们是等谱的但却不是等距同构的?

2000 年, 文献 [9] 在平面 $\mathbb{R}^2$ 中构造出了一对具分形边界的连通有界区域, 它们是等谱的, 但非等距同构, 从而解决了以上所提的问题 (1). 但按照专家们的共

识, 以上所提的问题 (2) 是一个有相当难度的问题, 到目前为止还未见有能被解决的迹象. 让我们再次叙述一下这个问题:

问题 平面 $\mathbb{R}^2$ 上是否存在一对具光滑边界 (至少为 C^1 光滑的边界) 的有界连通区域, 它们是等谱的, 但却非等距同构?

以上所提的问题是分析学家、几何拓扑学家共同感兴趣的问题, 读者可通过这里所列举的参考文献进一步深入了解和研究.

参 考 文 献

[1] Kac M. Can one hear the shape of a drum? Amer Math Monthly, 1966, 73: 1-23

[2] Milnor J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. Proc Nat Acad Sci USA, 1964, 51: 542

[3] Buser P. Isospectral Riemann surfaces. Ann Inst Fourier, 1986, 36: 167-192

[4] Urakawa H. Bounded domains which are isospectral but not isometric. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1982, 4: 441-456

[5] Gordon C. Wilson E. Isospectral deformations of compact solvmanifolds. J Differential Geom, 1984, 19: 241-250

[6] Gordon C. Webb D L, Wolpert S. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. Invent Math, 1992, 110: 1-22

[7] Berard P. Transplantation et isospectralite I. Math Ann, 1992,292: 547-559

[8] Chapman J. Drums that sound the same. Amer Math Monthly, 1995, 102: 124-138

[9] Sleeman B D, Chen H. On nonisometric isospectral connected fractal domains. Rev Mat Iberoamericana, 2000, 16: 351-361

撰稿人: 陈 化
武汉大学

钝体超音速绕流问题的数学分析

Problem on Supersonic Flow Around Blunt Bodies

当一个飞行体在空气中以超音速的速度飞行时, 一般在飞行体前方就会产生一个激波. 按相对运动的观点也可理解为, 当一个超音速气流越过一个固定物体时, 由于物体的阻绕, 在物体前方会形成一个激波. 这个激波面的形成, 将大大改变气流的状态, 从而改变物体受力的情况. 研究超音速气流受固定物体阻绕后所产生的激波面的位置以及波后的流场就称为超音速绕流问题. 显然, 它对于现代高速飞行技术的发展是至关重要的.

力学实验指出, 当超音速流越过的物体具有尖头部时 (例如物体呈薄翼或尖头锥体时), 物体前方的激波是附着在物体头部的. 这时, 在物体表面与激波之间的区域中流动仍然是超音速的. 相反, 当物体头部是钝头时, 例如该物体是球体、具有球形头部的锥体或具有大顶角的锥体等, 这个激波面将是脱体的, 即激波面与物体表面有一定的距离. 在激波的正后方, 流动是亚音速的, 而在波后下游较远处, 流动仍可以是超音速的[1,2]. 所以在激波到物面的整个区域中所出现的是一个跨音速流.

对于力学实验中观察到的现象在理论上给以严格的证明将能更深刻地了解运动的特性, 也能为相应的数值计算提供可靠的理论基础. 空气动力学中通常用 Euler 方程或 Navier-Stokes 方程来描写流动. 如果将空气的黏性忽略, 又将激波视为一个流动量的间断面, 则确定激波以及激波后的流场就导致 Euler 方程组的一个自由边界问题. 这是偏微分方程理论中一个很复杂的问题. 将问题稍简化一些, 例如将激波后的流动用无旋流描述, 则通过引入位势函数 ϕ, 可以将 Euler 方程组简化为一个二阶非线性偏微分方程, 称为位势流方程.

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\nabla\phi)\phi_{x_i})=0,$$

这个方程在超音速区域中为双曲型方程, 而在亚音速区域中为椭圆型方程. 这样钝体绕流的整个流动就必须用一个混合型方程来描写. 由于流场内流体速度的分布是未知的, 所以从双曲型方程变化到椭圆型方程的变型线也是未知的. 又因为流体运动方程是非线性的, 从而在描写钝体绕流问题时人们将面对一个非线性混合型方程的问题. 若直接用 Euler 方程组讨论钝体超音速绕流, 方程的变型又会与流线特征交织在一起. 相应的问题自然更为困难.

对于尖头物体的超音速绕流问题, 已经在一定条件下证明了在物体头部含附体激波解的存在性与稳定性[3~7]. 但是对于钝头物体超音速绕流问题, 由于方程的变型不可避免, 至今无论是关于解的存在性、稳定性或是关于解的结构等都缺乏数学理论已严格证明的结果. 因为即使是对线性混合型方程, 其系统理论成果与椭圆型方程或双曲型方程相比也要少得多. 但由于钝体超音速绕流问题在空气动力学中的重要性, 而在数学分析的处理上又会同时涉及非线性、混合型、自由边界、整体解等在偏微分方程理论中普遍认为是最困难的因素, 所以这个问题在偏微分方程领域中很受人关注. 对这个问题研究的进展将会对偏微分方程理论的发展起重大的推动作用.

参 考 文 献

[1] Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience, 1948

[2] Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. New York: John Wiley & Sons, Inc, London: Chapman & Hall, Ltd, 1958

[3] Gu C H. A method for solving the supersonic flow past a curved wedge. Journal of Fudan Univ, 1962, 7: 11-14

[4] Li Ta-Tsien. On a free boundary problem. Chinese Ann Math, 1980, 1: 351-358

[5] Schaeffer D G. Supersonic flow past a nearly strait wedge. Duke Math J, 1976, 43: 637-670

[6] Chen Shuxing. Existence of local solution to supersonic flow past a three-dimensional wing. Advances in Appl Math, 1992, 13: 273-304

[7] Chen Shuxing. Existence of stationary supersonic flows past a pointed body. Arch Rational Mech Anal, 2001, 156: 141-181

撰稿人：陈恕行

复旦大学

非线性双曲型守恒律方程组的高维黎曼 (Riemann) 问题

Multi-dimensional Riemann Problems of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws

Riemann 问题是非线性双曲型守恒律方程组理论中的一个特殊的初值问题. 在一个空间变量的情形, Riemann 问题就是初始资料在正负 x 半轴上分别取常状态的间断始值问题. 在 20 世纪 50 年代 Peter Lax 对于含一个空间变量的拟线性严格双曲型方程组证明了如下的结论: 如果它是真正非线性或线性退化的, 那么当在正负 x 半轴上所取的常状态很接近时, Riemann 问题在该状态的邻域中存在唯一的具有小幅度的熵弱解[1,2]. 对于含一个空间变量的拟线性双曲型方程组, Riemann 问题的解可以作为"基本结构"(building block) 来构造非线性双曲型守恒律方程组一般初始值问题的整体熵弱解, 又在一定条件下代表了初始值问题整体熵弱解的渐近性态[3]. 所以, 它的重要性是不言而喻的.

在多个空间变数的情形, 人们也自然想从最基本的间断始值问题着手研究非线性双曲型守恒律方程组理论的各类问题. 例如在两个空间变数的情形, 将初始平面划分成以原点为心的几个角状区域, 在每个区域中初始资料取为常态的始值问题就是这样的问题, 它称为二维 Riemann 问题. 对于含更多空间变数的情形也可以类似地定义更高空间维数的 Riemann 问题. 由于 Riemann 问题的初始条件在自变量的伸缩变换下不变. 而很多守恒律方程组, 例如空气动力学中的 Euler 方程组, 在自变量的伸缩变换下也保持形式不变, 所以这时相应 Riemann 问题的解也具有在这种变换下不变的性质, 这样的解称为自模解. 但是, 即使在含两个空间变数的双曲型方程组 Riemann 问题的情形, 只要方程组含有真正非线性的特征, 它的自模解所满足的方程就不是纯双曲的, 通常会是混合型方程. 于是一个双曲型方程组的间断始值问题将转化为混合型方程的具无穷远处边界条件的边值问题. 加上所考察的解可能含有间断, 问题就变得十分复杂.

高维 Riemann 问题的研究要求对非线性波的相互作用有深入的了解与细致的刻画, 它会导致对非线性方程许多特定边值问题的研究, 也同时提供了混合型方程各种边值问题的实例, 此外, 一些特定的物理问题也可以视为高维 Riemann 问题的特例. 例如角状区域的水坝坍塌问题、平面激波被斜坡反射问题等. 所以, 高维 Riemann 问题的研究不仅对非线性双曲型守恒律方程组理论有重要的意义, 而且对

于整个偏微分方程理论的发展也有重要影响.

参 考 文 献

[1] Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience, 1948

[2] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm Pure Appl Math, 1957, 10: 537-566

[3] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm Pure Appl Math, 1965, 18: 697-715

[4] Mackie A G. Two-dimensional quasi-stationary flows in gas dynamics. Proc Cambridge Philos Soc, 1968, 64: 1099-1108

[5] Levine L E. The expansion of a wedge of gas into a vacuum. Proc Cambridge Philos Soc, 1968, 64: 1151-1163

[6] Ben-Dor G. Shock wave reflection phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 1991

[7] Zhang T, Zheng Y X. Conjecture on the structure of solutions of the Riemann problem for two-simensional gas dynamical systems. SIAM Journal Math Anal, 1990, 21: 593-630.

[8] Glimm J, Klingenberg C, McBrgan O, Plohr B, Sharp D and Yaniv S. Front tracking and two-dimensional Riemann problems. Advances in Appl Math, 1985, 6: 259-290

撰稿人：陈恕行

复旦大学

非线性椭圆方程中的 De Giorgi 及吉本斯 (Gibbons) 猜想

De Giorgi and Gibbons Conjectures in Nonlinear Elliptic Equations

许多实际问题通过一些规范的数学技巧, 可以简化为研究下面两类方程:

$$\text{(I)} \quad \Delta u - u + u^p = 0, \qquad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$
$$\text{(II)} \quad \Delta u - u - u^3 = 0, \qquad |u| < 1, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $p > 1, N$ 是空间维数. 我们称问题 (I) 为非线性 Schrödinger 方程，称问题 (II) 称为 Allen-Cahn 方程.

一个基本的问题是对 (I) 和 (II) 的解进行分类.

Gidas-Ni-Nirenberg[1] 证明了如下著名的结果：如果 (I) 的解满足

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0, \tag{1}$$

那么, u 必然关于某个点为径向对称的, 这样方程 (I) 就可以化为常微分方程了.

对方程 (II), 我们已知当 $N = 1$ 时为一个常微分方程, 并有如下的解：

$$u = \tanh \frac{t}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

1978 年, De Giorgi[2] 提出如下猜想：

De Giorgi 猜想　如果假设 u 满足 (II) 以及

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0, \tag{3}$$

则至少当 $N \leqslant 8$ 时，u 的水平集 $\{u = \lambda\}$ 是超平面 $\left(\text{也就是说 } u = \tanh \left(\frac{x \cdot a - b}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

De Giorgi 的猜想是和极小曲面中的 Bernstein 猜想有密切关系的. Bernstein 猜想为:

Bernstein 猜想　$\mathbb{R}^N$ 的极小曲面如果是图像, 它一定是超平面.

Simons[3] 证明了当 $N \leqslant 7$ 时, Bernstein 猜想是对的; Bombieri, De Giorgi 及 Giusti[4] 给出了一个 Bernstein 猜想在 $N > 7$ 时的反例.

最近十年对 De Giorgi 猜想的研究有很大的进展. 如 Ghoussoub 及 Gui[5] 证明了当 $N=2$ 时, De Giorgi 猜想是成立的. Cabré 及 Amrosio[6] 证明了 $N=3$ 时的 De Giorgi 猜想. Savin[7] 证明了当 $4 \leqslant N \leqslant 8$ 时, 如果假定

$$\lim_{x_N \to \pm+\infty} u(x', x_N) = \pm 1, \tag{4}$$

则 De Giorgi 猜想是对的.

于是我们可以提出如下问题：

问题 1 当 $4 \leqslant N \leqslant 8$ 时, 如果去掉条件 (4)，De Giorgi 猜想是否成立？

当 $N \geqslant 9$ 时, Del Pino, Kowalczyk 及 Wei[8] 构造了一个 De Giorgi 猜想的反例，他们的证明主要是用到 Bombieri, De Giorgi 及 Giusti[4] 的反例.

问题 2 当 $N \geqslant 9$ 时, 是否还可以构造其他更多的反例？

条件 (4) 是和下面的 Gibbons 猜测有关的.

Gibbons 猜想 如果假设 u 满足方程 (II) 以及

$$\lim_{x_N \to \pm\infty} u(x', x_N) = \pm 1 \tag{5}$$

对 x' 一致地成立，那么 $u = \tanh\left(\dfrac{x \cdot a - b}{\sqrt{2}}\right)$.

Barlow-Bass-Gui (2000), Berestycki-Hamel-Momeau (2000) 以及 Farina (1999) 分别给出了 Gibbons 猜想的不同的证明.

问题 1 的研究更加困难，在某些方面, 它和几何中的常平均曲率曲面 (CMC) 的研究有很大的关系，并且它的解的结构极为复杂. 例如 Del Pino, Kowalczyk, Pacard 及 Wei[9] 证明了对任何一个 Toda 系统的解, 都对应着 (I) 的一个解.

同样的, 对 (I), 我们可以提出下面的问题及猜想:

问题 3(Gibbons 猜想) 如果假设 u 满足方程 (I) 以及

$$\lim_{|x_N| \to +\infty} u(x', x_N) = 0 \tag{6}$$

对 x' 一致地成立，那么 $u(x', x_N)$ 对于 x' 是径向对称的, 对于 x_N 是周期的.

条件 (6) 说明了 u 只有两个末端 (ends). 对 CMC 曲面, Korevaar, Kusner 及 Solomon[10] 证明了只有两个末端的常平均曲率曲面一定是 Delaunay 曲面. Gibbons 猜想 (问题 3) 可看作是此几何上的结果所对应的 PDE 方面的一个自然推广.

参 考 文 献

[1] Gidas B, Ni W M and Nirenberg L. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. Mathematical Analysis and Applications, Part A, Adv Math Suppl Studies, Vol 7A, 369-402. New York: Academic Press, 1981

[2] De Giorgi E. Convergence problems for functionals and operators. Proc Int Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis. Rome, 1978: 131-188; Pitagora, Bologna, 1979

[3] Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann of Math, 1968, 88(2): 62-105

[4] Bombieri E, De Giorgi E, Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. Invent Math, 1969, 7: 243-268

[5] Ghoussoub N, Gui C. On a conjecture of De Giorgi and some related problems. Math Ann, 1998, 311: 481-491

[6] Ambrosio L, Cabré X. Entire solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi. Journal Amer Math Soc, 2000, 13: 725-739

[7] Savin O. Regularity of flat level sets in phase transitions. To appear in Ann of Math

[8] del Pino M, Kowalczyk M and Wei J C. On De Giorgi conjectures in Dimensions $N \geqslant 9$. 2008

[9] del Pino M, Kowalczyk M, Pacard F and Wei J C. The Toda system and multiple-end solutions of autonomous planar elliptic problems, 2007

[10] Korevaar N J, Kusner R and Solomon B. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. J Diff Geom, 1989, 30: 465-503

撰稿人：魏军城
香港中文大学

冯·诺伊曼 (Von Neumann) 悖论

Von Neumann Paradox

激波反射的转换问题是在激波反射研究中一个长期未解决的问题. 如所知, 当激波遇上障碍物时就会被障碍物所反射. 一个典型的情形是平面激波被平直表面的反射. 当入射角较小时, 激波反射与线性波反射的图像相近. 但当入射角较大时, 激波反射与线性波反射的图像会有很大的区别. 这时, 入射波与反射波的交点不在障碍物的表面上, 而是与物体表面有一段距离. 另有一个激波将交点与物面相连, 这个激波称为 Mach 杆. 在定常流中的激波反射与在非定常流中的激波反射都会出现这一现象.

1943 年, Von Neumann 通过激波面上应当成立的激波关系 (Rankine-Hugoniot 关系) 的分析指出, 在上述三个激波交点处仅含三个激波不含其他类型间断的非线性波结构不可能存在, 从而引入了三个激波加一个接触间断的波结构, 称为 Mach 结构. 在激波反射问题中何时出现正则反射结构或 Mach 结构可以用激波极线理论来分析. 激波极线是在相平面 (例如以速度分量 u, v 为坐标, 或以压力 p 与速度方向角 θ 为坐标的平面) 上能与一个确定状态相连接的所有可能状态的轨迹. 激波极线与坐标轴的交点或不同激波极线的交点对应于可能的正则反射或 Mach 反射. 这一模型也称为 Von Neumann 模型.

在多数情形下, 由 Von Neumann 模型可给出会发生哪种激波反射的一个预测. 但是, 在某些流场参数组合下, 按照激波极线理论的分析, 正则反射与 Mach 反射都可能产生, 这就是所谓双解区域. 当入射激波强度很弱时, 双解区域会很大. 由于在真实流动中, 应该只有一种情况实际出现, 究竟哪种反射现象会现实地出现就是一个令人疑惑的问题? 此外, 在激波反射中也会出现这种情形: 即按照 Von Neumann 模型既不可能产生正则反射, 也不可能产生 Mach 反射, 但在实验中却可以看到类似于 Mach 反射的结构. 这种实验与理论相背离的现象, 被称为 Von Neumann 悖论[2],[6].

如果对一个激波强度已确定的入射激波, 将其入射角从很小的值开始, 逐渐增大. 那么激波反射现象将从正则反射开始最终过渡到 Mach 反射. 转变点应当落在双解区域中. 究竟何时发生转变? 这是困扰人们很久的问题. 为解决这个问题, 人们提出了几种准则: 脱离准则, 力学平衡准则, 音速准则等[4], 但这些准则都只是部分地与实验相附. 近年来, 又有人提出了滞后作用的观点来分析双解区域的现象. 另

一方面, 为解释理论上无法预测而实验中出现的类似 Mach 反射的现象, 有些学者又提出了新的激波结构, 如 Von Neumann 结构、Guderley 结构等, 但这些观点都还在探讨中. 显然, 判定正则激波反射何时转换成 Mach 反射已不能仅依靠激波极线理论, 它需要利用流体动力学方程对整个流场的结构与稳定性进行更深入的分析, 这也正是偏微分方程理论所面临的难题.

参 考 文 献

[1] Mach E. Uber den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume. Sitzungsbr Akad Wiss Wien, 1878,78: 819-838

[2] Von Neumann J. Oblique reflection of shocks, PB-37079. U.S. Department of Commerce, Office of Technical Services, Washington D.C., 1943

[3] Birkhoff G. Hydrodynamics, a Study in Logic, Fact and Similitude. N J: Princeton University Press, 1950.

[4] Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience, 1948

[5] Ben-Dor G. Shock waves reflection phenomena. New York: Springer-Verlag, 1991

[6] Collera P, Henderson L F. The von Neumann paradox for the diffraction of weak shock waves. J Fluid Mech, 1990, 213: 71-94

[7] Ben-Dor G. A state-of-the-knowledge review on pseudo-steady shock wave reflections and their transition criteria, 2006, 15: 277-294

撰稿人：陈恕行
复旦大学

没有对称性的非线性椭圆型方程无穷多个解的存在性

Existence of Infinitely Many Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Without Symmetry

变分学是一个古老的数学分支, 产生于 18 世纪, Euler 和 Lagrange 在其发展的早期作出了主要贡献. 20 世纪初, Hilbert 提出了 23 个著名的数学问题, 其中有两个涉及变分学, 特别是第 23 问题预言变分学将有很大发展. 正如 Hilbert 所预言, 由于拓扑学等学科的渗入, 20 世纪的变分学有了长足发展, 逐渐演化成现代变分学, 被应用于非常广泛的数学物理问题.

以 Ambrosetti 和 Rabinowitz 于 1973 年发表的山路引理和对称山路引理为标志, 现代变分学进入快速发展时期. 作为对称山路引理的应用, Ambrosetti 和 Rabinowitz 研究了方程

$$-\Delta u = f(x, u),\ x \in \Omega; \quad u = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{1}$$

无穷多个解的存在性, 这里, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域, 具有光滑边界 $\partial\Omega$. Ambrosetti 和 Rabinowitz 证明在下列假设下方程 (1) 有无穷多个解:

(A_1) $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(A_2) 存在 $c > 0$ 和 $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$(当 $N = 1, 2$ 时只需 $p > 1$), 使得

$$|f(x,t) \leqslant c(1 + |t|^p), \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

(A_3) 存在 $\mu > 2$ 和 $M > 0$ 使得

$$0 < F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\mu} t f(x,t), \quad \forall x \in \Omega, |t| \geqslant M,$$

(A_4) $f(x, -t) = -f(x, t)$.

应当指出, 对于更加广泛的椭圆型方程和其他类型的方程也有类似的结果. 条件 (A_4) 是一个对称性条件, 它使得对应的能量泛函成为偶泛函, 使得 Borsuk 定理成为有用的工具. 如果只假设 (A_1)-(A_3), 上述结论对于某些特例仍然成立. 一个例子是 $N = 1$ 的情况, 此时方程是常微分方程; 另一个例子是 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中以原点为中心的球或以原点为中心的两个球面之间的区域, 而 $f(x, u)$ 只依赖于 $|x|$ 和 u, 此时方程本质上还是常微分方程.

一般地, 上述结论在假设 (A_1)-(A_3) 之下是否成立, 是一个长期以来没有解决的问题, 也是非线性分析领域众所熟知的难题, 特别地, 在 2007 年 5 月 20 日至 26 日于南开大学召开的变分方法国际会议上, Rabinowitz 向全体参会者又一次正式提出了这一问题 [6]. 这一问题曾经令国际上许多知名数学家着迷, 许多人猜想应该有肯定的答案, 即在假设 (A_1)-(A_3) 之下方程 (1) 有无穷多个解. 关于这一问题虽然没有最终答案, 但部分结论还是有的. 王志强于 1991 年证明, 在假设 (A_1)-(A_3) 之下, 如果再对 f 在 $t=0$ 附近附加适当条件, 则方程 (1) 至少有 3 个非零解, 这是迄今为止关于此问题最好的结果. 在区域 Ω 包含充分大的球时, T. Bartsch 和 T. Weth 最近证明一个类似方程至少有 5 个非零解, 但是, 要求 Ω 包含充分大的球却是额外附加的条件.

从 20 世纪 80 年代初开始, 为了探寻解决这一问题的思路和方法, A. Bahri, H. Berestycki, P. L. Lions, P. Rabinowitz, M. Struwe, 李树杰, 董光昌等数学家研究与上述问题密切相关的对称方程的扰动, 即

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u + f(x),\ x \in \Omega;\quad u = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

如果关于方程 (1) 的上述问题有肯定答案, 那么对于任何 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $p \in (1, (N+2)/(N-2))$, 方程 (2) 应该有无穷多个解. A. Bahri 和 P. L. Lions 与 1988 年证明, 对于任何 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $p \in (1, N/(N-2))$, 方程 (2) 有无穷多个解. 这是关于方程 (2) 的最好的结果, 能否将区间 $p \in (1, N/(N-2))$ 扩大为 $p \in (1, (N+2)/(N-2))$ 也是一个尚没有解决的问题.

条件 (A_1)-(A_3) 是超线性条件, 下列条件是与其对应的次线性条件:

(B_1) 存在 $\delta > 0$ 使得 $f \in C(\bar{\Omega} \times (-\delta, \delta), \mathbb{R})$,

(B_2) $\lim_{|t|\to 0} F(x,t)t^{-2} = +\infty$,

(B_3) $2F(x,t) > tf(x,t),\ \forall x \in \Omega,\ 0 < |t| \leqslant \delta$.

在假设 (B_1)-(B_3) 之下方程 (1) 是否有无穷多个解, 是与上述问题紧密相关的又一个尚没有解决的问题.

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A, Rabinowitz P. Dual variational methods in critical point theory and applications. J Funct Anal, 1973, 14: 349-381

[2] Bahri A, Lions P L. Morse-index of some min-max critical points, I, applications to multiplicity results. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 1027-1037

[3] Bartsch T, Weth T. Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2005, 22: 259-281

[4] Chang K C. Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems. Progresses in Math No. 6. Boston: Birkhäuser, 1993

[5] Rabinowitz P. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS, No. 65. Amer Math Soc, Providence, 1985

[6] Rabinowitz P, Su J B and Wang Z -Q. Multiple solutions of superlinear elliptic equations. Atti Accad Naz Lincei Cl. Sci Fis Mat Natur Rend Lincei (9) Mat Appl, 2007, 18: 97-108

[7] Wang Z -Q. On a semilinear elliptic equation. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1991, 8: 43-57

撰稿人：刘兆理
首都师范大学

拟线性双曲型方程组由特征向量引发的奇性

Singularity Caused by Eigenvectors for Quasilinear Hyperbolic Systems

考察如下一阶拟线性双曲型方程组的 Cauchy 问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$t=0: u=\varphi(x), \tag{2}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是 (t,x) 的未知向量函数, $A(u)$ 为具有适当光滑元素 $a_{ij}(u)$ $(i,j=1,\cdots,n)$ 的 $n\times n$ 矩阵, 而 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))^{\mathrm{T}}$ 是具有有界 C^1 模的 C^1 向量函数.

由严格双曲型假设, 在所考虑的区域上矩阵 $A(u)$ 具有 n 个互异的实特征值

$$\lambda_1(u)<\lambda_2(u)<\cdots<\lambda_n(u). \tag{3}$$

对 $i=1,\cdots,n$, 设 $l_i(u)=(l_{i1}(u),\cdots,l_{in}(u))^{\mathrm{T}}$(相应地, $r_i(u)=(r_{1i}(u),\cdots,r_{1n}(u))^{\mathrm{T}}$) 为对应于 $\lambda_i(u)$ 的左 (相应地, 右) 特征向量：

$$l_i(u)A(u)=\lambda_i(u)l_i(u)\quad (\text{相应地}, A(u)r_i(u)=\lambda_i(u)r_i(u)). \tag{4}$$

方程组 (1) 可等价地改写为如下的特征形式：

$$l_i(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_i(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{5}$$

由局部 C^1 解的存在唯一性, 必存在适当小的 $\delta>0$, 使得 Cauchy 问题 (1)~(2) 在 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 上存在唯一的 C^1 解 $u=u(t,x)$, 而且一般来说, Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 也只能在 t 的一个局部范围中存在, 即可能存在 $t_*>0$, 使得当 $t\uparrow t_*$ 时,

$$\|u(t,\cdot)\|_1=\|u(t,\cdot)\|_0+\|u_x(t,\cdot)\|_0\quad \text{趋于无界}, \tag{6}$$

其中 $\|\|_0$ 表示 C^0 模. 在式 (6) 成立时, C^1 解 $u=u(t,x)$ 出现奇性, 称为奇性形成或解的破裂.

显然, 若一切特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 及特征向量 $l_i(i=1,\cdots,n)$ 均与 u 无关, 方程组 (1) 或 (5) 就是一个具有常系数的线性双曲组, 其 Cauchy 问题的 C^1 解

$u=u(t,x)$ 必对一切 $t\in \mathrm{R}$ 存在, 而永远不会产生奇性. 因此, 导致 C^1 解奇性形成的原因只能是下述两种情况至少发生其一：① 特征值 $\lambda_i(u)(i=1,\cdots,n)$ 明显地依赖于 u. ② 特征向量 $l_i(u)(i=1,\cdots,n)$ 明显地依赖于 u. 在研究 Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的奇性形成机制时, 必须考虑奇性的形成究竟是由特征值对 u 的依赖性导致的, 还是由特征向量对 u 的依赖性导致的, 抑或由两者联合导致的, 并且考虑其奇性形成的相应形态与特性.

在一切特征向量 $l_i(i=1,\cdots,n)$ 均与 u 无关的情况, 总可设方程组 (1) 为如下的对角型方程组：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(u)\frac{\partial u_i}{\partial x}=0, \quad i=1,\cdots,n. \tag{7}$$

此时 Cauchy 问题 (7) 及 (2) 的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的破裂自然只是由于特征值对 u 的依赖性造成的. 这时可以证明 (参见文献 [1])：

(a) 在奇性发生处, 解 $u=u(t,x)$ 本身总保持有界, 而其一阶偏导数 u_x 趋于无界.

(b) 奇性发生是由于同族特征线的包络造成的, 奇性的发生点即为包络上 t 值最小的那一点.

(c) 对线性退化的方程组, 即对 $i=1,\cdots,n$ 成立

$$\frac{\partial \lambda_i(u)}{\partial u_i}\equiv 0 \tag{8}$$

时, 永远不会发生奇性.

(d) 若第 i 特征 $\lambda_i(u)$ 为线性退化, 则第 i 族特征一直到破裂发生的时刻均不会形成包络.

在初值 $\varphi(x)$ 的 C^1 模充分小并适当衰减时, 即使特征向量可能依赖于 u, 上述这些结论 (a)~(d) 仍然成立 (参见文献 [2]、[3]). 这说明：此时对 Cauchy 问题 (1)~(2) 而言, 其奇性的形成本质上仍是由特征值对 u 的依赖性导致的, 特征向量对 u 的依赖性并未改变奇性形成的基本性态.

但对于任意给定的具有界 C^1 模的初值 $\varphi(x)$, 情况就可能发生本质的变化. 为说明这一点, 考察一切特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 均为常数的情形, 这时, Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 的奇性形成自然只是由于特征向量对 u 的依赖性. A. Jeffrey 曾给出了这样的一个由三个方程构成的方程组, 并揭示了对某些大的初值, 其 C^1 解必在有限时间内破裂 (见文献 [3]). 从此例可以看到, 此时奇性形成将具有完全不同的特点：

(1) 奇性的形成不是由于同族特征线的包络, 而是由于特征向量对 u 的依赖性;

(2) 方程组具有常数特征, 因而线性退化, 但 C^1 解仍可在有限时间内产生奇性;

(3) 在奇性发生处解本身不再保持有界, 从而解本身及其至少一个一阶偏导数同时趋于无界;

(4) 在奇性发生处, 特征向量组将丧失其完备性.

另一方面, 也可以举出一个由三个方程构成的方程组, 其一切特征值均为常数, 而特征向量明显依赖于 u, 但对一切具有界 C^1 模的初值 $\varphi(x)$, 相应的 Cauchy 问题对一切 $t \in \mathrm{R}$ 均具有唯一的整体 C^1 解, 即此时特征向量对 u 的依赖性不引起任何奇性.

这就提出了下面的问题：

(1) 对特征向量关于 u 的依赖性作一个完全的分类：怎样的特征向量会导致 Cauchy 问题 C^1 解的奇性形成, 而怎样的特征向量使相应的 Cauchy 问题永不产生奇性？

(2) 由特征向量引发的奇性具有什么本质上的特性？

在文献 [5]、[6] 中对拟线性双曲型方程组引入了特征向量引发的奇性的概念, 并进行了初步的分析, 但离问题的彻底解决尚相距甚远.

参 考 文 献

[1] Li T T. Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems. Masson/John Wiley, 1994

[2] Li T T, Zhou Y, Kong D X. Global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems with decay intital data. Nonlinear Analysis, TMA, 1997, 28: 1299-1332

[3] Li T T, Kong D X. Breakdown of classical solutions to quasilinear hyperbolic systems, Nonlinear Analysis, TMA, 2000, 40: 407-437

[4] Jeffrey A. Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. London: Pitman Publishing, 1976

[5] Li T T. Mechanism of formation of singlarities for quasilinear hyperbolic systems//Luso-Chinese symposium on nonlinear evolution equations and their applications. Singapore: World Scientific, 1999, 128-139

[6] Li T T, Liu F G. Singularity caused by eigenvectors for quasilinear hyperbolic systems. Commu Partial Diff Eqs, 2003, 28: 477-503

撰稿人：李大潜

复旦大学

欧拉方程整体 L^∞ 弱解的适定性问题

Well-posedness Problem on The L^∞ Weak Solution for Compressible Euler Equations

欧拉方程是流体力学的一个基本的偏微分方程组, 在工程应用中有着广泛的应用. 它由质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律组成, 用来描述没有黏性影响的理想流体的运动, 早在 18 世纪就被人们所熟知. 尽管欧拉方程的历史很悠久, 但是人们对它的了解仍然不多.

欧拉方程属于非线性双曲守恒律方程组. 它的一个重要特点是：即使初值充分光滑, 解的一阶导数一般会在有限时刻爆破, 即出现激波. 激波意味着解不连续, 人们只能在弱解的范畴里来研究欧拉方程. 这个特点给欧拉方程的研究带来极大困难. 从数学上来研究欧拉方程, 一个最基本的问题就是具一般初值的整体弱解的适定性问题, 即整体弱解的存在性、唯一性和稳定性问题. 但即使是这样的一个基本问题, 人们也是直到最近才取得一些重要进展. 如对于一般的严格双曲守恒律方程组, Bressan 等人在 2000 年证明了小 BV 初值的整体 BV 弱解的存在性, 唯一性和稳定性. 但是 Bressan 等人的结果不能推广到大初值的情形. 事实上, 在大初值情形下, 除了一些特殊方程组, BV 空间不是研究非线性双曲守恒律方程组的合适函数空间. 对于大初值情形, 人们尝试在 L^∞ 函数空间里进行研究. 在此情形下, 补偿列紧理论是一个很有用的工具, 人们可以利用它研究双曲守恒律方程组大初值整体 L^∞ 弱解的存在性. 关于这方面的研究现状是：当欧拉方程所描述的流体是多方气体时, 欧拉方程也称为空气动力学方程组, 它有一个重要的简化模型 γ- 律 ($\gamma \geqslant 1$). 当 $\gamma > 1$ 时, 称为等熵流; 当 $\gamma = 1$ 时, 称为等温流. 第一个整体 L^∞ 弱解的存在性结果由 Diperna 在 1983 年给出, 他证明了 $\gamma > 1$ 的一些离散情形; 丁夏畦, 陈贵强和罗佩珠在 1985 年证明了 $1 < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3}$ 的情形; Lions 等人分别在 1994 年和 1996 年证明了 $\gamma \geqslant 3$ 和 $\dfrac{5}{3} < \gamma < 3$ 的情形. 以上结果将等熵流 ($\gamma > 1$) 的整体 L^∞ 弱解的存在性问题予以彻底解决. 在文献 [3] 中证明了等温流 ($\gamma = 1$) 的情形.

但是对于一维欧拉方程, 还有一些基本问题未得到解决. 如以上所述的关于 γ-律方程组的一系列结果只是针对欧拉方程的简化模型, 对于更为重要的完全欧拉方程的大初值整体 L^∞ 弱解的存在性, 目前没有一般结果. 这方面的主要困难在于人们很难证明逼近解有强收敛的子序列. 对于较存在性问题困难得多的大初值弱解

的唯一性和稳定性问题, 迄今没有任何结果. 事实上, 即使对于简化模型 γ- 律方程组的大初值整体 L^∞ 弱解的唯一性问题, 已知结果也是非常少. 据笔者所知, 迄今关于唯一问题最好的结果是 Bressan 等人的唯一性工作. 但 Bressan 等人的结果只适用于小 BV 初值, 人们还不知道在大初值情形下如何研究弱解的唯一性.

对于高维欧拉方程, 除了一些极特殊的初值外, 关于整体弱解的适定性工作几乎是一片空白. 几乎所有对一维问题行之有效的方法在对付高维欧拉方程时都失效. 因为我们生活在三维空间中, 我们最需要研究的恰恰是高维问题. 因此, 高维欧拉方程的数学研究在现在和未来都将是一个极为重要的研究方向.

参 考 文 献

[1] Ding X Q, Chen G Q and Luo P Z. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I),(II). Acta Math Sci, 1985, 5: 483-500, 501-540

[2] Diperna R. Convergence of viscosity method for isentropic gas dynamics. Comm Math Phys, 1983, 91: 1-30

[3] Huang F, Wang Z. Convergence of viscosity solutions for isothermal gas dynamics. SIAM J Math Anal, 2002, 34: 3, 595-610

[4] Lions P L, Perthame B and Tadmor E. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems. Comm Math Phys, 1994, 163: 169-172

[5] Lions P L, Perthame B and Souganidis P. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. Commun Pure Appl Math, 1996, 49(6): 599-638

[6] Nishida T. Global solution for an initial-boundary value problem of a quasilinear hyperbolic systems. Proc Jap Acad, 1968, 44: 642-646

[7] Nishida T, Smoller J. Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws. Commun Pure Appl Math, 1973, 26: 183-200

[8] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994

撰稿人：黄飞敏
中国科学院数学与系统科学研究院

趋化性模型解的行为与模式形成问题

Pattern Formation and Behavior of Solutions to Mathematical Models of Chemotaxis

趋化性 (chemotaxis) 是指生物个体 (如细菌、昆虫) 或生物组织 (如细胞、血管) 对化学物质的运动型反应. 例如, 接近食物 (称为正向趋化性) 或逃离有害物质 (称为负向趋化性). 1970 年, E.F. Keller 和 L.A.Segel[2] 通过宏观分析, 建立了描述阿米巴 (amoebae) 趋化性现象的第一个数学模型 (也就是 Keller-Segel 模型):

$$\frac{\partial a}{\partial t} = Q - \nabla \cdot (D_1 a \nabla s) + \nabla \cdot (D_2 \nabla a), \tag{1}$$

其中增殖率 Q、趋化率 D_1 和扩散率 D_2 都是未知变量 a, s 的函数. 取 $Q \equiv 0$, $D_1 = \delta/s$(δ 是常数), $D_2 = \mu$ 为常数, 得到

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial \ln(s)}{\partial x}\right) \tag{2}$$

(这里省略了聚集素及其降解酶 (acrasinase) 和降解产物的反应扩散方程组),

其中 a 表示阿米巴的密度, s 是聚集素 (acrasin) 的浓度. 这个模型成功地描述了阿米巴在聚集素影响下的聚集现象, 引起了人们的关注, 并开创了对这类细菌趋化性现象的研究领域, 出现了大量的研究成果 (见文献 [3]~[5]).

20 世纪 90 年代末, H.Othmer 和 A.Stevens[6] 在微观分析中, 利用有后效的随机行走 (reinforced random walking) 方法, 提出了几种改进型的趋化性模型, 后称为 Othmer-Stevens 模型, 并论证了微观模型和宏观模型的一致性. 他们还引进了解的聚集、爆破、坍塌行为的数学定义, 即: 设 $a(x,t)$ 是 (1) 关于初值 $a_0(x)$ 的解,

(1) 若 $\liminf_{t\to\infty} \|a(\cdot,t)\|_{L_\infty} > \|a_0(\cdot)\|_{L_\infty}$, 且 $\|a(\cdot,t)\|_{L_\infty}$ 有界, 则称之为**聚集** (aggregation);

(2) 若当 $t \to T$ 时, $\|a(\cdot,t)\|_{L_\infty}$ 无界, 则称之为**爆破** (blow-up), T 称为爆破时刻;

(3) 若 $\limsup_{t\to\infty} \|a(\cdot,t)\|_{L_\infty} < \|a_0(\cdot)\|_{L_\infty}$, 则称之为**坍塌** (collapse).

H.A.Levine, B.D.Sleeman 和 M.Nilson-Hamilton[7] 在这些基础上提出了如下描述血管生长的趋化性数学模型:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\frac{a}{\Phi(s)}\right)\right)\right), \quad \frac{\partial s}{\partial t} = R(a,s), \tag{3}$$

其中 a 表示毛细血管的密度, s 表示影响血管生长的化学物质的浓度,$\Phi(s) > 0$. 令 $Q \equiv 0$, $D_1 = \dfrac{\Phi'(s)}{\Phi(s)}$,$D_2 = 1$, 则由 (1) 可得到方程 (3). 他们的工作开创了细胞趋化性数学模型的研究领域, 这方面的工作还可见文献 [1],[8]~[10].

聚集和坍塌是趋化性模型最重要的特征. 细菌聚集形成群落才能生成, 细胞聚集形成组织才起作用. 所以说, 能描述聚集和坍塌现象的数学模型才是合理的趋化性模型. 于是, 可以提出如下的两个问题:

问题 1 增殖率 Q、趋化率 D_1 和扩散率 D_2 为哪些类型的函数时, 解可能会出现聚集、爆破和坍塌现象?

问题 2 当这些函数类型确定后, 函数的参数在什么范围内, 解会出现聚集、爆破和坍塌行为?

后者可以称为趋化性模型的参数分析, 前者可以称为趋化性模型的非参数分析.

在生物学方面的困难是现有的生物化学技术尚无法测定数学模型中的参数. 现在的研究是先对构想的模型进行理论分析和数值模拟, 再将理论分析或数值模拟的结果与观察到的实际现象进行比较, 取比较接近的模型来开展生物学研究. 另外, 无论在细菌趋化性方面, 还是在细胞趋化性方面, 不同背景下的问题就需要不同的模型来描述. 所以, 尽管这方面已经有很多研究结果, 但仍然还有许多问题值得去深入研究.

在数学上, 描述这些数学模型的主方程为拟线性二阶发展方程, 其研究在数学上的困难主要表现在以下两个方面: ①所研究问题的类型随着系数函数和控制方程的变化, 在抛物-椭圆耦合型, 抛物-双曲耦合型和抛物-抛物耦合型中变化; ②所涉及的方程组是强耦合的, 这就使得许多经典的数学方法用不上了. 目前对空间维数为 1 时的情形无论是从理论上还是在数值模拟上已有一些好的结果, 但对高维时的情形这方面的研究尚有许多空白, 读者可从所列的参考文献中得到更多的了解.

因此, 对这个问题的研究, 不光在生物学和医学方面具有重要的应用意义, 同时也会推动非线性偏微分方程理论的发展.

参 考 文 献

[1] Anderson A R A. Mathematical models of angiogenesis. http://www.maths.dundee.ac.uk/"sanderso/angiocont.htm

[2] Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J Theor Biol, 1970, 26: 399-415

[3] Hillen T. Mathematical models for chemotaxis. http://www.math.ualberta.ca/"thillen /chemo.html

[4] Horstmann D. From 1970 until present:The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I. Jahresberichte der DMV, 2003, 105: 103-165

[5] Horstmann D. From 1970 until present:The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II. Jahresberichte der DMV, 2004, 106: 51-69

[6] Othmer H G, Stevens A. Aggregation, blowup, and collapse: the ABC's of taxis in reinforced random walks. SIAM J Appl Math, 1997, 57: 1044-1081

[7] Levine H A, Sleeman B D, Nilsen-Hamilton M. Mathematical modeling of the onset of capillary formation initiating angiogenesis. J Math Biol, 2001, 42: 195-238

[8] Levine H A, Sleeman B D. A system of reaction diffusion equations arising in the theory of reinforced random walks. SIAM J Appl Math, 1997, 57: 683-730

[9] Sleeman B D, Levine H A. Partial differential equations of chemotaxis and angiogenesis. Math Methods Appl Sci, 2001, 24: 405-426

[10] Yang Y, Chen H and Liu W. On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction-diffusion equations modelling chemotaxis. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 763-785

撰稿人：陈 化 刘伟安
武汉大学

声波和电磁波反散射问题的唯一性

Uniqueness in Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Problems

声波和电磁波的反散射问题起源于第二次世界大战中雷达和声纳的发明和使用. 人们发射声波或电磁波, 并对散射波进行远场测量, 以此反演出未知散射体的位置、形状、材料参数以及其他一些感兴趣的物理信息. 现今, 同样的测量方法被广泛使用于国防工业、地质勘探、无损探测、医疗成像等领域. 对数学而言, 所涉及的是偏微分方程 (PDE) 的反问题, 这类问题一般有以下形式：给定一个 PDE 以及方程解 u 的一些信息 (基于实际应用考虑, 这些信息应较容易通过测量得到, 比如边界值或无穷远处的渐近行为等), 以此反演出 PDE 中的一些未知信息, 如系数、定义域, 甚至模型本身. 就反散射问题而言, 我们假设波是不可穿透散射体的, 即散射波场仅存在于散射体外面. 针对此种散射体的反散射问题称作*障碍反散射问题*. 以声波散射为例, 人们一般采用时间调和的平面波 $u^i=\exp\{\mathrm{i}kx\cdot d\}$ 为入射场, 这里 $k>0$ 为波数, $d\in\mathbb{S}^{n-1}$ 为入射方向. 我们定义 u^s 为散射场, 它仅存在于散射体的外部 D^c, 此时 PDE 模型为赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程

$$(\Delta+k^2)u=0 \quad 在\ D^c\ 中, \quad u=u^s+u^i, \quad \lim_{|x|\to\infty}|x|^{(n-1)/2}\left(\frac{\partial u^s}{\partial|x|}-\mathrm{i}ku^s\right)=0.$$

显然, 我们还需在散射体的边界 ∂D 上给出合适的边界条件. 如果散射体是声软的 (sound-soft), 我们有 $u|_{\partial D}=0$; 而当散射体是声硬的 (sound-hard), 我们有 $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial D}=0$. 我们还可以考虑所谓的*阻抗边界条件* (impedance boundary condition), $\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\lambda u\right)|_{\partial D}=0$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\lambda\geqslant 0$, 或者更一般的混合边界条件. 散射场在无穷远处有如下渐近表示:

$$u^s(x)=\frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(n-1)/2}}\left\{u_\infty(\hat{x})+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad 当\ |x|\to\infty.$$

$u_\infty(\hat{x})$ 被称为远场, 这里 $\hat{x}$ 为单位向量, 表示观测方向. 反散射问题即是以 $u_\infty(\hat{x})$ 来反推边界 ∂D. 此时一个自然的问题就是：*我们可不可以用 $u_\infty(x)$ 来反演推出 ∂D? 要用多少观测数据才能真正反演出 ∂D?* 在数学上, 我们需要提出如下的问题：

唯一性问题:

$$\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_\infty(\hat{x}) \quad 是不是一个 1\text{-}1 映射?$$

或者, 应用多少个平面波所产生的远场, 可以使得 $\mathcal{F}$ 是一个 1-1 映射?

注意到在 $\mathbb{R}^n$ 中, $u_\infty(\hat{x})$ 定义于一个 $n-1$ 维的流形上 (即单位球面), 而 ∂D 也是一个 $n-1$ 维的流形, 即未知的 ∂D 和测量数据 $u_\infty(x)$ 依赖于一样多的参数. 故而, 人们普遍地认为, 针对任一固定 (或至多 n 个) 入射波而得到 u_∞, 可以唯一地确定 ∂D, 即 $\mathcal{F}$ 是一个 1-1 映射. 这个问题从提出至今已有 50 余年, 但仍未被完全解决. Schiffer, Lax 和 Phillips 借助于 Laplace 算子的谱理论得到了第一个唯一性结果：无穷多平面波所产生的远场可以唯一地确定一个声软的散射体. Kirsch 和 Kress 借助 Isakov 发展出的一种新理论 —— 奇异源场方法, 得到了 应用无穷个平面波产生的远场可以唯一确定一个声硬散射体的结果. Liu 和 Zou 近年来发展出一种新的方法 —— 路径 (path) 论证法, 可以得到只需一个或 n 个平面波的唯一性结果, 但这种论证方法只适用于散射体是一般多面体的情形. 对一般的散射体, 我们有如下问题：

问题 1 对一般的散射体, 使用一个或最优 (有限) 多个入射波是否可以建立相应的唯一性?

这里应该指出, 除了散射体的形状和位置, 其他的一些信息也具有非常重要的现实意义, 比如散射体的物理性质：声软、声硬还是阻抗类型, 阻抗系数等. 另外当散射体由多个物体组成时, 如何确定每一个物体的形状、位置、物理性质等等, 这些问题基本上还没有得到解决. 如果入射波为时间调和的电磁波, 则相应的 PDE 模型为时间调和的 Maxwell 方程

$$\nabla \times E^s - \mathrm{i}kH^s = 0, \quad \nabla \times H^s + \mathrm{i}kE^s = 0 \quad 在\ D^c\ 中.$$

这里, E^s 和 H^s 为针对某些入射电磁场的散射电场和磁场. 当然, 为了使上述方程完备, 我们仍需 (在 ∂D 上和无穷远处) 给定相应的边界条件. E^s 和 H^s 有相应的远场 E_∞ 和 H_∞, 而反散射问题即是以 E_∞ 或 H_∞ 来反演出散射体本身. 与声波场的反散射问题完全类似, 我们也有相应的唯一性问题. 上述声波场反散射问题中的不同的方法都可以推广到用来解决电磁波反散射中的类似的唯一性问题. 这里, 同声波的反散射一样, 我们也有类似的未解决的问题.

上面声波和电磁波的障碍反散射可以说是相应领域里最基本的问题, 它们的解决方法对相关领域其他问题具有非常重要的指导作用. 比如, 相应的论证方法已被推广至解决其他问题, 如光纤光栅反问题中的唯一性问题等. 更为重要的是, 众所周知, 反散射问题是非线性的, 而且在 Hadamard 意义下是不适定的, 所以, 唯一性结果对数值反演算法具有非常深远的影响, 往往一个类型的唯一性结果会引导出一

个相应的新型算法. 比如, Kirsch 和 Kress 的唯一性结果直接导致了现今非常重要和高效的一类反演算法 ——线性抽样方法.

如果波是可穿透散射体的, 即散射波场也存在于散射体内部, 针对此种散射体的反散射问题称作介质反散射问题. 以声波散射为例, 此时 PDE 模型为

$$(\Delta + k^2 q(x))u = 0 \quad 在\ \mathbb{R}^n\ 中, \quad u = u^s + u^i, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{(n-1)/2}\left(\frac{\partial u^s}{\partial |x|} - \mathrm{i}ku^s\right) = 0,$$

这里 $q(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp}(q-1) \Subset \mathbb{R}^n$ 被称为折射率, 而这时的反散射问题即是以远场来反演折射率. 通常, 人们会采用 $u_\infty(\hat{x}, d)$ 作为反演之观测数据, 即针对一个固定入射频率但分别具有不同入射方向的远场数据. 注意到 $q(x)$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的函数, 这样多的观测数据是必须的 (虽然在 $\mathbb{R}^3$ 的情形下还可改进). 可以证明, 这样的远场测量等价于散射体边界的 DtN(Dirichlet-to-Neumann) 测量. 基于 Uhlmann-Sylvester 发展出的构造特殊的复几何光学解的方法, 这个反散射问题的唯一性问题已被解决. 我们指出, 这种证明方法近年来已在应用数学和基础数学中多个方向得到了长足的应用和发展, 比如也被用来证明电磁场介质反散射问题中相应的唯一性问题, 此时 PDE 模型为相应的 Maxwell 方程

$$\nabla \times E - \mathrm{i}k\mu H = 0, \quad \nabla \times H + \mathrm{i}k\varepsilon E = 0,$$

其中, μ, ε 即为需要反演的散射体的材料参数. 我们假定散射体是各向同性的, 即 $\mu(x)$ 和 $\varepsilon(x)$ 为标量函数, 而且 $\mu - 1, \varepsilon - 1$ 都具有紧支集.

在实际应用中, 有时人们只需知道散射体的形状和位置已足够. 对于此介质反散射问题, 也就是需要反演出 $\mathrm{supp}(q-1)$(或 $\mathrm{supp}(\mu-1)$、$\mathrm{supp}(\varepsilon-1)$), 显然此时已无需如此多的远场测量. 为此可以提出如下问题:

问题 2 可不可以使用一个或最优 (有限) 多个入射波的远场数据来唯一地确定 $\mathrm{supp}(1-q)$ (或相应的, $\mathrm{supp}(\mu-1)$、$\mathrm{supp}(\varepsilon-1)$)?

进一步有我们也可以提出这样的问题:

问题 3 当散射体是分片常数时, 可不可以使用一个或最优 (有限) 多个入射波来建立相应的唯一性?

这些未解决的问题均具有重要理论意义和实际应用价值, 读者可从参考文献中进一步深入探究下去.

参 考 文 献

[1] Bao G, Zhang H and Zou J. Unique determination of periodic polyhedral gratings. preprint, 2008

[2] Colton D. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory//Inside Out: Inverse Problems and Applications, edt. Gunther Uhlmann, MSRI Publications. Cambridge: Cambridge University Press 2003

[3] Colton D, Coyle J and Monk P. Recent developments in inverse acoustic scattering theory. SIAM Rev, 2000, 42: 369-414

[4] Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998

[5] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1998

[6] Lax P D, Phillips R S. Scattering Theory. New York: Academic Press, 1967

[7] Liu H Y, Zou J. Uniqueness in an inverse acoustic obstacle scattering problem for both sound-hard and sound-soft polyhedral scatterers. Inverse Problems, 2006, 22: 515-524

[8] Liu H Y, Zou J. On uniqueness in inverse obstacle scattering problems. J Physics: Conference Series, 2008, to appear

[9] Ola P, Päivärinta L and Somersalo E. An inverse boundary value problem in electrodynamics. Duke Math J, 1993, 70(3): 617-653

[10] Sylvester J, Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Ann Math, 1987, 125: 153-169

[11] Uhlmann G. Developments in inverse problems since Calderón's foundational paper// Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Chicago: University of Chicago Press, 1999, 295-345

撰稿人：[1] 刘宏宇 [2] 邹 军

1 华盛顿大学

2 香港中文大学

椭圆算子的谱渐近以及韦尔-贝里 (Weyl-Berry) 猜想

Spectral Asymptotics of Elliptic Operators
and The Weyl-Berry Conjecture

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, 我们考虑如下的 Dirichlet-Laplace 算子的特征值问题：

$$(P) \qquad \begin{cases} -\triangle u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

则问题 (P) 有离散谱 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 并且可以排为一列：

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots ,$$

这里 $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

我们感兴趣的问题是 Ω 的哪些几何量是谱不变的 (也就是说由谱 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 唯一决定的). 这方面的问题依赖于去研究当 $k \to +\infty$ 时, 特征值 λ_k 的渐近行为. 对 $\lambda > 0$, 定义

$$N(\lambda) = N(\lambda, -\triangle, \Omega) = \sharp\{j \mid \lambda_j \leqslant \lambda\}$$

为 Dirichlet counting 函数. 由于 $N(\lambda_k) = k$, 故而研究 λ_k 的渐近行为等价于去研究 counting 函数当 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近行为.

这方面的第一个结果是 H. Weyl[1] 给出的：

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|_n\lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{1}$$

这里 ω_n 为 n 维单位球的体积, $|\Omega|_n$ 为 Ω 的 n 维 Lebesgue 测度 (Ω 的体积). Weyl 的结果给出了 $N(\lambda)$ 的第一项渐近, 并表明 Ω 的体积 $|\Omega|_n$ 是谱不变量. 所谓 Weyl 的猜想是指：

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|_n\lambda^{n/2} - C_n|\partial\Omega|_{n-1}\lambda^{(n-1)/2} + o(\lambda^{(n-1)/2}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{2}$$

这里 $C_n = \left[4(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(1 + \dfrac{n-1}{2}\right)\right]^{-1}$. 此猜想给出了 $N(\lambda)$ 的第二项渐近, 同时表明除了 Ω 的体积 $|\Omega|_n$ 外, 其边界的面积 $|\partial\Omega|_{n-1}$($n-1$ 维 Lebesgue 测度) 也是谱不变量.

1980 年, R. Melrose 和 V. Ja. Ivrii 利用微局部分析技巧分别独立地证明了在光滑边界满足一定的充分条件下 (现在习惯上称之为是 Ivrii 条件, 见文献 [3]), Weyl 猜想 [1] 成立. 但 Ivrii 条件是一类微局部分析意义下的条件, 在应用时不易去直接验证它, 故而我们有如下的问题:

问题 1 是否可以找到可直接验证的充分条件, 使得 Weyl 猜想成立? 是否可以找到使得 Weyl 猜想成立的充分和必要条件?

Kac 在文献 [2] 中对一类特殊的区域 Ω, 证明了 $N(\lambda)$ 的第三项渐近式的系数同 Ω 的连通分支的个数有关, 即在这种特殊情形下, 区域的连通分支数也是谱不变量. 那么我们的第二个问题为:

问题 2 对一般的区域 Ω, 除了其体积 $|\Omega|_n$ 和边界面积 $|\partial\Omega|_{n-1}$ 外, 还有 Ω 的哪些几何量是谱不变量?

注解 1 这个问题最早是在 1910 年由物理学家 H. A. Lorentz 提出的, 但他提出的问题不到两年就被 Weyl[1] 解决了. 有意思地是, 等 Weyl 的结果发表了几十年后, 人们才发现 Weyl 的第一项渐近同早期量子力学中的 Sommerfeld 量子化条件是殊途同归的, 只不过数学上的结果比之物理上的结论早了许多年, 这也是科学史上的一段趣话.

注解 2 从证明 $N(\lambda)$ 的第一项渐近到证明 $N(\lambda)$ 的第二项渐近 [1], 人们经过了近 70 年的历程. 这里面涉及许多位著名数学家的工作 (见文献 [2], [3]), 由此可见这个问题的难度. 另外若将问题 (P) 中的边界条件改为 Neumann 边界条件, 则渐近式 [1] 第二项的符号应改为“+”.

1979 年, 英国物理学家 M. V. Berry[4,5] 在研究光波在分形物体上的散射问题时, 将 Weyl 的猜想推广到了 Ω 为分形区域的情形, 这时 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集但具分形边界 $\partial\Omega$. 接下来文献 [6] 的结果又将 Berry 当年在 Hausdorff 框架下提出来的猜想修正到应该是在 Minkowski 框架下成立, 即在假定 $\partial\Omega$ 为 δ-Minkowski 可测的条件下有如下的 Weyl-Berry 猜想:

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|_n\lambda^{n/2} - C_{n,\delta}\mu(\delta,\partial\Omega)\lambda^{\delta/2} + o(\lambda^{\delta/2}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{3}$$

这里 $\delta \in (n-1, n)$ 为 $\partial\Omega$ 的 Minkowski 维数, $\mu(\delta,\partial\Omega)$ 为 $\partial\Omega$ 的 δ 维 Minkowski 测度, $C_{n,\delta} > 0$ 为仅依赖于 n 和 δ 的常数. Weyl-Berry 猜想 [1] 表明, 对分形的区域 Ω, 除了其体积 $|\Omega|_n$ 外, 其分形边界的 Minkowski 测度也是谱不变量.

1993 年, Lapidus-Pomerance[7] 证明了一维的 Weyl-Berry 猜想是成立的, 但对高维的 Weyl-Berry 猜想, 情形变得非常复杂. 文献 [8] 中证明了高维的 Weyl-Berry 猜想在 Minkowski 框架下一般不再成立, 但文献 [9] 中又证明了对一类特殊的高维例子, Weyl-Berry 猜想在 Minkowski 框架下又是成立的. 这一切表明利用

Minkowski 框架并不能全部涵盖问题的所有复杂性, 故而 Weyl-Berry 猜想的正确提法应该为：

问题 3 是否存在某一个分形框架, 使得边界 $\partial\Omega$ 在此分形框架下是可测的, 同时 Weyl-Berry 猜想在此分形框架下是成立的?

注解 3 Berry 当年的猜想还包括假定区域 Ω 本身为分形区域的情形, 这时在 Ω 上已经不能直接定义微分算子, 但人们可以用差分方法或者 Dirichlet 形式来定义 Laplace 算子, 从而来计算它的特征值. 问题的关键是如何证明 Ω 的分形维数和分形测度是谱不变量. 当然这类问题较之上述的问题 3 来说难度将更大, 目前我们在这方面仅有某些简单情形的研究 (见文献 [10]).

参 考 文 献

[1] Weyl H. Das asymptotische verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen. Math Ann, 1912, 71: 441-479

[2] Kac M. Can one hear the shape of a drum? Am Math Monthly, 1966, 73(4): 1-23

[3] Vassiliev D. Asymptotics of the spectrum of a boundary value problem. Trudy Moscow Math Obsch, 1986, 49: 167-237

[4] Berry M V. Distribution of modes in fractal resonators. Structural Stability in Physics, 1979, 51-53

[5] Berry M V. Some geometric aspects of wave motion: wavefront dislocations, diffraction catastrophes, diffractals, geometry of the Laplace operator. Proc Symp Pure Math, Vol 36, Providence, RI: Am Math Soc 1980, 13-38

[6] Brossard J. Carmona R. Can one hear the dimension of a fractal? Commun Math Phys, 1986, 104: 103-122

[7] Lapidus M L, Pomerance C. The Riemann zeta-function and the one-dimensional Weyl-Berry conjecture for fractal drums. Proc London Math Soc, 1993, 66(3): 41-69

[8] Chen H, Sleeman B D. Fractal drums and the n-dimensional modified Weyl-Berry conjecture. Comm Math Phys, 1995, 168: 581-607

[9] Levitin M, Vassiliev D. Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals. Proc London Math Soc, 1996, 72(3): 188-214

[10] Kigami J, Lapidus M L. Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on P. C. F. self-similar sets. Comm Math Phys, 1993, 158: 93-125

撰稿人：陈 化

武汉大学

线性退化的拟线性双曲型方程组不会导致激波形成?

Is There No Shock Formation for Quasilinear Linearly Degenerate Hyperbolic Systems?

考察一阶守恒率拟线性双曲型方程组的 Cauchy 问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=g(u), \tag{1}$$

$$t=0: u=\varphi(x), \tag{2}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是 (t,x) 的未知向量函数, $f(u)=(f_1(u),\cdots,f_n(u))^{\mathrm{T}}$ 及 $g(u)=(g_1(u),\cdots,g_n(u))^{\mathrm{T}}$ 是具有适当光滑元素的向量函数, 而 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))^{\mathrm{T}}$ 是具有有界 C^1 模的 C^1 向量函数.

由严格双曲型假设, 在所考虑的区域上 $f(u)$ 的 Jacobi 矩阵 $A(u)=\nabla f(u)$ 有 n 个相异的实特征值

$$\lambda_1(u)<\lambda_2(u)<\cdots<\lambda_n(u). \tag{3}$$

对 $i=1,\cdots,n$, 设 $r_i(u)=(r_{1i}(u),\cdots,r_{ni}(u))^{\mathrm{T}}$ 为对应于 $\lambda_i(u)$ 的右特征向量:

$$A(u)r_i(u)=\lambda_i(u)r_i(u). \tag{4}$$

由 C^1 解的局部存在唯一性, 必存在适当小的 $\delta>0$, 使得 Cauchy 问题 (1)~(2) 在 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 上存在唯一的 C^1 解 $u=u(t,x)$, 且对于给定的方程组 (1), δ 可选择得仅依赖于 φ 的 C^1 模:

$$\delta=\delta(\|\varphi\|_1). \tag{5}$$

另一方面, Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u=u(t,x)$ 一般来说只能在 t 的一个局部范围中存在, 从而可存在 $t^*>0$, 使得当 $t\uparrow t^*$ 时

$$\|u(t,\cdot)\|_1=\|u(t,\cdot)\|_0+\|u_x(t,\cdot)\|_0 \quad 趋于无界, \tag{6}$$

其中 $\|\|_0$ 表示 C^0 模. 出现这样的情况, C^1 解 $u=u(t,x)$ 出现奇性, 称为奇性形成, 或解的破裂.

在 (6) 式成立时, 有两种可能发生的情况:

(i) 在 $t \uparrow t^*$ 时, $\|u(t,\cdot)\|_0$ 保持有界, 而 $\|u_x(t,\cdot)\|_0$ 趋于无界. Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ t = 0 : u = \varphi(x) \end{cases} \tag{7}$$

就属于这一情况. 此时, 在奇性的发生处, 同族特征线发生包络, 而 u_x 趋于无界, 导致开始形成方程 (7) 的一个激波. 因此, 这一种奇性称为激波形成或几何奇性.

(ii) 在 $t \uparrow t^*$ 时, $\|u(t,\cdot)\|_0$ 趋于无界, 从而 $\|u_t(t,\cdot)\|_0$ 及 $\|u_x(t,\cdot)\|_0$ 中至少有一个也趋于无界. Riccati 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u^2, \\ t = 0 : u = \varphi(x) \end{cases} \tag{8}$$

就属于这一情况. 这种奇性称为ODE 奇性.

在方程组 (1) 为线性退化的特殊情况, 即在所考察的区域上

$$\nabla\lambda_i(u)r_i(u) \equiv 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{9}$$

的情形, 通常认为：若此时 Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u = u(t,x)$ 在有限时间内破裂, 则必为 ODE 奇性, 而不可能导致激波形成 (参见文献 [1]、[2])

为了证明这个猜测, 可化为建立如下的性质：对于任意给定的 $T_0 > 0$, 在 Cauchy 问题 (1)~(2) 的 C^1 解 $u = u(t,x)$ 的任意给定的存在区域 $0 \leqslant t \leqslant T(0 < T < T_0)$ 上, 若成立

$$\|u(t,\cdot)\|_0 \leqslant C_1(T_0), \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

其中 $C_1(T_0)$ 为与 T 无关但可能与 T_0 有关的正常数, 则必成立

$$\|u_x(t,\cdot)\|_0 \leqslant C_2(T_0), \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

其中 $C_2(T_0)$ 为与 T 无关但可能与 T_0 有关的正常数. 这就将这一猜测的证明化为对解进行先验估计的问题.

在 (1) 为对角型方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \mu_i(u) \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{12}$$

的特殊情况, 此时线性退化条件 (9) 化为

$$\frac{\partial \lambda_i(u)}{\partial u_i} \equiv 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)\ , \tag{13}$$

不难证明上述性质, 从而这一猜测成立 (参见文献 [3]).

对于比式 (12) 更为一般一些的双曲型方程组, 也同样可证明上述性质, 从而这一猜测成立 (见文献 [4]). 对一般形式的方程组 (1), 在初值 $\varphi(x)$ 的 C^1 模充分小且具一定衰减性时, 这一猜测仍然成立 (参见文献 [5]、[6]), 但对任意给定的具有有界 C^1 模的初值 $\varphi(x)$ 能否证明这一猜测成立, 或可以举出反例, 仍是一个悬案, 需要认真考虑.

参 考 文 献

[1] Majda A. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[2] Brenier Y. Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations. Arch Rat Mech Anal, 2004, 172: 65-91

[3] Li T T. Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems. Masson/Wiley, 1994

[4] Li T T, Peng Y J and Yang Y F, Zhou Y. Mechanism of the formation of singularities for quasilinear hyperbolic systemes with linearly degenerate characteristic fields. Math Meth Appl Sci, 2008, 31: 193-227

[5] Li T T, Zhou Y and Kong D X. Weak linear degeneracy and global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems. Commu Partial Diff Eqs, 1994, 19: 1263-1317

[6] Li T T, Zhou Y and Kong D X. Global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems with decay intital data. Nonlinear Analysis, TMA, 1997, 28: 1299-1332

撰稿人：李大潜
复旦大学

薛定谔 (Schrödinger) 方程中的孤立子猜想

The Solution Resolution Conjection in Schrödinger Equations

Schrödinger 方程是量子力学中描述微观粒子运动的一个基本方程, 随着调和分析等分析工具的使用, 人们对 Schrödinger 方程及相关非线性问题解的性质有了更深刻的认识. 例如, 解是否存在, 解的长时间行为研究, 爆破解的波振面刻画及爆破速率研究等等. 此处详细介绍其中的公开问题之一.

Erwin Schrödinger 在 1926 年导出了用以描述微观粒子运动的 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = 0, \tag{1}$$

这里, $u(t,x)$ 称之为波函数, 它是定义在 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^d$ 的复函数, 其平方 $|u(t,x)|^2$ 可以解释为粒子在 t 时刻, 出现在 x 处的概率. 因而解满足如下的质量守恒:

$$\int |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x = \int |u(0,x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Schrödinger 方程是色散波方程的一种. 所谓色散波方程, 指的是具有不同波长 (或频率) 的平面波具有不同的传播速度, 随着时间的演化, 这些平面波分离开来, 解因此变得越来越弥散. 这一点和抛物方程有本质的不同, 满足抛物方程的任何平面波的振幅随时间指数衰减, 直至完全消失.

自由 Schrödinger 方程的基本解是复 Gauss 核卷积:

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi \mathrm{i}t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathrm{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\mathrm{d}y.$$

容易看出, 尽管质量不随时间变化, 解满足如下的局部衰减估计:

$$\lim_{t\to\infty} \int_K |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x = 0, \tag{3}$$

这里, K 是 R^d 上任意一个紧集. 这意味着质量将被色散到越来越大的区域中使得当时间趋于无穷时, 在任何有限区域所捕捉到的质量趋于 0.

以上说明, 色散 (或弥散) 是 Schrödinger 方程解的一种典型的长时间行为. 但这不是全部的情形, 事实上, 有的解长时间以后并不色散, 而是呈现出一种“孤立子”的行为. 为此, 考虑具有位势项的 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}u_t + \Delta u + V(x)u = 0$. 为

简单起见假设 $V(x)$ 是 Schwartz 函数, 并使得初值问题有唯一的整体光滑解. 此时 (某些) 位势项的存在会破坏解的色散效应. 事实上, 如果能找到如下椭圆方程的解

$$-\Delta\psi + V\psi = -E\psi,$$

那么, $e^{-\mathrm{i}Et}\psi(x)$ 就是相应方程的解. 这个解不具有式 (3) 意义下的色散行为, 与之相反的, 此解的质量密度 $|u(t,x)|^2$ 不随时间变化而变化. 这种解称为定态解. 通过定态解之间的线性叠加或者定态解和散射解的线性叠加, 也可以构造出其他不具有散射行为的解.

以上说明, 对于具有位势项的线性 Schrödinger 方程来说, 定态和散射态是可能的两种解. 反过来, 著名的“RAGE”(Ruelle, Amrein-Georgescu, Enss) 定理说明, 这是唯一可能的两种情形, 所有的解都可唯一地分解为一个定态和散射态. 这个定理的证明依赖于对 Hamiltonian 算子 $-\Delta + V$ 详尽的谱分析：粗略地说, 定态解对应于该算子的点谱, 强色散解对应于该算子的绝对连续谱. 因此,“RAGE”定理在方程的动力学行为和算子谱理论之间建立了本质的联系.

不管是通过寻找基本解或是借助于谱理论, 人们对线性 Schrödinger 方程解的性质有相当的理解. 但是当考虑非线性问题时, 情况就发生了根本的变化. 考虑如下描述多个粒子系统的立方 Schrödinger 方程：

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = \pm|u|^2 u. \tag{4}$$

$\pm$ 对应于粒子间两种不同的相互作用力, $+$ 表示粒子间 (如电子) 相互排斥, 称为“散焦”; $-$ 表示粒子间 (如光子) 相互吸引, 称为“聚焦”. 式 (4) 初值问题解的整体存在性本身就是一个很大的研究课题, 这里暂不讨论. 而是关心如果已知解整体存在, 解的长时间行为如何? 比如, 解是否有类似式 (3) 的散射行为? 抑或是渐进孤立子态?

答案在某些特殊的情况下是非常清楚的. 比如：当初值非常小的时候, 非线性项的作用可以忽略, 问题可被视为自由 Schrödinger 方程的扰动, 因此解整体存在并有式 (3) 意义下的散射行为. 借助于某些分析工具 (例如 Morawetz 估计), 散焦问题在某些假设下也可被证明是散射的. 而在聚焦情形, 方程存在形如 $e^{-\mathrm{i}t}Q(x)$ 的定态孤立子解, 这里 Q 是椭圆方程

$$\Delta Q - Q + |Q|^2 Q = 0$$

的唯一径向对称正解. 由定态孤立波出发并利用方程在 Galilean 变换下不变的性质, 我们还可以造出行波孤立子解. 类似于“RAGE”定理, 我们猜想即使对于非线性问题, 这是所有可能存在的渐近态. 更确切地说, 我们有如下问题：

孤立子猜想 对非线性 Schrödinger 方程 (4), 大部分的初值, 只要对应的解整体存在, 当时间充分大以后, 都可以分解为彼此互相远离的有限孤立子解加上一个散射部分.

这里要求时间充分大是因为解的短时间行为通常都非常复杂, 比如孤立子碰撞、孤立子湮没为散射波或更小的孤立子, 这些都已在计算上观察到. 这个猜想仅在一维的情形有满意的答案, 并且能从数学上严格定义何为“大部分”的初值. 在一维情形立方 Schrödinger 方程是完全可积的, 因此解可以通过“逆散射”的方法计算出来. 只要初值使得相关的 Lax 算子没有重特征根或共振子, 相应的孤立子猜想就成立.

基于一维的结果, 我们希望孤立子猜想在高维空间也成立, 但目前还没有任何系统且能采用非常有效的方法来证实. 首先, 问题的提法就需要更精确化, 与一维情形不同的是, 高维没有类似于“Lax”算子之类的可以把那些“额外”的初值挑出来. 形象地说现有的分析手段是针对最坏情形, 因此不可能得到一个对“大部分”情形成立的这么一个结论.

目前, 针对孤立子猜想仅有极少数的工作, 比如 Terence Tao 在文献 [7,8] 中证明了：三维散焦问题径向对称整体解, 若能量一致有界, 可以渐近分解为一个散射态, 加上一个“弱定态”它与任何散射态都渐近正交. 如果考虑 5 维平方散焦非线性 Schrödinger 方程, 则可得到更强的结论：这个弱定态是几乎周期的, 它的轨道落在能量空间的一个固定紧集中, 因此解可以看作是一个“色散的紧吸引子”. 表面上, 这个问题划归成一个动力系统的问题, 但由于对这个吸引子几乎没有任何的了解, 接下来如何做还不是很清楚.

最后, 值得指出的是比起孤立子猜想, 具有多项式增长的非线性问题的整体存在性和散射问题是近年来研究较为集中的课题. 特别是在能量临界、质量临界问题的研究上取得了显著的进展, 相关的文献可参见 [1] ~ [6]、[9]、[10].

参 考 文 献

[1] Bourgain J. Global well-posedness of defocusing 3D critical NLS in the radial case. J Amer Math Soc, 1999, 12: 145-171

[2] Colliander J, Keel M, Staffilani G, Takaoka H and Tao T. Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in R^3. to appear in Annals of Math

[3] Kenig C, Merle F. Global well-posedness, scattering, and blowup for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. Invent Math, 2006, 166: 645-675

[4] Killip R, Li D, Visan M and Zhang X. Characterization of minimal-mass blowup solutions to the focusing mass-critical NLS. preprint, math.ap/0804.1124

[5] Killip R, Visan M. The focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in dimensions five and higher. preprint, math.ap/0804.1018

[6] Killip R, Tao T and Visan M. The cubic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions with radial data. preprint, math.ap/0707.3188

[7] Tao T. On the asymptotic behavior of large radial data for a focusing non-linear Schrödinger equation. Dynamics of PDE, 2004, 1: 1-48

[8] Tao T. A (concentration-)compact attractor for high-dimensional non-linear Schrödinger equations. Dynamics of PDE, 2007, 4: 1-53

[9] Tao T, Visan M and Zhang X. Minimal-mass blowup solutions of the mass-critical NLS. to appear in Forum Mathematicum

[10] Tao T, Visan M and Zhang X. Global well-posedness and scattering for the mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions. Duke Math J, 2007, 140: 165-202

撰稿人：张晓轶
中国科学院数学与系统科学研究院

一类二阶完全非线性偏微分方程的格林 (Green) 函数

Green Functions for A Class of Second Order Fully Nonlinear Partial Differential Equations

假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开区域, u 是定义在 Ω 上的一个光滑函数, u 的 Hessian 矩阵为 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 对于 $1 \leqslant m \leqslant n$, 定义复 Hessian 算子为

$$H_m(u) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}. \tag{1}$$

则 $H_1(u) = \dfrac{1}{4} \triangle u$ 以及 $H_n(u) = \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$ 是复的 Monge-Ampère 算子. 一个光滑函数 u 被称为 m- 次调和的 (也记为 $u \in \mathscr{P}_m$), 若对任意的 $A \geqslant 0$, 有

$$H_m(u + A|z|^2) \geqslant 0. \tag{2}$$

通过光滑函数逼近, 使 $\mathscr{P}_m$ 中也包括非光滑函数. 称 $u \in \mathscr{D}_m$, 若存在一个正则的 Borel 测度 μ 以及一个单调下降的光滑函数序列 $\{u_j\} \subset \mathscr{P}_m$ 使得 $H_m(u_j) \to \mu$, 并且记为 $H_m(u) = \mu$.

不难验证下列函数

$$G_m(z) = \begin{cases} -|z|^{2-\frac{2n}{m}}, & 若 \ \ m < n, \\ \log|z|, & 若 \ \ m = n \end{cases} \tag{3}$$

是复 Hessian 算子 H_m 的基本解, 即 $H_m(G_m) = \delta_0$. 而实的 Hessian 算子 (在 $\mathbb{R}^n$ 上) 的基本解则是

$$g_m(x) = \begin{cases} -|x|^{2-\frac{n}{m}}, & 若 \ \ m < \dfrac{n}{2}, \\ \log|x|, & 若 \ \ m = \dfrac{n}{2}, \\ |x|^{2-\frac{n}{m}}, & 若 \ \ m > \dfrac{n}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

对于 $z_0 \in \Omega$, 考虑下列 Dirichlet 问题,

$$\begin{cases} u \in \mathscr{D}_m, \\ H_m(u) = \delta_{z_0}, \\ u(z) = cG_m(z - z_0) + o(1), \quad \text{当} \quad z \to z_0, \quad c > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{5}$$

在文献 [5] 中, L.Lempert 对于 Monge-Ampère 方程 (即 $m = n$) 证明了如下的定理:

定理 [5] 假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n(n > 1)$ 的有界严格凸的解析区域, φ 是一个实值解析函数. 则 Dirichlet 问题 (5) 存在唯一的解析解 $u : \bar{\Omega} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

注 文献 [5] 中的证明是一个完全几何性的证明, 全纯变换是其基本工具. 此外在 z_0 点处奇异性的阶的控制也是一个必要条件, 否则存在很多奇怪的解.

现在提出以下的几个问题:

1. 给出以上 L.Lempert 的定理的一个分析性的证明, 并且弱化其条件, 比如仅假设 Ω 是拟凸的以及 φ 是有限光滑的. 因为此时方程是完全非线性退化椭圆方程并且带奇异性, 现在已知的非线性分析方法对解决这一难题可能已经不够用了.

2. 对于复的 Hessian 算子 H_m 证明类似的定理. 当 $m = 1$ 时结果是已知的, 当 $m = n$ 时也有 L.Lempert 的结果, 因此自然需要考虑当 $1 < m < n$ 时的情形, 这时可能仅用几何方法是不够的.

3. 对于实的 Hessian 算子也考虑类似的问题, 这时的问题较之复的情形应该更加困难.

4. Hessian 算子 H_m 是有几何意义的, 给出上述奇异解的一个几何解释, 也是非常有意义的问题.

此问题的重要性除了是由线性算子的 Green 函数向完全非线性算子的一个自然推广外, 去研究关于非线性算子的 Dirichlet 问题在指定点有可控奇性的解的存在性和唯一性, 也是 PDE 分析的一个非常有意义的问题.

参 考 文 献

[1] Bedford E, Taylor B A. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. Invent Math, 1976, 37: 1-49

[2] Błocki Z. Weak solutions to the complex Hessian equation. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2005, 55: 1735-1756.

[3] Caffarelli L, Kohn J J, Nirenberg L and Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère and uniformly elliptic equations. Comm Pure Appl Math, 1985, 38(2): 209-252

[4] Trudinger N S, Wang X J. Hessian measures, II. Ann of Math, 1999, 150(2): 579-604

[5] Lempert L. Solving the degenerate complex Monge-Ampère equation with one concentrated singularity. Math Ann, 1983, 263: 515-532

撰稿人：[1] 徐超江 [2] 陈 化

1 法国 Rouen 大学

2 武汉大学

AdS/CFT 对应中的可积性

The Integrability of AdS/CFT Corresponding

AdS/CFT 对应猜测是当今弦理论研究中最重要的课题之一. 它的一个广为人知的表述是：在 Anti-de-Sitter(AdS) 时空中的超弦理论与其边界上的超共形场论的大 N 极限等价. 这个对应关系包含有极其丰富的物理：它充分体现了量子引力理论中的全息原理; 它实现了大 N 极限下的规范理论是弦理论这一人们探索多年的物理思想; 它包含了弦理论中开闭弦间的对偶关系. 对此关系的研究也涉及丰富的数学物理问题：可积性、超引力解的构造、矩阵模型等, 其中可积性是一个重要和广泛关注的问题.

以最著名的 $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{SYM}_4$ 为例来说明问题. 在此情况下的对应关系表述为在 $\mathrm{AdS}_5\mathrm{xS}^5$ 空间中的超弦理论与四维 $N=4$ 超对称规范理论等价. 在弦理论方面, 所定义的二维 σ- 模型是两个陪集流形的直积, 已经证明此 σ- 模型是经典可积的. 这意味着我们可以通过平坦流来构造无穷多个守恒核, 由此通过代数曲线来构造各种经典弦解. 这些经典弦通过 AdS/CFT 对应关系与超对称规范理论中的单迹算子链相关：弦的能量应该等同于算子链的反常量纲. 而在场论方面, 算子链的反常量纲的计算涉及量子修正问题, 通常是很难求解的, 只能按圈做微扰计算. 非常有趣的是对于 $N=4$ 超对称规范理论, 由于理论具有最大超对称性, 反常量纲矩阵可以与可积自旋链的哈密顿量等同. 换句话说, $N=4$ 超对称规范理论是可积的. 更具体地说, 在单圈水平, 反常量纲矩阵可与有最近邻相互作用的可积自旋链对应, 而在双圈水平, 可与有包含次近邻相互作用的可积自旋链对应. 然而在三圈水平, 此对应关系不再成立, 其中的原因还不清楚. 人们普遍相信 $N=4$ 超对称规范理论是量子可积的, 也提出了相应的渐进 Bethe 方程, 并检验了其正确性. 对此规范理论量子可积性的深入研究是一个弦理论研究的热门课题.

另一方面, 弦理论已被证明是经典可积的, 那么其可积性在量子水平上还保持吗? 对此问题的回答牵涉到弦理论在 $\mathrm{AdS}_5\mathrm{xS}^5$ 空间中的量子化问题, 是 AdS/CFT 对应关系研究中尚未解决的核心问题. 尽管如此, 人们基于对 AdS/CFT 对应的深入理解倾向于认为量子可积性仍然保持.

毫无疑问, 可积性的研究已经极大地促进了对 AdS/CFT 对应关系的研究, 对其更深入的研究和探索将帮助我们解开 AdS/CFT 对应背后的秘密.

参 考 文 献

[1] Aharony et al. Large N field theories, string theory and gravity. Phys Rept, 2000, 323:183-386

[2] Beisert N. The Dilatation operator of N=4 super Yang-Mills theory and integrability. Phys Rept, 2005, 405:1-202

[3] Bena I, Polchinski J and Roiban R. Hidden symmetries of the AdS_5xS^5 superstring. Phys Rev, 2004, D69: 046002

撰稿人：陈　斌
北京大学

Donaldson 不变量和 Seiberg-Witten 不变量的关系

The Relation Between The Donaldson Invariant and Seiberg-Witten Invariant

Donaldson 理论是数学家 Donaldson 在 20 世纪 80 年代通过高能物理中的规范理论的思想来研究四维紧致定向光滑 Riemann 流形上的微分结构的数学理论 [1]. 该理论是回归数学和物理相互影响的传统的一个光辉典范, 它无论是在思想上还是在技巧上都具有划时代的贡献. 模空间的思想开始在数学中具有越来越重要的地位, 它启示了很多数学进展, 如 Gromov-Witten 不变量理论等. 粗略地讲, Donaldson 不变量是定义在瞬子模空间上的积分. 因为模空间的非线性特征, Donaldson 不变量的计算十分困难.

1988 年 Witten 将 Donaldson 不变量纳入拓扑量子场论的范畴: 它们是拓扑扭曲的 $N = 2$ 超对称杨 -Mills 理论的关联函数 (correlation functions).

几年后, 在理论物理中, Seiberg 和 Witten[2] 发现 $N = 2$ 超对称杨-Mills 理论的物理, 如起关键作用的预势 (Seiberg-Witten prepotential), 可以由代数曲线的周期 (periods) 完全刻画. 这就是所谓的 Seiberg-Witten 几何理论, 该代数曲线被称为 Seiberg-Witten 曲线. 这个理论相对来得简单, 可以用来研究 Donaldson 不变量, 在物理上已经有很多这方面的研究.

不久, Seiberg-Witten 理论在数学上被严格建立起来. Donaldson 理论中的许多定理都很快很容易地利用该理论重新得到了证明, 并且解决了很多 Donaldson 理论中的困难猜想.

这两大理论之间的关系从物理上看很自然, 它和对偶 (duality) 现象密切相关, 物理学家认为他们应该是等价的, 这在物理文献中有很多讨论 [3]. 从数学上看, 两者之间的关系至今仍然十分神秘, Nakajima[4] 等在此方向已经取得一些重要进展, 但距离问题的解决还很远.

可以预期的是该问题的解决对于理解物理中的对偶原理、规范理论和超弦理论的关系, 以及数学中的 Langlands 纲领都将有重要影响.

参 考 文 献

[1] Donaldson S K, Kronheimer P B. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Oxford University Press, 1990

[2] Seiberg N, Witten E. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory. Nuclear Physics B, 1994, 426: 19-25; Erratum, Nuclear Physics B, 1994, 430: 485-486

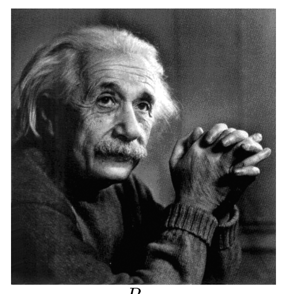
[3] Nekrasov N. Seiberg-Witten prepotential from instanton counting. hep-th/0206161.

[4] Nakajima H, Yoshioka K. Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. Inventiones Mathematicae, 2005, 162: 313-355

撰稿人：孙善忠
首都师范大学

爱因斯坦 (Einstein) 场方程的数学研究

The Mathematical Study of Einstein's Field Equations



$R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=\lambda T_{ij}$

爱因斯坦

从数学的角度来看, 广义相对论的中心任务之一就是研究 Einstein 场方程的存在性问题和对奇点进行系统的分析. 这是一个有关张量的非线性双曲型方程组的研究, 是极其困难的数学问题 (关于广义相对论的介绍, 可参见文献 [1]).

对于真空 Einstein 场方程, Minkowski 解是平凡解. 物理学家们找到了很多非平凡特解, 如描述静态黑洞的 Schwarzschild 解、描述稳态旋转黑洞的 Kerr 解等. 从偏微分方程的观点来看, Minkowski 解就是在 R^3 上给定某个度量 g_0 和一个相伴的二阶对称张量 h_0 作为初始数据集, 在 g_0 平坦, h_0 恒为零时作为真空 Einstein 场方程的初值解出一个 4 维时空使得 h_0 为 (R^3, g_0) 在时空里的第二基本形式. 在 1993 年 Christodoulou 和 Klainerman 的先驱性工作中, 他们证明当非平凡初值 g_0 非常接近平坦, h_0 非常接近零, 并且迹 (trace) 为零时, 真空 Einstein 场方程存在光滑的渐近平坦、整体双曲和测地完备的解 [2]. 这就是所谓 Minkowski 时空的整体非线性稳定性. Minkowski 时空稳定性后来又被 Lindblad 和 Rodnianski 用调和坐标方法重新证明 [3,4]. 这些都是困难而深刻的结果.

自然的问题是: 如果初始数据集有内边界, 也就是说在 $\mathrm{R}^3\backslash\Omega$ 上给定非平凡 g_0 和 h_0, 这里 Ω 是 R^3 中的一个紧集, 当 Ω 满足什么拓扑、几何条件以及 g_0、h_0 在边界 $\partial\Omega$ 上满足什么条件时, Einstein 场方程的 (内) 边值问题依然有光滑的渐近平坦、整体双曲和测地完备的解? 与其相关的是所谓 Schwarzschild 时空的整体非线性稳定性问题: 如果边界 $\partial\Omega$ 是一个表观视界 (apparent horizon), 即 $\partial\Omega$ 的平均曲率和 h_0 限制在 $\partial\Omega$ 的迹在相差一个符号的意义下相等, 在什么条件下 Einstein 场方程有保持表观视界的渐近平坦、整体双曲的真空解, 在表观视界外是光滑和测地完备的? 根据迷向坐标 (isotropic coordinates) 下的 Schwarzschild 解的表达形式, 可以推测此时解在表观视界上一定退化.

再进一步, 如果 Ω 是一个星体, 则需要在 Ω 上求解非真空的 Einstein 场方程. 这时, 如何在数学上研究清楚 Ω 上的内部解和 $\mathrm{R}^3\backslash\Omega$ 上的外部解的拼接, 则是一个

重要的问题. 这涉及广义相对论中星体演化的数学理论. 在一些理想条件下对静态星体演化的研究源于 1939 年 Oppenheimer 和 Snyder 的经典论文 [5]. 他们发现不少强引力塌缩过程中独特的物理现象, 如黑洞视界的形式、由于引力红移导致的外部观测者观测到的塌缩冻结等. 首次从理论上比较严格的刻画了星体塌缩为黑洞的过程. 但是, 一个公开而困难的问题是：如果星体是旋转的, 如中子星, 其演化的数学理论如何建立？关于该问题的相关资料可参见文献[6]、[7].

最后, 近年来天文观测表明宇宙在加速膨胀. 更具有现实意义的是将上述研究推广到带正宇宙常数的 Einstein 场方程.

参 考 文 献

[1] Hawking S, Ellis G. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press, 1973

[2] Christodoulou D, Klainerman S. The Global Nonlinear Stability of The Minkowski Space. Princeton: Princeton University Press, 1993

[3] Lindblad H, Rodnianski I. Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates. Communications in Mathematical Physics, 2005, 256: 43-110

[4] Lindblad H, Rodnianski I. The global nonlinear stability of the Minkowski space-time in harmonic gauge. Annals of Mathematics, to appear

[5] Oppenheimei J R, Snyder H. On continued gravitational contraction. Phys Rev, 1936, 56: 455

[6] Kramer D, Stephani H and Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1980

[7] Islam J N. Rotating Fields in General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

撰稿人：张 晓

中国科学院数学与系统科学研究院

Gromov-Witten 不变量的 Virasoro 猜想

Virasoro Conjecture for Gromov-Witten Invariants

Gromov-Witten 不变量是受 Gromov 关于辛几何伪全纯曲线的工作和 Witten 关于弦理论拓扑 sigma 模型的工作的启发而产生的. 这些不变量的严格数学定义依赖于田刚、阮永宾和李竣等的奠基性工作. Kontsevich 和 Manin 对 Gromov-Witten 不变量进行了公理化研究. 简略地说, Gromov-Witten 不变量大致上是紧致辛流形中伪全纯曲线的个数. 更严格的定义是建立在稳定映照模空间的交叉理论上. 除了在辛几何和弦理论中的重要应用外, Gromov-Witten 不变量在代数几何中也有非常重要的应用. 它可以用来计算代数流形中全纯曲线的个数. Gromov-Witten 不变量理论为这个领域的发展起了实质性的推动作用. 另外, Taubes 证明了在四维紧致辛流形上规范场理论中的 Seiberg-Witten 不变量和这些流形的基本 Gromov-Witten 不变量是等价的.

Virasoro 猜想是 Gromov-Witten 不变量理论中最重要的未解决问题之一. 这个猜想是由物理学家 Eguchi, Hori 和 Xiong 提出的 (见文献 [2]). S. Katz 对这个猜想做了一些必要的修改. 这个猜想说代数流形上 Gromov-Witten 不变量的生成函数满足一个无穷序列的偏微分方程. 这些偏微分方程的算子满足 Virasoro 代数标准生成元素的括号积关系. 事实上这些算子生成 Virasoro 代数的上半枝. 大家熟知很多可积系统 (例如 Gelfand-Dickey 梯队和 Toda 梯队) 的一些 tau 函数满足类似的性质. 因此, Virasoro 猜想对于理解 Gromov-Witten 不变量和可积系统之间的关系至关重要. 另外, 代数几何中的一些著名猜想是这个猜想的特例. 最简单的情形是所考虑的辛流形只是一个点. 在这种情形下 Virasoro 猜想和著名的 Witten 猜想是等价的. 当所考虑的辛流形是一个点的时候, Gromov-Witten 不变量实际上是稳定曲线模空间上某些示性类的相交数. Witten 的猜想是说这些相交数是由可积系统中 KdV 梯队来控制的 (见文献 [7]). 更确切地说, 这些相交数的生成函数是 KdV 梯队的 tau 函数. Witten 猜想最早由 Kontsevich 证明 (见文献 [3]). 对一般的代数流形来说, Virasoro 猜想是计算 Gromov-Witten 不变量的一个非常有效的工具. 如果一个代数流形具有半单量子上同调, Dubrovin 和张友金证明了高亏格的 Gromov-Witten 不变量可由 Virasoro 猜想和零亏格的 Gromov-Witten 不变量决定 (见文献 [1]).

对 Virasoro 猜想的研究已经有很多进展, 详情可参看综述文献 [4]. 最近 Tele-

man 声称他关于 2D 半单上同调场论的分类工作可以推出具有半单量子上同调流形的 Virasoro 猜想 [6]. 这一工作还有待于进一步验证. 应该指出的是：大部分代数流形的量子上同调并不是半单的. 关于非半单情形下的 Virasoro 猜想的结果还非常少. 除了已知零亏格的 Virasoro 猜想对所有紧致辛流形都成立外 (见文献 [5]), 只有亏格一和亏格二情形下的一些部分结果 (见文献 [4]). 因此, Virasoro 猜想的完全解决似乎仍然遥遥无期.

参 考 文 献

[1] Dubrovin B, Zhang Y. Normal forms of hierarchies of integrable PDEs,Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants. math.DG/0108160

[2] Eguchi T, Hori K and Xiong C. Quantum cohomology and Virasoro algebra. Phys Lett B, 1997, 402: 71–80

[3] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix airy function. Comm Math Phys, 1992, 147: 1-23

[4] Liu X. Gromov-Witten invariants and moduli spaces of curves. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006, 2: 791–812

[5] Liu X, Tian G. Virasoro constraints for quantum cohomology. Journal of Differential Geometry, 1998, 55: 537–591

[6] Teleman C. The structure of 2D semi-simple field theories. preprint arXiv:0712.0160

[7] Witten E. Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. Surveys in Diff Geom, 1991, 1: 243–310

撰稿人：刘小博

University of Notre Dame

KZB 方程

Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard Equation

二维量子场论中最重要的模型之一是所谓的 Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) 模型, 有的文献亦称之为 Wess-Zumino-Witten(WZW) 模型. WZNW 模型的作用量为非线性 σ 模型的作用量加上 Wess-Zumino(WZ) 项, 即

$$S_{WZNW}=\frac{k}{8\pi}\int_{\Sigma}\mathrm{d}^2x\mathrm{Tr}(\partial_i g\partial_i g^{-1})+\frac{k}{12\pi}\int_{B_3}\mathrm{d}^3y\varepsilon^{ijk}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_i gg^{-1}\partial_j gg^{-1}\partial_k g),$$

其中三流形 B_3 的边界为二维黎曼流形 Σ,ε^{ijk} 是三阶全反对称张量, k 为正整数是量子化的要求. WZNW 模型是一类最重要的二维共形场理论, 其重要之处在于, 它同时具有仿射李代数 (即 Kac-Moody 代数); Virasoro 代数和 W 代数等共形对称性, 这些都是无穷维对称性.

KZ 方程最初是由 V.Knizhnik 和 A.Zamolodchikov 于 1984 年给出的, 他们在研究群流形上 WZNW 模型时得到此方程. KZ 方程是 WZNW 模型的最高权向量之张量积的 intertwining 算子满足的自洽条件. 所以, KZ 方程的本质是一个表示论问题. D. Bernard 于 1988 年将 V.Knizhnik 和 A. Zamolodchikov 的结果推广到更一般的黎曼面上, 即所谓 KZB 方程. 事实上, KZ 方程的最初表现形式是 WZNW 模型的初级场, 即所谓的共形块所构成的多点函数应满足的微分方程. 由共形场理论知道, 四点或四点以上的函数构成 KZB 方程的非平凡解. 而群流形 G 上 WZNW 模型的初级场由 G 相应的仿射李 (Kac-Moody) 代数 $\hat{g}$ 的最高权向量 (顶点算子,VOA) 给出, 故求解 KZB 方程就转化为无限维 Kac-Moody 代数的不可约表示空间求迹 (trace) 问题. 事实上, 共形块是群流形丛上的全纯截面. 原则上, KZB 方程具有无限多个解. 在数学上, KZB 方程将李代数, 顶点算子代数 (vertex operator algebra)、表示论、黎曼几何等分支紧紧联系在一起. 另一方面, KZB 方程又与余切丛上的经典可积的 Hamiltonian 系统, 即 Hitchin 方程密切相关, KZB 算子等价于丛上的射影平联络, 此时联络可以表述成热核算子：

$$\nabla^{\mathrm{KZB}}=(k+h^{\vee})\frac{\partial}{\partial_\tau}+B.$$

第一项的微分沿 Teichmüller 空间, 而 B 是黎曼 Σ 上平 G 丛模空间的二阶微分算子. 这里 G 是紧致的单李群, $h^{\vee}$ 是 G 对应的仿射李代数 $\hat{g}$ 的对偶 Coxeter 数, 而 k 则是相应仿射李代数表示的级. 显然, KZB 方程是热核方程的推广, 而热核方程

在指标定理中是至关重要的. 一种自然的设想是, KZB 方程可以用来研究相应的指标定理.

对 KZB 方程的研究, 已经发现了超几何函数, Macdonald 多项式、表示论、可积系统以及代数曲线之间诸多深刻而内在的联系.

若将上述经典问题量子化, 即将上述的微分算子变成差分算子, 就得到对应的量子化问题. 量子 KZB 问题的解, 涉及量子多体问题、量子群、量子代数和相关的表示论.

研究经典 KZB 方程以及相应的量子 KZB 方程, 必将对相关学科的研究产生重要的影响.

参 考 文 献

[1] Francesco P Di, Mathieu P and Senechal D. Conformal Field Theory. New York: Springer-Verlag, 1997

[2] Knizhnik V, Zamolodchikov A. Current algebras and Wess-Zumino model in two dimensions. Nucl Phys B, 1984, 247: 83

[3] Bernard D. On the Wess-Zumino-Witten model on the torus. Nucl Phys B, 1988, 303: 77

[4] Bernard D. On the Wess-Zumino-Witten model on Riemann surfaces. Nucl Phys, 1988, 309: 145

[5] Hitchin N. Stable bundles and integrable systems. Duke Math Journ, 1987, 54: 91

[6] Etingof P, Frenkel I and Kirillov A. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolo-
dchikov equations. Rhode Island: AMS, 1998

[7] Varchenko A. Special functions, KZ type equations, and representation theory. Rhode Island: AMS, 2003

撰稿人：丁祥茂
中国科学院数学与系统科学研究院

带通量的弦真空和紧化与广义复几何

Flux Compactification in Strings and Generalized Complex Geometry

自从弦理论第一次革命以来, 紧化问题就一直在弦理论研究中占据着一个很重要的地位. 紧化问题物理上的目标是从超弦能自洽地运动的十维时空出发得到四维的现实物理, 比如说从弦理论中产生出最小超对称标准模型, 其实质是研究弦真空态的性质. 对这个问题的研究在物理和数学上都产生了很多重要的结果, 而带通量的紧化则是近年来这方面的最新进展.

带通量的紧化在物理上的初始目标是解决所谓的弦真空稳定性问题. 即为所有的模场 (其真空平均值对应于模空间参数) 产生一个势, 根据这个势可以确定其唯一的真空平均值 (势的极小值), 从而得到唯一、稳定的物理真空, 而非由一组模场真空平均值表示的连续谱. 数学上, 它的研究催生了各种新的 “广义” 几何结构.

弦的真空态可以通过两个迥然不同却又密切相关的方法来研究. 一个是弦的低能有效理论 —— 超引力; 一个是弦的微扰展开 ——2 维世界片弦论. 粗略地可以说, 超引力方法可以用来研究弦真空态的 “经典” 性质, 而世界片方法则可在此基础上用来研究其 “量子性质”.

超引力方法适合寻找新的弦理论解, 近年来发现了很多新的真空态. 它们可以用所谓广义复结构来刻画. 为研究紧化, 我们需要研究广义 Calabi-Yau 流形的模空间及其上面的几何. 它是 Kahler 流形, 并构成所谓特殊几何. 近年来, 人们构造了许多新的解并用于紧化的研究. 这些结果可应用于研究黑洞吸引机制、规范场与弦理论的对偶和前述的真空稳定性等问题.

而世界片的描述与超引力解是互补的. 与超引力解的经典性质相反, 世界片弦论通常包含了弦的量子效应, 能反映目标时空几何的量子性质. 一个超引力的解必须找到对应的世界片的描述才能被看作一个完整的弦论解. 世界片弦论往往与代数及表示论也发生深刻的联系. 因为世界片弦论是一个 2 维共形场论, 低能物理中的场可以看成是顶点算子, 它们之间的相互作用正好就是顶点算子的代数. 一个共形场论所携带的代数结构可以为它提供精确的定义以及计算方法. 这对了解弦真空态的相关性质非常重要.

此外, 世界片弦论也为 D 膜提供了精确的描述. D 膜是 R-R 流通量的源, 同时在同调镜对称中扮演了关键性的角色. 它的最漂亮也是最严格的描述是通过带边界的世界片弦论以边界共形场论的形式给出, 而后者同样也具备丰富的几何与代数

的内涵. 广义几何中的 D 膜解是其中一个有代表性的例子.

世界片理论将目标空间 (时空) 的性质与 2 维流形联系起来. 因此, 其中出现的“量子几何”可能同时包含了两个本来没有关系的“经典空间”. 这样通常会产生丰富有趣的几何问题, 镜像对称就是其中最著名的例子. 对于“广义”的弦真空, 也会存在镜像对称等对偶. 近年来在把镜像对称推广到扩充的弦真空方面有不少研究. 广义 Kahler 流形是个研究这类“广义”镜像对称的合适框架. 它有两个广义复结构, 镜像对称可能就是交换这两个广义复结构. 如何建立起扩充弦真空流形上的镜像对称, 并构造出包括所有 R-R 态和 NS-NS 态的弦真空的模空间的对偶是个富有挑战性的问题. 对于杂弦理论, 带通量的真空态最初是由 Strominger 导出的. 近年来丘成桐教授与合作者系统构造了许多新的解并用于紧化. 对于扩充的弦真空, 也会有对偶. 这些对偶的研究是十分有意义的.

参 考 文 献

[1] Hitchin N. Generalized Calabi-Yau manifolds. Q J Math, 2003, 54(3): 281∼308
[2] Gualtieri M. Generalized complex geometry. Oxford University D Phil thesis. math.DG /04011212.
[3] Jr Gates S J, Hull C M and Rocek M. Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear sigma models. Nucl Phys B, 1984, 248: 157
[4] Grana M, Minasian R, Petrini M and Tomasiello A. Generalized structures of N=1 vacua. JHEP, 11:020, 2005. hep-th/0505212.
[5] Becker K, Becker M and Schwarz J. String Theory and M-Theory: A Modern Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
[6] Grana M, Louis J and Waldram D. Hitchin functionals in N=2 supergravity. 2005. hep-th/0505264.
[7] Strominger A. Superstrings with torsion. Nuclear Physics B, 1986, 274(2):253-284

撰稿人: 胡 森 殷 峥
中国科学技术大学

量子杨-米尔斯 (Yang-Mills) 千禧问题

Quantum Yang-Mills Millenium Prize Problem

量子 Yang-Mills 千禧问题又称量子 Yang-Mills 场的存在性和质量间隙问题, 即：

证明 对于任意的、紧的单群 G, 在 R^4 上存在以 G 为规范群的有质量的量子 Yang-Mills 场, 并且有质量间隙 $\Delta > 0$.

量子力学将一个粒子的位置和速度视为作用在一个 Hilbert 空间的非交换算子 [1]. 场用来描述很多自然现象, 例如：Maxwell 方程中的电场和磁场, Einstein 方程中的引力场等等. 规范理论中的规范势, 数学上描述为主从上的联络, 与基本粒子及其相互作用有密切关系. 一个典型例子是电磁理论, 其规范群是阿贝尔交换群 $U(1)$. 如果电磁势 A 记作 $U(1)$ 联络, 局部可看作时空中的 1 形式, 曲率或电磁场张量 F 是 2 形式, 无源的 Maxwell 方程是 $0 = \mathrm{d}F = \mathrm{d} * F$, 这里 $*$ 是 Hodge 共轭算子. 无源的 Maxwell 方程可以描述大范围的电场和磁场.

Yang-Mills 理论是非阿贝尔规范理论, 在经典意义下类似于 Maxwell 理论, 它以更一般的紧规范群 G 代替了 $U(1)$ 群, 无源 Maxwell 方程则推广为无源 Yang-Mills 方程：$0 = \mathrm{d}_A F = \mathrm{d}_A * F$, 能从无源 Yang-Mills 场的 Lagrangian 变分导出：

$$L = \frac{1}{4g^2} \int \mathrm{Tr}(F' * F), \tag{1}$$

这里 Tr 是指群 G 的 Lie 代数上的不变二次型. 无源 Yang-Mills 方程是非线性方程, 一般情况下, 不可精确求解. 无源 Yang-Mills 方程与无源 Maxwell 方程类似, 在经典情况下描述以光速传播的无质量经典场. 因为 Lagrangian(1) 中没有质量项, 否则, 这些场在规范群作用下, 就不是不变的 [2].

在解释场和粒子的相互作用时, 必须应用量子场论的概念. 在 20 世纪 50 年代, Maxwell-Dirac 场的量子化 —— 量子电动力学 (QED)—— 给出了费米场及其量子 (电子、正电子、质子、中子等) 通过电磁场及其量子 (光子) 相互作用的经典和量子性质非常精确的描述. 在时空不同位置时, 电场的分量就成了非交换的算子, 当构造这些算子所作用的 Hilbert 空间时, 传统的粒子, 例如电子被重新解释为 Dirac 场的量子化, 场与粒子之间的差别消失了.

作为电磁场的非阿贝尔对应物, Yang-Mills 场是否在描述自然界其他相互作用力时, 有同样重要的作用? 特别是对于弱相互作用与强相互作用. 但是由于弱相互

作用与强相互作用都不是长程力, 因此它们都可能与有质量粒子相联系. 然而, 经典 Yang-Mills 场是无质量的, 这对于将 Yang-Mills 场应用于描述其他相互作用是一个严重的障碍.

在 20 世纪 60~70 年代, 对于弱相互作用, 上述困难被克服了. 建立了以 $U(2)\times U(1)$ 为规范群的 Weinberg-Salam-Glashow 弱电统一理论 [3,4]. 对于经典 Yang-Mills 场的零质量问题, 通过引入一个附加的 "Higgs 场" 来解决. 该场是时空流形上的一个标量场, 在规范群 $U(2)\times U(1)$ 的作用下按该群的两分量表示变化, 其真空态的非零渐近常值将规范群约化为 $U(1)$ 子群 (对角地嵌入 $U(2)\times U(1)$), 以某种统一的方式描述了电磁力与弱相互作用力. 由于存在上述从 $U(2)\times U(1)$ 到 $U(1)$ 的约化, 因而只有电磁力是长程力, 弱作用则由具有质量的粒子来描述, 这与事实相符.

强相互作用的 Yang-Mills 场的零质量性问题不能用 "对称破缺" 方法解决. 物理学家猜想, 量子 Yang-Mills 场, 即对应于上述经典作用量的量子场, 有可能解决这一问题.

量子 Yang-Mills 理论是否能成功地解释强相互作用 "质量间隙" 的量子性质是关键. 这要求, 在经典意义下, 以光速传播, 场没有质量; 而量子的粒子则有正的质量, 即必须存在正数 Δ, 使得任意激发态的能量必须不小于 Δ, 从而保证核力是相互作用很强的短程力. 依赖于这个理论存在 "夸克禁闭", 即虽然理论是以夸克即 $SU(3)$ 的非平凡表示为基本场, 但物理粒子态 —— 如质子、中子和 π 介子 —— 都必须是 $SU(3)$ 不变的, 这能够解释为什么我们观测不到单个的夸克.

"质量间隙" 和 "夸克禁闭" 为物理学家在实验中观察到, 并由计算机模拟所验证 [5], 但从数学理论角度上如何加以理解尚不清楚. 因此, 建立和证明量子 Yang-Mills 场的存在性和质量间隙问题, 是一个非常艰巨的问题, 是所谓的 "千禧问题" 之一, 需要从物理和数学及其结合, 引入新的思想才能取得突破性的进展.

参 考 文 献

[1] Neumann J Von. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1955

[2] Yang C N, Mills R L. Phys Rev, 1954, 95: 631

[3] Salam A. Weak and electromagnetic interactions, pp.367-377 in Svartholm: Elementary particle theory, proceedings of The Nobel Symposium held in 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm 1968

[4] Weinberg S. A model of leptons. Phys Rev Lett, 1967, 19: 1264–1266

[5] Creutz M. Monte Carlo, study of quantized SU(2) gauge theory. Phys Rev D, 1980, 21: 2308-2315

[6] Jaffe A, Witten E. Quantum Yang-Mills theory. 美国 Clay 数学研究所网站, 1997

[7] Douglas M R. Report on the status of the Yang-Mills millenium prize problem. 美国 Clay 数学研究所网站, 2004

撰稿人：[1] 王世坤　[2] 吴　可
1 中国科学院数学与系统科学研究院
2 首都师范大学

量子极小模型猜测

Quantum Minimal Model Conjecture

量子极小模型猜测是近年来量子物理与几何相互作用的产物. 该猜测希望揭示 20 世纪 90 年代出现的 Gromov-Witten 不变量与经典代数几何中的极小模型理论之间的联系, 是非常困难的数学问题 (关于 Gromov-Witten 不变量的介绍可参见文献 [1]; 关于极小模型理论的介绍可参见文献 [2]).

20 世纪 80 年代, 英国皇家学会会长、三一学院 (Trinity College) 院长 (牛顿曾任首任院长)Atiyah 爵士提出用量子场论的思想来解释低维流形的拓扑不变量. Witten 和 Floer 等人完成了该项工作 [3]. Witten 更是由此建立了拓扑量子场论, 并凭此在 1990 年于日本东京的国际数学家大会上获得菲尔兹奖. 在辛几何领域, Gromov 引入拟全纯曲线方法并在辛拓扑的研究中引发了一场革命 [4]. 阮勇斌、田刚、孔采维奇 (Kontsevich)、李俊、深谷贤治 (Fukaya), Behrend、Fantechi 等人结合 Gromov 和 Witten 的想法对辛流形和代数簇定义了 Gromov-Witten 不变量 [5]. 1998 年, 孔采维奇凭该方面的工作于德国柏林召开的国际数学家大会上获得菲尔兹奖.

与此同时, 日本数学家森重文 (S. Mori) 为了对代数三重 (实六维代数簇) 进行双有理 (birationally) 分类而建立起了极小模型理论 [2], 并凭此在 1990 年于日本东京召开的国际数学家大会上获得菲尔兹奖.

初看起来, Gromov-Witten 不变量和极小模型理论属于两个完全不同的数学分支. 但利用 Gromov-Witten 不变量可以在辛流形的通常上同调群上定义一个新的量子乘法, 也就是说, 可以在通常的上积 (cup product) 上加上一些量子修正项, 这些量子修正项由辛流形的 Gromov-Witten 不变量给出. 通常上同调群带上量子乘法构成一个新的上同调环, 称之为量子上同调. 一个自然的问题是, 作为辛流形的拓扑不变量的量子上同调具有怎样的几何性质? 对此, 阮勇斌发现量子上同调同经典双有理几何有着密切的关系, 并提出了量子极小模型猜测:

量子极小模型猜测 双有理等价的极小模型具有同构的量子上同调.

量子极小模型猜测的研究是一个非常困难的数学问题, 目前取得的进展很小. 李安民和阮勇斌证明了通过 flop(一种由剪切和粘合复合成的拓扑手术) 连接的复三维流形具有同构的量子上同调环, 从而证明了该猜测对三维 flop 成立 [6]. 最近李元斌、林慧文和王金龙将他们的结果扩展到任意维的情形和 Mukai flop 的情形 [7].

由于量子乘法中用到全部 Gromov-Witten 不变量的信息, 从而使得该猜测的验证变得非常困难. 阮勇斌结合双有理变换的特点仅用例外 (exceptional) 同调类的 Gromov-Witten 不变量来定义了一种新的量子乘法, 我们称辛流形的通常上同调群带上该乘法构成的环为阮上同调. 对应于量子上同调的情形, 也有相应的量子极小模型猜测, 我们称之为**上同调量子极小模型猜测: 双有理等价的极小模型具有同构的阮上同调.** 关于该猜测, 胡建勋和张皖川对 Mukai flop 验证了该猜测成立 [8].

参 考 文 献

[1] McDuff D, Salamon D. J-holomorphic curves and quantum cohomology. Rhode Island: Amer Math Soc, 1994

[2] Matsuki K. Introduction to The Mori Program. New York: Springer-Verlag, 2002

[3] Nash C. Differential Topology and Quantum Field Theory. New York: Academic Press, 1991

[4] Gromov M. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. Invent Math, 1985, 82: 307-347

[5] Ruan Y, Tian G. A mathematical theory of quantum cohomology. J Diff Geom, 1995, 42: 259-367

[6] Li A M, Ruan Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds. Invent Math, 2001, 145: 151-218

[7] Lee Y, Lin H W and Wang C L. Flops, motives and invariance of quantum rings. arXiv:math/0608370. to appear in Ann Math.

[8] Hu J, Zhang W. Mukai flop and Ruan cohomology. Math Ann, 2004, 330: 577-599

撰稿人: 胡建勋
中山大学

彭罗斯 (Penrose) 猜想

Penrose Conjecture

在广义相对论理论中, 在研究由孤立的引力源产生的时空模型时, 假设物质场的局部质量密度为正并且满足主能量条件即局部质量密度大于局部动量密度的模长, 根据正能定理, 时空总的质量 (ADM mass) 为正定.

这个结论在引力波存在的情形下也成立. 正能定理的完整证明[1] 在 20 世纪 70 年代末首先被孙理察 (Schoen) 和丘成桐 (Yau) 给出. 威滕 (Witten) 在稍晚些时候另辟蹊径, 运用旋量工具给出了另一种更为简洁的证明[2].

在相对论学界中有一个很重要的假设, 便是宇宙监督假设[3]. 在考查宇宙监督假设是否成立的过程中, 彭罗斯 (Penrose) 从一个简单例子中得到了 ADM 质量的下界可以用黑洞表面积来表述的重要结论. 后来人们猜测, 当有黑洞作为内边界存在的一类渐近欧式初始数据所生成的时空, 在满足正能定理中的主能量条件时, 该时空的 ADM 质量的下界仍然可以满足上述结果. 需要说明的是这里所指的黑洞定义为过去或未来俘获面 (trapped surface). 这个猜想现在被命名为彭罗斯猜想或彭罗斯不等式[4,5]. 该猜想如果证明成立的话, 将会是正能定理在含内边界的渐近欧式初始面上一个很漂亮的推广.

在研究彭罗斯不等式时, 数学家们对渐近欧式初始数据进行了限制, 要求初始数据为时间对称, 即考虑该初始数据相应的类空曲面嵌入的时空时, 第二基本形式为 0. 2002 年, Huisken 和 T. llmanen[6] 证明了在上述特殊情形下彭罗斯不等式是正确的. 接下来, Bray[7] 将这一不等式推广到多黑洞的时间对称的初始面上. 遗憾的是, 到目前为止, 对于一般情形 (第二基本形式不为 0) 的证明还未找到. 更困难的是, 彭罗斯猜想的普适表述形式也是一个公开的问题, 参见文献 [8].

参 考 文 献

[1] Schoen R, Yau S T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. Commun Math Phys, 1979, 65: 45-76

[2] Wittem E. A new proof of the positive energy theorem. Commun Math Phys, 1981, 80: 381-402

[3] Penrose. Naked Singularities. Ann New York Acad Sci, 1973, 224: 125-134

[4] Finster F, Smoller J, Shing-Tung Yau. Some recent progress in classical general relativity. J Math Phys, 2000, 41: 3943
[5] Mars M. An overview on the Penrose inequality. Journal of Physics: Conference Series 66, 012004, 2007
[6] Huisken G, Llmanen T. The Riemannian Penrose inequality. Int Math Res, 1997, 20: 1045-1058
[7] Bray H. Proof of the Riemannian Penrose conjecture using the positive mass theorem. Arxiv preprint math/9911173, 1999
[8] Ben-Dov I. Penrose inequality and apparent horizons. Phys Rev D 70, 124031, 2004

撰稿人：白　姗　刘润球
中国科学院数学与系统科学研究院

三种狭义相对论和引力及其相互关系

Three Kinds of Special Relativity and Gravity as well as Their Relations

近十年来, 精密宇宙学的最新结果不断对于以爱因斯坦相对论为基础的当代物理学与宇宙学提出一系列的疑难. 如何发展爱因斯坦相对论, 已经是不得不考虑的涉及物理学的理论基础的重大课题.

以陆启铿为首的我国学者早在 20 世纪 70 年代初就指出, 应该存在以惯性原理为基础的三种狭义相对论, 分别定义在闵可夫斯基/德西特/反德西特时空上, 具有庞加莱/德西特/反德西特不变性[1~6]. 华罗庚曾经利用投影几何进行过研究[7], 周培源曾关注过宇宙学意义.

研究表明[8,9,11~13], 三种狭义相对论具有不同的宇宙学内涵：对于爱因斯坦狭义相对论的闵氏时空, 宇宙学内涵是平庸的; 不能反映宇宙常数所表征的特征. 德西特狭义相对论则不同, 如果把作为真空的德西特时空的半径 R 与宇宙常数相联系, 其宇宙学内涵为具有视界熵[9,13] 的加速膨胀的 3 维球面, 曲率极小, 为宇宙常数量级. 这样, 宇宙常数作为一个普适常数就在原理的意义上引进了. 反德西特狭义相对论在常曲率为负的反德西特时空上, 同样包含曲率半径, 但相应的宇宙常数为负; 其宇宙学内涵是震荡的 3 维罗巴切夫斯基空间, 没有视界和熵.

描述引力, 应以狭义相对论的局域化原理为基础, 即把狭义相对论, 包括相应的时空、其中的物理规律及完整的对称性一起局域化, 建立相应的时空几何[11~13]; 进而, 应引入与这个原理一致的动力学来描述引力. 于是, 就应该有三种引力理论, 即局域庞加莱、局域德西特与局域反德西特不变的引力理论.

在三种狭义相对论及其局域化的引力理论之中, 应有一种描述真实宇宙. 真实宇宙的宇宙常数为正、具有熵, 因而必然选择德西特相对论. 观测表明的确如此：宇宙在加速膨胀, 宇宙常数对暗能量密度起主导作用. 这样, 宇宙不仅必然渐近于德西特时空, 而且大致是加速膨胀着的 3 维球面, 不过半径很大、曲率在宇宙常数的量级. 这也与观测事实基本一致.

近来发现, 这三种狭义相对论的对称性之间存在联系, 相应的引力理论之间也存在这类联系. 不仅如此, 三种狭义相对论之间的共形扩充[10,13] 也存在密切关系.

在三种狭义相对论及其相互联系以及共形扩充的框架内, 有许多重大数学与相对论物理课题有待进一步研究. 例如：投影几何与共形几何及其相互关系, 超对称

扩充, 等等; 德西特/反德西特不变的经典与量子场论, 及其共形扩充; 与 AdS/CFT 的关系, 等等. 如何建立完善的局域化的引力理论, 也需要对许多重大的数学与理论物理课题做进一步研究. 例如, 投影联络及投影群子群的联络, 曲率及其大范围性质, 在相应的引力理论中的应用, 等等.

总之, 这一领域是中国学者开创的, 又与精密宇宙学的最新结果密切联系, 有大量有重要意义的课题需要深入研究.

参 考 文 献

[1] Look Q H. Why the Minkowski metric must be used? An unpublished note, 1970
[2] Look K H, Tsou C L, Kuo H Y. The kinematical effects in the classical domains and the red-shift phenomena of extra-galactic objects. Acta Phys Sinica, 1974, 23: 225
[3] Look K H, Tsou C L, Kuo H Y. Nature, Relativistic principle of space-time with constant curvature and its cosmological significance. Suppl Mod Phys, 1980, 1: 97
[4] Kuo H Y. The groups of transformations and invariants for the typical spacetime. Chinese Sci Bull, 1977, 22: 487
[5] Kuo H Y. A theory of inertial motion in space-time of constant curvature. Proc 2nd Marcel Grossmann Meeting on GR, 1982, 801
[6] Guo H Y. The meaning of relativity in spacetimes of constant curvature. Nucl Phys B Proc Suppl, 1989, 6: 381
[7] Hua L G. Uniform velocity straight-line motions and projective geometry. An unpublished manuscript, 1974
[8] Guo H Y, Huang C G, Xu Z, Zhou B. On special relativity with cosmological constant. Phys Lett 2004, A331: 1-7
[9] Guo H Y, Huang C G, Zhou B. Temperature at horizon in de Sitter spacetime. Europhys Lett, 2005, 72(6): 2494-2504
[10] Guo H Y, Zhou B, Tian Y, Xu Z. The triality of conformal extensions of three kinds of special relativity. Phys Rev, 2007, D75 026006, hep-th/0611047
[11] Guo H Y. On principle of inertia in closed universe. Phys Lett, 2007, B653: 88-94
[12] Guo H Y, Huang C G, Tian Y, Wu H T, Xu Z, Zhou B. Snyder's Model: de Sitter Special relativity duality and de Sitter gravity. Clas Quan Grav, 2007, 24: 4009
[13] Guo H Y. Special relativity and theory of gravity via maximum symmetry and localization: in honor of the 80th birthday of professor Qikeng Lu. Science in China, 2008, A(5): 588

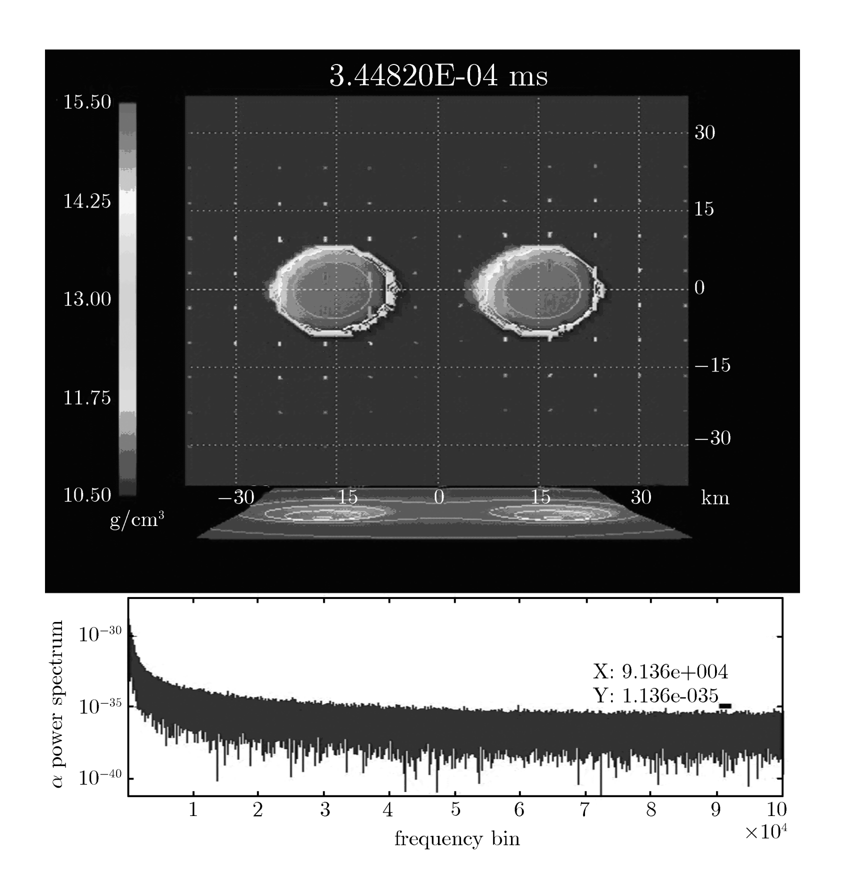
撰稿人：郭汉英
中国科学院理论物理研究所

双黑洞系统的数值研究

Numerical Research on Binary Black Hole

广义相对论是爱因斯坦在 1915 年建立的描述引力和时空结构的理论[1]. 在广义相对论的描述中, 引力不是力, 只是物质和能量造成的弯曲时空背景. 弯曲的形式和物质能量的关系由爱因斯坦方程给出. 实验上, 在 1990 年以前, 由于技术水平的限制, 广义相对论只有三大实验验证：水星近日点进动, 太阳附近星光偏折和光谱的引力红移, 以及宇宙的微波背景辐射. 理论上, 由于爱因斯坦方程形式较复杂, 解析上仅仅对单体系统有所了解, 对两体和多体系统几乎一无所知. 近年来, 广义相对论的发展在实验和理论上都有重大的转变. 实验上, 随着引力波激光干涉仪 (LIGO, VERGO, GEO600, TAMA300) 的建成[2], 对引力波有无的检验将可以进行. 接下来通过对引力波携带信息的分析可以实验检验广义相对论对强引力场描述的准确性. 广义相对论逐渐从 "理论家的天堂, 实验家的地狱" 变成有实验支持的学科. 在理论上, 随着计算机技术的发展, 数值计算变成相对论研究的强有力手段. 数值方法研究广义相对论也逐渐成为一个研究方向 —— 数值广义相对论[3].

数值广义相对论诞生于 20 世纪 60 年代, 动机和非线性物理学的发展类似：用数值模拟研究相对论性两体问题[4]. 但由于爱因斯坦方程的复杂性, 乃至当时世界上最先进的超级计算机如 Cray-2 也无法处理实际的三维空间加一维时间的引力系统[5]. 所以, 直到 1995 年以后, 在计算机技术飞速发展的支持下, 数值广义相对论才得到真正发展. 和其他计算物理学的研究相比, 数值广义相对论有其独特的一个问题 —— 数值计算容易不稳定. 爱因斯坦方程是一个张量方程, 为了数值求解我们需要把它转化为普通的偏微分方程形式. 转化的方法很多, 得到的偏微分方程形式上差别很大. 这些不同的偏微分方程形式对应的动力学变量各不相同, 方程的数学结构、变量的特征速度也不同, 用来做数值演化的稳定性也各不相同. 哪个形式更有利于数值计算稳定性及其原因, 是数值广义相对论中的表述形式 (formalism) 问题[6]. 虽然 2005 年后人们发现有的表述形式的确能比较稳定地数值求解双黑洞系统[7], 但表述形式问题并没有得到很好的认识. 黑洞时空是有奇点存在的, 在奇点附近各种各样的几何量和物理量都会发散. 在解析处理的时候, 我们可以用一个符号来简单记住无穷大, 但在数值计算中这些无穷大会让计算机无法工作下去, 导致数值计算的不稳定. 如何数值处理这些奇点以保证数值计算的稳定性, 这是数值广义相对论中的奇点问题. 目前我们有两种方法来处理时空奇点, 一是剪切法 (excision),



一是穿刺法 (puncture). 剪切法是利用黑洞事件视界的因果特性 —— 事件视界内的事物不会影响到事件视界以外的事物. 但是这样的因果特性对非物理的自由度没有约束作用, 如何保证非物理的自由度不传出事件视界是剪切法成功的关键. 穿刺法是把黑洞区域用一个渐近平直区来代替, 进而把该渐近平直区的坐标奇点放在计算网格的中间, 从计算网格来看就没有奇性出现. 实践证明该方法简单有效, 但它的几何和物理机制却是一个令人费解的问题. 为了数值求解爱因斯坦方程, 我们需要选择合适的坐标系或者标架. 坐标系或者标架的选择会影响所求解偏微分方程的结构, 而且还和时空奇性的处理密切相关. 比如说在剪切法中, 所选坐标系的同时面需要横截事件视界以保证有区域可剪切. 对于不同的时空如何选取不同的坐标系以保证数值计算的稳定性现在还没有明确的规律可循. 坐标系或者标架在数值广义相对论中被称为规范, 所以该问题又叫做规范选择问题. 数值计算通常不可能处理无界区域, 在偏微分方程的适定性问题上引出一个初边值问题. 由于爱因斯坦方程是一个约束系统, 如何提边界条件以保证满足约束进而保证适定性是一个公开的问题[8]. 没有适定性就不可能得到稳定的数值解, 所以如何设定边界条件是数值广

义相对论另一个重要的问题.

除了上述的稳定性问题外, 关于双黑洞系统, 还有许多数学物理问题需要数值方法来研究. 比如说, 存在两个黑洞的时空有稳定的可能吗, 两个黑洞碰撞可能出现裸奇点吗 (宇宙监督假设和 hoop 猜想)[9], 彭罗斯不等式会有违反的时候吗, 黑洞碰撞会不会太强烈以至于辐射能量太多使系统变为负能 (正质量猜想), 等等. 在引力波实验方面, 原始数据的处理需要数值广义相对论预言的引力波波形来提高信噪比和解释实验数据.

参 考 文 献

[1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论. 北京：科学出版社, 2006

[2] Abramovici A, et al. LIGO: the laser interferometer gravitational-wave observatory. Science, 1992, 256: 325

[3] Lehner L. Numerical relativity: a review. Class Quantum Grav, 2001, 18: R25

[4] Hahn S, Lindquist R. The two-body problem in geometrodynamics. Ann Phys, 1964, NY 29: 304

[5] Evans C, Finn L, Hobill D. Frontiers in Numerical Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 1989

[6] Bona C, Masso J, Seidel E, Stela J. New formalism for numerical relativity. Phys Rev Lett, 1995, 75: 600

[7] Pretorius F. Evolution of binary black-hole spacetimes. Phys Rev Lett, 2005, 95: 121101

[8] Stewart J. The Cauchy problem and the initial boundary value problem in numerical relativity. Class Quantum Grav, 1998, 15: 2865

[9] Shapiro S, Teukolsky S. Formation of naked singularities: the violation of cosmic censorship. Phys Rev Lett, 1991, 66: 994

撰稿人：曹周键

中国科学院数学与系统科学研究院

杨–巴克斯特 (Yang-Baxter) 方程

Yang-Baxter Equations

杨–巴克斯特方程 (YBE) 是一个矩阵函数方程:

$$\begin{cases} R_{12}(\alpha,\beta)R_{23}(\beta,\gamma)R_{12}(\alpha,\gamma) = R_{23}(\alpha,\gamma)R_{12}(\beta,\gamma)R_{23}(\alpha,\beta), \\ R_{12}(\alpha,\beta) = R(\alpha,\beta)\otimes E, \\ R_{23}(\alpha,\beta) = E\otimes R_{23}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

其中 $R(\alpha,\beta)$ 是 $N\times N$ 矩阵, E 是单位矩阵, α,β,γ 是 k 维参量, 用矩阵分量表示则是 N^3 个代数函数方程.

YBE 的雏型是 1944 年 Onsager 在研究 Ising 模型时提出的, 称为星–三角关系[1]. 1967 年, 杨振宁在研究一维 δ 势的费米子模型时, 作为系统可积性条件, 他感到其数学结构非常重要, 明确提出了 YBE[2,3], 并给出方程的第一个有理解. 1972 年, Baxter 在研究八顶角格点模型时也得到了同样的方程[4], 给出了此方程的最低维椭圆解. 利用 YBE 的解, 他们所研究的模型可以精确求解. 前苏联研究组在提出量子力学体系的反散射方法时, 正式把这一方程称为 Yang-Baxter 方程. 随后, 陆续发现这个方程及其推广广泛地涉及统计物理、统计模型、低维场论、二维经典和量子可积系统、量子群理论等许多物理和数学领域[5], 并且起重要的作用, 是许多物理领域和数学物理领域中十分感兴趣的研究方向.

在数学物理领域中, YBE 及其各种推广被认为是可积性的定义关系式, 它所起的作用是从局域的性质给出整体的结果, 使统计物理、统计模型、低维场论、二维经典和量子可积系统等领域一些问题可解或者变得简单. 例如: 众所周知, 连续模型定义在一个连续的空间中, 有性质很好的微分方程等等, 研究的方法和工具比较多. 而离散的格点模型却定义在不连续的空间中, 由困难的差分方程描述, 研究这样的离散系统则较为困难. YBE 的重要作用是它使比连续问题困难的离散格点模型一下子变得更为简单. 利用 YBE, 诸如二维 Ising 模型、q 态的 Potts 模型、六顶角及八顶角模型、自由费米子模型、hard-hexagon 模型、RSOS 模型和手征 Potts 模型等统计模型中许多重要问题得到解决. 所以, 多年来 YBE 及其应用备受关注.

为了求出杨–巴克斯特方程的解, 前苏联学派和日本京都学派建立和发展了量子李代数的理论, 利用量子包络代数的表示构造了一些解. 在具体的统计物理或者模型的研究中, 人们也给出了一些特解[7]. 但是, 基于代数表示理论的解和一些特

殊的解均是孤立构造性的, 不能判断某一维数的 YBE 的矩阵解是否完整. 对于低维的 YBE 解的完备性的研究, 基于吴文俊消元法的理论和方法, 文献 [8] 完整地给出了自旋为 1/2 的带色带谱参数的八顶角型的全部解和分类, 文献 [9] 则给出了自旋为 1/2 的带色带谱参数的三角形解.

YBE 解的代数结构是其相应物理模型对称性的本质的反映. 用代数方法研究 YBE 及其推广, 或者研究 YBE 解的代数结构, 涉及 Yangian 和量子 Affine 代数, 各种 q 的和 h 的形变无穷维代数. 它的研究进展将应用于研究相应模型的本征态、能谱和相关函数.

但是, 完整地给出杨–巴克斯特方程高自旋和高亏格的解、解的分类和、标准型、解相应的统计模型中的应用以及有关的带动力学变量的 YBE 的解仍有很多的问题需要研究.

参 考 文 献

[1] Onsager L. Phys Rev, 1944, 65: 117-149

[2] Yang C N. Phys Rev Lett, 1967, 19: 1312-1314

[3] Yang C N. Phys Rev Lett, 1968, 168: 1920-1923

[4] Baxter R J. Ann Phys, 1972, 70: 193-228

[5] Zamolodchikov A B. Annals of Physics, 1979, 120: 253-291

[6] Jones V F R. Ann Math, 1987, 126: 335-388

[7] 马中骥. 杨–巴克斯特方程和量子包络代数. 北京: 科学出版社, 1993

[8] Wang Shi-Kun. J Phys A: Math Gen, 1996, 29: 2259-2277

[9] Qiu C H, Wang T Z, Xu Y C. J Math Anal Appl, 2007, 326: 46-61

撰稿人：王世坤

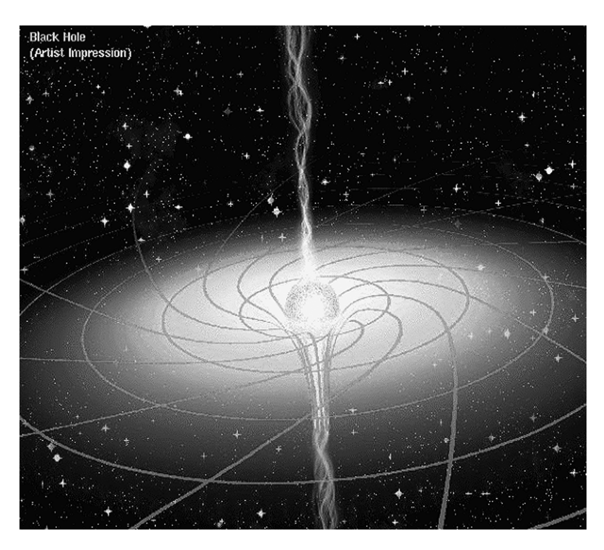
中国科学院数学与系统科学研究院

宇宙监督假设

Cosmic Censorship Hypothesis

在广义相对论中, 当研究天体物理中的一个致密星体 (比如超新星大爆炸的残留物) 由于引力塌缩而演化为黑洞的过程时, 著名的霍金–彭罗斯 (Hawking-Penrose) 定理表明, 如果时空满足某些合理的物理假设, 则时空将会产生奇点使得爱因斯坦方程失效, 参见文献 [1]. 我们称由爱因斯坦方程长时间演化所导致生成的奇点为未来奇点, 以别于由宇宙大爆炸所产生的原初奇点.

未来奇点的本质结构是一个长期被国际同行所关注的问题. 在 20 世纪 70 年代, 大量的有关这个领域的研究工作被发表, 但时至今日, 答案仍然不甚明了. 这个问题之所以如此受重视并且难度大, 是因为未来奇点的数学结构不同于其他奇点, 它的出现一般被认为标志着经典广义相对论在高能情形下失效, 并且直接导致了量子引力的问世.



奇点的出现对于爱因斯坦方程的可预见性来讲是一个极为严重的威胁. 这是由于我们并不知道由时空奇点生成的额外信息是否会干扰爱因斯坦场方程的经典演化过程. 从一些黑洞演化的实例中, 彭罗斯 (Penrose) 认为未来奇点必须要隐藏在一个黑洞事件视界内. 如果我们只讨论事件视界以外的场方程柯西演化时, 经典的相对论理论依然有效. 彭罗斯 (Penrose) 将这一猜想命名为宇宙监督假设, 参见

文献 [2].

宇宙监督假设合理可信, 符合物理直觉并且还被很多单一黑洞的例子所证实, 但却很难用数学语言来严格化, 更不用提一个优美的数学证明了. 虽然很难提出一个统一版本, 我们或许可以根据不同的应用前景来给出相应的表述形式, 参见文献 [3]、[4].

近年来对该猜想的研究工作主要是围绕爱因斯坦方程的时间演化问题而开展, 并运用偏微分方程的工具来寻找答案. 对于紧柯西面的情形, 一个较强版本的宇宙监督假设在 Gowdy 时空下已经被证实, 参见文献 [5]. 但是这距离我们完全理解宇宙监督假说的物理和数学内容的目标还很遥远, 依然要有很长的路要走.

参 考 文 献

[1] Hawking S W, Ellis G F R. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[2] Penrose R. 1969. Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speziale 1, 252, reprinted in General Relativity and Gravitation, Vol. 34, No. 7, July 2002. Penrose, R: “Singularities and time-asymmetry”, Chapter 12 in General Relativity: An Einstein Centenary Survey (Hawking and Israel, editors), Cambridge University Press (1979); Penrose R, Some unsolved problems in classical general relativity Seminar on Differential Geometry ed. S-T Yau (Princeton: Princeton University Press) (1979)

[3] Geroch R, Horowitz G T. Global structure of spacetimes, in General relativity: An Einstein Centenary. Survey, ed. Hawking S W and Israel W, Cambridge University Press, 1979

[4] Wald R M. Gravitational Collapse and Cosmic Censorship. gr-qc/9710068

[5] Ringström H. Strong cosmic censorship in T 3-Gowdy. accepted Ann Math, http://www.math.kth.se/hansr

撰稿人：白　姗　刘润球
中国科学院数学与系统科学研究院

亨特 (Hunt) 假设与 Getoor 猜测

Hunt's Hypothesis and Getoor's Conjecture

由于许多天才数学家的杰出工作, Markov 过程的理论经历了半个多世纪的发展到现在已经比较成熟, 它的重要性以及在其他领域的应用已经众所周知. 但是, Markov 过程仍然是概率与随机过程领域的焦点与最富有漂亮结果的研究方向之一, 也是概率论中应用最广泛的随机过程, 尽管已过华年, Markov 过程的基础理论中也仍然有许多有意义的问题, 其中最重要的问题之一是 Hunt 的 (H) 假设以及相关的所谓 Getoor 猜测.

由于古典位势理论与 Brown 运动之间的密切关系, 利用一般 Markov 右过程建立的位势理论就是所谓的概率位势论, 它是一般位势理论的一个重要组成部分, 也可以看成 Markov 过程与分析联系的纽带. 概率学家 G.A.Hunt 是一个富有传奇色彩的学者, 它在博士毕业几年内留下三篇到现在仍然是概率位势论的经典论文后就离开了数学界. 由于他的工作, 他的名字被用来命名一类重要的 Markov 过程: Hunt 过程, 是指右连续且拟左连续的强 Markov 过程. 在他著名的论文[1] 中提出了研究概率位势理论的一系列假设, 比如 (E) 假设过程是暂流的, (F) 假设是参考测度存在性假设等. 其中许多假设由于后来新方法的应用, 特别是 Kuznetsov 测度的引入和 UCSD 的 P. J. Fitzsimmons, R. K. Getoor, J. B. Mitro 等的工作而显得不再重要, 但其中假设 (H) 却仍然不可代替且被人关注. 简单地说, 它是假设没有正则点的集是极集. 一个集合的所谓正则点就是在精细拓扑 (即过程诱导的拓扑) 下的聚点, 没有正则点的集合类似于孤立点集, 直观地说, 也就是过程从任何点出发都不会马上 (在一段正时间内) 碰到的集合. 所谓极集就是过程 (几乎所有轨道) 永远不会碰到的集合. 因此, (H) 假设是说, 任何点出发都不会马上碰到的集合将永远不会被过程碰到. (H) 假设是一个概率假设, 是用过程轨道定义的. 对于直线上的一致漂移, 半极集就是可列集, 极集是空集, 所以不满足 (H) 假设. 而对 Brown 运动, 半极集与极集都是空集, 所以 (H) 假设满足. 在处理对偶过程的时候, 为得到一个满意的结果, 经常需要这个假设. 直到今天, 关于这个假设本质上在说什么尚没有一个满意的充分条件. Hunt 当时指出 (H) 在对称的情况下是成立的 (参考文献 [2]). 后来 M. Silverstein[3] 证明了满足截面条件的过程是满足假设 (H) 的 (从对偶测度的角度). 而在一些极端不对称的情形下, 如一致平移, (H) 假设不满足. 所以大家猜测 Hunt 假设 (H) 实际上是一个关于对称程度的假设, 也就是说满足该假设的

过程具有一定的对称性. 其次这个假设是否是一个很强的假设也没有明确的答案, 除了截面条件, 很少有过程可以验证 Hunt 假设 (H). 截面条件肯定不是一个很好的充分条件, 对于 Levy 过程来说, 截面条件是指其 Levy 指数的实部控制虚部, 是个很强的条件. 但是大多数人倾向于认为 (H) 假设不是个很强的假设, 而是个轻微的对称性假设. Ranold K. Getoor 教授曾经说过他的 "猜测": 对于 Levy 过程, 除了类似于一致平移这样的极端不对称情形, 都满足 Hunt 假设 (H). 他也多次在会议上提到他的这个猜测, 有的学者就把他叫做 Getoor 的猜测. 但是 Getoor 教授自己甚至不能清楚地描述什么情况下假设成立或者不成立, 也就是说他不能说明什么是极端不对称情形, 所以这个猜测更多的是一种感觉.

最后, 我们把问题明确地叙述一遍

1. 证明: 在 Levy 过程情形下, 除去一些极端不对称的场合 (需要界定), 半极集是极集.

2. 对于一般 Markov 过程, 发现 (比截面条件) 更好的充分条件以保证满足 Hunt 假设.

参 考 文 献

[1] Hunt G A. Markoff processes and potentials. Illinois J Math, I(1957), II(1957), III(1958), 1(44-93), 1(316-369), 2(151-213)

[2] Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1994

[3] Silverstein M. The sector condition implies that semipolar sets are polar. 1977, ZW 41: 13-33

撰稿人：应坚刚
复旦大学

常微分方程与随机分析中的相关问题

Ordinary Differential Equations and Related Problems in Stochastic Analysis

系数 $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 满足什么条件, 我们可以解如下的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}X_t(x)}{\mathrm{d}t}=V(X_t(x)),\quad X_0(x)=x. \tag{1}$$

一、若 V 满足整体的 Lipschitz 条件：

$$|V(x)-V(y)|\leqslant C|x-y|,\quad \text{对所有的 } x,y\in\mathbb{R}^d,$$

则方程 (1) 的解可用经典的 Picard 迭代法得到. 其步骤如下：定义 $X_t^{(0)}(x)=x$ 及

$$X_t^{(n+1)}(x)=x+\int_0^t V\big(X_s^{(n)}(x)\big)\,\mathrm{d}s,\quad t\in\mathbb{R},$$

则函数序列 $(t,x)\mapsto X_t^{(n)}(x)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 的任意紧子集上一致收敛到方程 (1) 的解 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$. 它具有如下性质：$X_{t+s}=X_t\circ X_s$, $X_t:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是整体的连续同胚.

二、若 V 有界且满足 Osgood 条件：

$$|V(x)-V(y)|\leqslant C|x-y|r(|x-y|),\quad \text{对所有的 } |x-y|\leqslant\delta,$$

其中函数 $s\to r(s)$ 使得 $\displaystyle\int_0^\delta\frac{\mathrm{d}s}{sr(s)}=+\infty$, 则方程 (1) 的解可由 Euler 逼近一致收敛得到. 其方法如下：定义

$$X_0^{(n)}=x,\quad X_t^{(n)}=X_{t_k}^{(n)}+(t-t_k)V\big(X_{t_k}^{(n)}\big),\quad t\in[t_k,t_{k+1}],$$

其中 $t_k=kT/n, T>0$ 固定, 则 $X_t^{(n)}$ 一致收敛到 X_t. 在此条件下, 同样地有 $X_{t+s}=X_t\circ X_s$, $X_t:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是整体的连续同胚.

三、V 仅仅满足 Sobolev 条件 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. 由于此时 V 只是几乎处处有定义, 方程 (1) 的解必须重新理解. 我们称 $X_t:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 解方程 (1), 如果：(i) $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度 λ_d 在 (X_t) 下拟不变：$(X_t)_*\lambda_d=k_t\lambda_d$; (ii) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^d, X_t(x)=x+\displaystyle\int_0^t V(X_s(x))\mathrm{d}s$, $t\geqslant 0$. 如果采用通常的逼近方法, V 的 Jacobi

矩阵必须满足指数可积条件. 为了避免这个不自然的情况出现, 20 年前 DiPerna-Lions[2] 发现了使用运输方程的方法. 其做法如下：(i) 首先将 V 光滑得到 V_n, 考虑常微分方程 $\mathrm{d}X_t^n = V_n(X_t^n)\mathrm{d}t$; (ii) 对任意线性映射 $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u_t^n(x) := \ell(X_t^n(x))$ 解运输方程

$$\frac{\mathrm{d}u_t^n}{\mathrm{d}t} - V_n \cdot \nabla u_t^n = 0, \quad u_0^n = \ell,$$

则 $u_\cdot^n(\cdot) \in L^\infty([0,T], L^p)$ 弱收敛到 $u \in L^\infty([0,T], L^p)$, 且该极限在广义函数意义下解

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} - V \cdot \nabla u_t = 0, \quad u_0 = \ell. \tag{2}$$

(iii) V 的 Sobolev 条件保证了方程 (2) 具有唯一解, 由此可以强化 u^n 到 u 的收敛, 从而可以证明 $X_t(x) = (u_1(t,x), \cdots, u_d(t,x))$ 是所需要的解, 这里 u_i 对应于初值 $\ell_i : (x_1, \cdots, x_d) \mapsto x_i$.

四、$V = -\nabla\varphi$, 这里 φ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非光滑的 λ 凸函数:

$$\varphi((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) - \frac{\lambda t(1-t)}{2}|x-y|^2.$$

此时, De Giorgi 的极小运动原则可表述如下：(i) 对每个 $h > 0$, 首先解极小问题 $\inf_x \left\{ h\varphi(x) + \frac{1}{2}|x - x_0|^2 \right\}$, 记 $X_h^{(1)}$ 为其解. 将 x_0 换成 $X_h^{(1)}$, 上面的极小问题的解记作 $X_h^{(2)}$. 依此类推, 我们得到一列 $\{X_h^{(n)} : n \geqslant 1\}$. (ii) 定义 $X_h(t) = X_h^{(n)}$, $t \in [nh, (n+1)h)$. 则可证明在某些情况下, 当 $h \downarrow 0$ 时, $X_h(t)$ 关于 $t \in [0,T]$ 一致收敛到方程

$$\mathrm{d}X_t = -(\nabla\varphi)(X_t)\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = x_0 \tag{3}$$

的解. 需要说明的是, 尽管 $\nabla\varphi$ 只是几乎处处有定义的, 但方程 (3) 的初值是可以逐点给定的. 也就是说, 此时 (X_t) 总是在 $\nabla\varphi$ 的定义域内, 并且我们有递减关系式 $|X_t(x_0) - X_t(y_0)| \leqslant e^{-\lambda t}|x_0 - y_0|$.

五、与随机分析中若干问题的联系.

当系数满足整体 Lipschitz 条件时, Itô随机微分方程的解可以用 Picard 迭代构造, 参见文献 [5]. 在某些复杂的情况下, 可以构筑适当的框架, 以便 Picard 迭代适用, 见 B. Driver 给出的曲轨道空间上的 Cameron-Martin 定理的证明[3]. 对系数满足 Osgood 条件的 Itô 随机微分方程的讨论可参见文献 [4]. 那么在什么样的 Sobolev 条件下, Itô 随机微分方程具有适当的强解呢? 此外, 紧流形上的热测度可以解释为相对于 Riemann 测度的熵泛函的梯度流 (见文献 [1]、[7]). 下面我们就这最后的问题在 loop 群上作稍微详细的阐述. 设 G 为一连通紧致李群 (不妨看作是 $\mathrm{so}(d)$ 的子群), 考虑 $L(G) = C(S^1, G)$. 给定两个 loop $\ell_1, \ell_2 \in L(G)$, 它们之间的乘积定义为 $(\ell_1 \cdot \ell_2)(\theta) = \ell_1(\theta) \cdot \ell_2(\theta)$, 则 $L(G)$ 是一个完备的拓扑群. 记 $\mathcal{G}$ 为 G 的李代数, 并赋予一

个 Ad_G 不变度量. 考虑 $H(\mathcal{G})=\left\{h:S^1\to\mathcal{G}\text{ 绝对连续}\,\Big|\,\int_{S^1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}h(\theta)\right|_{\mathcal{G}}^2\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}<+\infty\right\}$, 则它可看成是 $L(G)$ 的李代数. 关于度量 $|h|_{H^1}^2=|h(0)|_{\mathcal{G}}^2+\int_{S^1}\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\right|^2\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$, 我们可以在 $L(G)$ 上定义 Laplace 算子 Δ^L. Malliavin 在文献 [6] 中引进了 $L(G)$ 上的热测度 $(\nu_t)_{t>0}$:

$$\frac{\mathrm{d}\nu_t}{\mathrm{d}t}=\Delta^L\nu_t \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int F\,\mathrm{d}\nu_t=\int\Delta^L F\,\mathrm{d}\nu_t.$$

我们知道 Haar 测度在 $L(G)$ 上是不存在的. 那么是否存在一个 “凸泛函” $\Phi:\mathbb{P}(L(G))\to\mathbb{R}$, 使得 $(\nu_t)_{t>0}$ 是 Φ 的 “梯度流”? 这里 $\mathbb{P}(L(G))$ 是 $L(G)$ 上的概率测度的全体. 如果这样, 则在 $L(G)$ 上存在一个 Haar 测度的弱版本.

参考文献

[1] Ambrosio L, Gigli N, Savaré G. Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Lect. in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2005

[2] DiPerna R J, Lions P L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. Invent Math, 1989, 98: 511-547

[3] Driver B. A Cameron-Martin type quasi-invariant theorem for Brownian motion in a compact manifold. J Funct Anal, 1992, 110: 272-376

[4] Fang S, Zhang T. A study of a class of stochastic differential equations with non-Lipschitzian coefficients. Probab Theory Relat Fields, 2005, 132: 356-390

[5] Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990

[6] Malliavin P. Hypoellipticity in infinite dimension. Prog Probab, 1989, 22: 17-33

[7] Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. Comm Partial Diff Equations, 2001, 26: 101-174

撰稿人：方诗赞

法国 Bourgogne 大学

复杂数据的变量选择问题

Variable Selection for Complex Data

由于在生物学、医学、生态学、人口学、环境学和经济学等学科的研究中, 随着实验技术、检验方法和数据分析手段的日益提高, 所获得的数据在结构上越来越复杂精细, 所提供的信息也越来越繁杂, 获得的变量个数也越来越多. 在不同的数据结构和各种模型下, 如何有效地进行变量选择, 即选出对研究对象有比较重要影响的变量使得选择的模型易于解释并且具有较好的预测能力, 这方面的研究已成为当今统计学与生物学、医学、生态学、社会学、环境学和经济学等学科交叉中重要的前沿问题.

在传统的统计分析中, 特别是 20 世纪 60 年代开始注重的线性模型的变量选择问题, 主要有两种常用的变量筛选方法：一种是最优子集法, 即考虑所有可能的回归模型 (由自变量的所有子集组成), 根据一定的标准 (如 AIC、BIC) 选出一个最优子集. 虽然这种方法简单直观, 但它的缺陷是计算量太大, 需要搜索所有子集. 另一个则是逐步回归法, 即对已引入回归方程的变量, 根据其偏回归平方和大小来进行剔除, 把影响不显著的变量全部剔除, 然后再对未引入回归方程中的变量根据其偏回归平方和的大小进行引入, 直到在回归方程中的变量都不能剔除而又无新变量可以引入为止. 其不足之处就是它的不稳定性. 为了提高变量选择的准确性和模型的预测精度, Tibshirani[1] 于 1996 年提出了基于惩罚的最小二乘的变量选择 “最小的绝对缩减和变量选择算子”(简称 LASSO). 它通过对较大的系数进行压缩并使另外的系数为零, 从而达到变量选择的目的, 同时达到较好的预报效果. Fan 和 Li[2] 在 2001 年提出了基于惩罚的似然函数的变量选择 “绝对偏差的平滑缩减“(简称 SCAD), 而且 SCAD 同时具有下列三个性质：无偏性、稀疏性、连续性. 这样不仅可以避免不必要的模型偏差, 又能降低模型的复杂程度, 同时避免了模型在预报时的不稳定性. 另外, SCAD 在选择变量的同时又能对系数进行估计, 而且求出的估计值等效于已知正确的子模型. 基于 LASSO 和 SCAD 的优良性, 许多作者对它们进行了扩充和发展, 并把这些似然方法推广到一些半参数模型和估计函数方面 (见文献 [3]~[5]).

目前对于复杂数据下模型中的变量选择问题的研究, 已有一些进展. 其中, Fan 和 Li[6] 基于 SCAD 研究了成组数据下 Cox 随机效应模型的变量选择问题; Fu[7] 基于估计方程和桥惩罚函数讨论了纵向数据下线性模型的变量选择问题; Fan 和 Li[8]

基于加权最小二乘和 SCAD 研究了纵向数据下半参数部分线性模型的变量选择问题; Cai 等人[9] 基于伪似然和 SCAD 给出了多元生存数据下边际 Cox 模型的变量选择方法; Fan 等人[10] 基于局部似然和 SCAD 讨论了多元生存数据下变系数 Cox 模型的变量选择问题.

由于复杂数据种类较多, 包括复发事件数据、成组数据、纵向数据、丢失数据、重复测量数据、区间删失数据和测量误差数据等, 需要不同的统计模型和推断方法来进行分析, 这就导致了建模的复杂性和多样性, 同时使得模型中的变量选择问题更加困难. 需要解决的难题是怎样根据数据结构的特点, 寻找合理的似然函数或者估计方程函数以及合适的惩罚函数, 给出各种理论模型中的变量选择方法, 使所获得的方法计算简单可行, 便于实际应用, 同时具有无偏性、稀疏性和连续性等优良特性.

参 考 文 献

[1] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. J Roy Statist Soc Ser B, 1996, 58: 267-288

[2] Fan J, Li R. Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. J Amer Statist Assoc, 2001, 96: 1348-1360

[3] Zou H, Li R. One-step sparse estimates in nonconcave likelihood models. Ann Statist, 2008, 36: 1509-1533

[4] Johnson B A, Lin D Y, Zeng D. Penalized estimating functions and variable selection in semiparametric regression models. J Amer Statist Assoc, 2008, 103: 672-680

[5] Li R, Liang H. Variable selection in semiparametric regression modeling. Ann Statist, 2008, 36: 261-286

[6] Fan J, Li R. Variable selection for Cox's proportional hazards model and frailty model. Ann Statist, 2002, 30: 74-99

[7] Fu W J. Penalized estimating equations. Biometrics, 2003, 35: 109-148

[8] Fan J, Li R. New estimation and model selection procedures for semiparametric modeling in longitudinal data analysis. J Amer Statist Assoc, 2004, 99: 710-723

[9] Cai J, Fan J, Li R, Zhou H. Variable selection for multivariate failure time data. Biometrika, 2005, 92: 303-316

[10] Fan J, Lin H, Zhou Y. Local partial-likelihood estimation for lifetime data. Ann Statist, 2006, 34: 290-325

撰稿人：孙六全

中国科学院数学与系统科学研究院

如何解决反映变量粗测量下“维数祸根”问题

How to Solve “Curse of Dimensionality” Problem with Coarse Observations for Responses

回归分析是研究反映变量 Y 与解释向量 X 之间关系的重要而有益的工具, 一种简单的回归分析方法是假设参数模型, 然后用标准的技术比如似然方法或最小二乘方法捕捉包含在数据中的信息. 然而在大部分应用研究中, 任何参数模型只是真实情况的一个近似, 要找到能充分正确描述现实情况的模型是非常困难的, 有时甚至是不可能的. 这种情况下, 取而代之的就是使用非参数回归技术, 而非参数回归技术通常使用核光滑思想, 而这一方法的有效性与每一点 x 周围具有充分多的数据观察点提供充分信息密切相关. 然而当点 X 是高维时, 为了保证标准回归技术的有效性, 观察数据总数需要成指数速度增长, 这在实践中通常是不实际的, 在这种情况下随数据维数上升, 标准的回归分析方法将迅速失效, 这就是著名的“维数祸根”问题.

当 (X,Y) 完全观察且 X 是高维时, Li[1] 发展了切片逆回归降维技术, 该技术是将 p 维解释变量投影到一 $k(<p)$ 维子空间并能捕捉关于反映 Y 的全部所需要的信息, 然后估计这 k 个降维方向参数使得标准的光滑技术可以成功而有效地使用. 这一技术后来被 N. Duan 和 K. C. Li[2] 及 T. Hsing 和 R. J. Carroll[3] 等更进一步研究.

现在的问题是在一些实际问题中, Y 的真值测量是困难或昂贵的, 因而使用一些简单或容易的测量方式测量 Y 的替代值, 而只对小部分个体测量 Y 的真值. 也就是观察到的数据类型是 (X,Z) 或 (X,Y,Z), 其中 Z 是 Y 的替代变量. 显然, 当 X 是高维向量时, 考虑降维问题是一个挑战, 自然的问题是切片逆回归技术或其他在完全样本下降维技术仍然适用吗? 如果能, 那么如何针对这种数据类型发展推广已有技术? 如果不能, 能发展其他降维技术吗? 这是我们需要解决的问题.

参 考 文 献

[1] Li K C. Sliced inverse regression for dimension reduction. Journal of the American Statistical Association—Theory and methods, 1991, 86: 316-327

[2] Duan N, Li K C. Slicing regression: a link free regression method. Ann Statist, 1991, 19: 505-530

[3] Hsing T, Carroll R J. Asymptotic theory for sliced inverse regression. Ann Statist, 1992, 20: 1040-1061

撰稿人：王启华
中国科学院数学与系统科学研究院

相依结构下复杂删失数据统计建模问题

Statistical Modelling for Complicated Censored Data with Dependent Structure

复杂删失数据的统计分析是现代统计学的研究热点之一, 是各相关学科发展的重要内容. 分析复杂删失数据, 建立相应的统计模型, 揭示数据的内在规律, 是发展各相应学科的重要基础. 特别是在生物学、医学、生态学、人口学、环境学和经济学等学科的研究中, 随着实验技术、检验方法和数据分析手段的日益提高, 所获得的数据在结构上越来越复杂精细, 所提供的信息也越来越繁杂, 因而也对数据的定量分析提出了更高的要求. 同时, 由于实验条件和其他原因, 反映变量与删失时间具有某种相依性, 如何在各种相依结构下建立相应的统计模型, 进行统计推断以及模型诊断等, 也是当今统计学与生物学、医学、生态学、社会学、环境学和经济学等学科交叉中重要的研究热点问题之一.

复杂删失数据主要包括删失数据、截断数据、区间删失数据、复发事件数据、成组数据、集合数据、纵向数据、丢失数据、测量误差数据等. 在传统的生存分析中, 主要是在反映变量与删失时间相互独立的情况下研究各种参数、非参数和半参数模型的统计问题[1], 主要包括参数回归模型、乘积限估计、Cox 模型、比例几率回归模型、加速寿命模型、线性模型、半参数线性转移模型、Aalen 可加风险率模型、随机效应比例模型以及各种边际半参数模型等. 主要使用的估计方法有：计数过程鞅方法和各种似然方法, 包括极大似然、拟似然、伪似然、部分似然、偏似然、边际似然、经验似然等.

实际观察数据中, 反映变量与删失时间往往具有某种相依性, 使得对复杂删失数据的统计建模和推断变得十分困难, 传统的方法不适用, 必须寻找新的有效的统计方法. 目前这方面的研究已有一些进展. 其中, Emoto 和 Matthews[2] 在生存时间与删失时间服从二维 Weibull 模型下研究了参数的极大似然估计；Huang 和 Wolfe[3] 在随机效应变量服从对数正态下, 利用 EM 算法获得了成组数据的估计方法；Wang 等人[4] 和 Huang 等人[5] 分别研究了带信息删失和死亡时间的复发事件数据的估计问题；Zeng[6,7] 利用协变量降维和似然方法讨论了比例风险模型的估计方法；Huang 等人[8] 利用随机效应和条件似然方法研究了面板计数数据的估计问题；Peng 和 Fine[9] 利用人为的删失方法讨论了相依删失下加速寿命模型的秩估计；Sun 等人[10,11] 分别利用半参数条件模型和联合模型两种方法研究了纵向数据

下反映变量依赖观察时间和删失时间的估计问题.

由于反映变量与删失时间存在各种复杂的相依关系, 目前仍然存在着一些重要的难题有待于寻找有效的统计方法去解决. 主要是怎样充分利用数据提供的信息, 合理地建立这些相依变量所满足的统计模型. 对于非参数模型, 如何获得其最有效的估计; 对于一些高维数据, 为了避免维数祸根问题, 需要寻找合理的半参数模型来拟合数据, 同时给出有效的模型参数估计和模型检验方法. 另外, 对于相依结构下带有测量误差或者丢失的复杂删失数据统计建模也是需要研究的前沿统计问题. 这些研究结果将为临床诊断提供重要的理论依据和实际指导, 并对生物和医学等领域的研究起着推动作用.

参 考 文 献

[1] Kalbfleisch J D, Prentice R L. The Statistical Analysis of Failure Time Data. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2002

[2] Emoto S E, Matthews P C. A Weibull model for dependent censoring. Ann Statist, 1990, 18: 1556-1577.

[3] Huang X, Wolfe R A. A frailty model for informative censoring. Biometrics, 2002, 58: 510-520

[4] Wang M C, Qin J, Chiang C T. Analyzing recurrent event data with informative censoring. J Amer Statist Assoc, 2001, 96: 1057-1065

[5] Huang C Y, Wang M C. Joint modeling and estimation for recurrent event processes and failure time data. J Amer Statist Assoc, 2004, 99: 1153-1165

[6] Zeng D. Estimating marginal survival function by adjusting for dependent censoring using many covariates. Ann Statist, 2004, 32: 1533-1555

[7] Zeng D. Likelihood approach for marginal proportional hazards regression in the presence of dependent censoring. Ann Statist, 2005, 33: 501-521

[8] Huang C Y, Wang M C, Zhang Y. Analysing panel count data with informative observation times. Biometrika, 2006, 93: 763-775

[9] Peng L, Fine J P. Rank estimation of accelerated lifetime models with dependent censoring. J Amer Statist Assoc, 2006, 101: 1085-1093

[10] Sun J, Park D H, Sun L, Zhao X. Semiparametric regression analysis of longitudinal data with informative observation times. J Amer Statist Assoc, 2005, 100: 882-889

[11] Sun J, Sun L, Liu D. Regression analysis of longitudinal data in the presence of informative observation and censoring times. J Amer Statist Assoc, 2007, 102: 1397-1406

撰稿人：孙六全
中国科学院数学与系统科学研究院

样本量的增加能保持原估计的渐近性质吗?

Could Asymptotic Properties of Estimator Remain When Sample Size Increases?

在统计学中, 人们一般会认为样本量的增加能保持原估计的渐近性质, 这看似很合理简单, 同时也非常有意义, 人们能普遍接受它, 但对一般常用估计量 (包括极大似然估计和 M 估计) 却很少见到反例与证明, 这一问题乃属于统计学中的基本问题.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布 (也可不同分布) 样本量为 n 的样本, θ 是待估参数, $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是用某统计方法获得的参数 θ 的估计量. $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m_n}$ 是与原样本独立同分布 (也可不同分布) 样本量为 $m_n (m_n \geqslant 1$, 且对 n 不减) 新增加的样本, 则这时总样本量为 $N = n + m_n$.

猜想　如果 $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \theta$ 有某种渐近性质 (如相合性, 渐近正态性等), 则一般认为 $\hat{\theta}_N(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_N)$ 也具有相同的渐近性质.

这种结论目前绝大部分还是停留在直观上或猜测, 除少数几个估计量外, 例如: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布样本, $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m_n}$ 是与原样本独立同分布新增加的样本, 则可以证明: 如果 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \theta \xrightarrow{p(\cdot)} 0$, 则也有 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \theta \xrightarrow{p(\cdot)} 0$, 这时 θ 为总体期望, 对其他稍一般的估计量很少见到理论证明. 下面的例子则是对 M 估计的一个猜想:

对普通线性模型 $Y_i = x_i'\beta_0 + \epsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\{x_i\}_1^n$ 为已知的 p 维向量, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ (i.i.d.), 其分布满足一定的条件. 记 β 的 M 估计:

$$\hat{\beta}_n = \arg\min_{\beta \in \mathrm{R}^p} \sum_{i=1}^{n} \rho(Y_i - x_i'\beta),$$

其中 $\rho(\cdot)$ 为凸函数, $\rho(\pm\infty) = \infty$. 再增加新的样本. 其 (重新做试验) 得: $Y_{n+j} = x_{n+j}'\beta_0 + \epsilon_{n+j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_N$, (i.i.d.). 其中 $x_{n+j} = x_j$, $N = 2n$. 这时对应于全部样本 β 的 M 估计为

$$\hat{\beta}_N = \arg\min_{\beta \in \mathrm{R}^p} \sum_{i=1}^{N} \rho(Y_i - x_i'\beta).$$

则有: 若 $\hat{\beta}_n$ 是 β 的相合估计, 则 $\hat{\beta}_N$ 也是.

这一结论看起来很简单合理, 但其证明的困难在于对原有 M 估计 $\hat{\beta}_n$ 的相合性要有一个清晰的刻画 (即相合的充分必要条件, 主要施加在设计点列 $\{x_i\}$ 上). 这一结论目前除对最小二乘估计 ($\rho(x) = x^2$) 有所证明外, 对其他的 M 估计还未见任何进展. Drygas[1]、陈希孺[2,3] 均考虑过此问题.

参 考 文 献

[1] Drygas H. Weak and strong consistency of the least squares estimators in regression models. Z Walusch Verw Gebiete, 1976, 34: 119-127

[2] Chen X R, Zhao L C. M-methods in Linear Model. 上海: 上海科技出版社, 1996

[3] 第二届海峡两岸统计与概率学术研讨会. 苏州, 1999

[4] Yuan Shih Chow, Teicher H. Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1980

撰稿人：崔恒建

北京师范大学

最热点猜测*

Hot Spots Conjecture

假设 D 是 $\mathrm{R}^d (d \geqslant 2)$ 中具有 Lipschitz 型边界的有界连通开集. 我们考虑 D 的边界在绝热情形时 D 中的热传播现象, 并用 $u(t,x)$ 来表示在位置 x 处时刻 t 的温度, 因此, $u(t,x)$ 满足具有 Neumann 边界条件的热方程. 最热点 (Hot Spots)$x=x(t)$ 是 $u(x,t)$ 在 t 固定时的最大值点. 最热点猜测是关于 $t\to\infty$ 时 $x(t)$ 是否趋于 D 的边界点的问题. 更加准确的提法如下：

设 $\{\mu_k : k \geqslant 1\}$ 是边界 $\partial\mathrm{D}$ 上具有 Neumann 边界条件的拉普拉斯算子 $-\dfrac{1}{2}\Delta$ 在 $L^2(\mathrm{D}, \mathrm{d}x)$ 中的特征值序列 (按递增排列), 而 $\{\ \varphi_k : k \geqslant 1\ \}$ 为相应的特征函数序列并构成 $L^2(\mathrm{D}, \mathrm{d}x)$ 的标准正交基. 众所周知, $0=\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \cdots$ 且 φ_1 为常数. 对具有 Neumann 边界条件的热方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(x,t), & t>0, \quad x\in \mathrm{D}, \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 0, & t>0, \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{0.1}$$

其基本解 $p(t,x,y)$ 可表示为

$$p(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k t}\varphi_k(x)\varphi_k(y), \tag{0.2}$$

这里 $n(x)$ 在 $x\in\partial\mathrm{D}$ 处指向区域内部的 $\partial\mathrm{D}$ 之单位法向量. 因此, 对绝大多数 (0.1) 的初始值 $u(0,x)$, (0.1) 解的长时间行为由对应于第二特征值 μ_2 的特征函数控制. 由于第二特征值 μ_2 的重数可能大于 1, 因此存在如下三个版本的最热点猜测:

(**HS1**) 对相应于 μ_2 的任何一个非平凡特征函数 $\varphi_2(x)$ 有：

$$\inf_{y\in\partial\mathrm{D}} \varphi_2(y) < \varphi_2(x) < \sup_{y\in\partial\mathrm{D}} \varphi_2(y), \quad \forall x \in \mathrm{D}.$$

(**HS2**) 对相应于 μ_2 的任何一个非平凡特征函数 $\varphi_2(x)$ 有：

$$\inf_{y\in\partial\mathrm{D}} \varphi_2(y) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \sup_{y\in\partial\mathrm{D}} \varphi_2(y), \quad \forall x \in \mathrm{D}.$$

* 该研究部分受美国基金会 NSF Grant DMS-0600206 支持.

(**HS3**) 存在一个相应于 μ_2 的非平凡特征函数 $\varphi_2(x)$ 满足

$$\inf_{y\in\partial \mathrm{D}}\varphi_2(y)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\sup_{y\in\partial \mathrm{D}}\varphi_2(y),\quad \forall x\in \mathrm{D}.$$

原始的最热点猜测由 Jeff Rauch 在 1974 年于 Tulane 大学的偏微分方程会议上提出, 即 (**HS1**) 对 $\mathrm{D}\subset \mathrm{R}^d$ 的每一个区域成立. Rauch 的最热点猜测并未以印刷品形式发表, 直到 1985 年才在 Kawol 的书[6] 中正式发表. 然而, 直到 1999 年才开始吸引人们的注意力. 至此, 关于该猜测及相关模型的大量文章开始发表, 这些文章的作者既有概率论学者也有分析学者 (参看文献 [1]~[7]). 由于具有 Neumann 边界条件热方程的基本解是 $\overline{\mathrm{D}}$ 上正反射布朗运动的转移概率密度, 因而概率论在这一次领域发挥作用是不用惊讶的. 事实上, 开始对最热点猜测进行系统研究的第一篇论文是两位概率学家的论文[2], 他们使用了 $\overline{\mathrm{D}}$ 上反射布朗运动的耦合方法.

(**HS3**) 对任意区域 $\mathrm{D}\subset\mathrm{R}^d$ 不成立. 在文献 [3] 和文献 [4] 中分别证明了对带一个洞的某个平面区域和带两个洞的某种平面区域 (**HS3**) 是错误的. 在这两种情况下, 第二特征值 μ_2 都是单重的.

正面的主要结果如下：当 D 是平面 lip 区域[1,2] 或是关于一条线对称的 C^2 光滑平面凸区域时 (**HS1**) 成立. 此时第二特征值 μ_2 都是单重的. 在这些论文中使用的技巧是一些 $\overline{\mathrm{D}}$ 上反射布朗运动的耦合, 如同步耦合、镜面耦合和标度耦合, 以及关于第二特征函数 $\varphi_2(x)$ 结点线的性质. 关于使用分析方法的一些结果参看文献 [5].

不难看出, 若对区域 $\mathrm{D}_1\subset\mathrm{R}^{d_1}$ 和 $\mathrm{D}_2\subset\mathrm{R}^{d_2}$(**HS2**) 对 D_1 成立蕴含 (**HS2**) 对 $\mathrm{D}_1\times\mathrm{D}_2$ 也成立, 参看文献 [2] 中的命题 2.6.

对最热点猜测的研究至今仍有它的魅力. 例如, 对三维及更高维情形所知甚少, 这是一个概率论和分析的交叉领域, 这是年轻的研究者可以全心投入的研究领域.

下面是这一领域的两个公开问题：

(i) Kawohl 猜测：对 $d\geqslant 2$ 的 R^d 中每一个有界凸区域 (**HS1**) 成立.

(ii) 对每一个单连通的有界平面区域最热点猜测是否都成立？

参 考 文 献

[1] Atar R, Burdzy K. On Neumann eigenfunctions in lip domains. J Amer Math Soc, 2004, 17: 243-265

[2] Banuelos R, Burdzy K. On the “hot spots” conjecture of J Rauch. J Funct Anal, 1999, 164: 1-33

[3] Burdzy K. The “hot spots” problem in planar domains with one hole. Duke Math J, 2005, 129: 481-502

[4] Burdzy K, Werner W. A countersasmple to the “hot spots” conjecture. Ann Math, 1999, 149: 309-317

[5] Jerison D, Nadirashvili N. The “hot spots” conjecture for domains with two axes of symmetry. J Amer Math Soc, 2000, 13: 741-772

[6] Kawohl B. Rearrangements and convexity of level sets in PDE. Berlin: Springer-Verlag, 1985

[7] Pascu M. Scaling coupling of refecting Brownian motions and the hot spots problem. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 4681-4702

撰稿人：陈振庆
美国华盛顿大学 (西雅图), 北京理工大学

阿达马 (Hadamard) 矩阵存在性

Existence of Hadamard Matrices

定义 1 一个 n 行 n 列矩阵 H, 其元素只取 $+1$ 或 -1, 若满足 $HH^{\mathrm{T}}=nI_n$ (H^{T} 为 H 的转置, I_n 为 n 阶单位矩阵), 则称 H 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵.

例 (1) 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 分别为 1 阶和 2 阶的 Hadamard 矩阵. 由 Kronecker 积构造方法容易得到 $n=2^m$ $(m\geqslant 2)$ 阶的 Hadamard 矩阵.

可以证明, n 阶 Hadamard 矩阵存在的必要条件为：

命题 若 n 阶 Hadamard 矩阵存在, 则 $n=1,2$ 或 $n\equiv 0 \pmod 4$.

若 $n\geqslant 8$, 则 n 阶 Hadamard 矩阵的存在性等价于参数为 $(n-1, n/2-1, n/4-1)$ 的平衡不完全区组设计的存在性[3]. 1893 年, Hadamard[1] 猜想上述有关 Hadamard 矩阵存在的必要条件也是充分的, 即：

Hadamard 猜想 对于任意正整数 t, 存在 $4t$ 阶的 Hadamard 矩阵.

自 Hadamard 猜想提出以来, 历经许多数学家一百多年的努力, 有关 Hadamard 矩阵存在性问题研究取得了很大进展[2,5], 但该问题还远未解决. 迄今为止, 尚未确定的最小阶数 n 的值为 668[4].

定义 2 一个如下形状的 Hadamard 阵被称为循环 Hadamard 矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

例如, 以下矩阵是一个 4 阶循环 Hadamard 矩阵：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

循环 Hadamard 矩阵猜想 不存在 $n>4$ 阶循环 Hadamard 矩阵.

这一猜想是 Ryser 有关循环差集猜想的一个推论, 故可认为循环 Hadamard 矩阵猜想起源于 Ryser[6]. 循环 Hadamard 矩阵猜想研究目前最好的结果是: 如果 $4 < n < 548964900$, 则不存在 n 阶循环 Hadamard 矩阵. 这一结果是由 Leung 和 Schmidt[7] 用比较深刻的代数和数论工具得到的.

参 考 文 献

[1] Hadamard J. Résolution d'une question relative aux déterminants. Bulletin des Sciences Mathematiques 1893, 17: 240-246

[2] Craigen R, Kharaghani H. "Hadamard matrices and Hadamard designs", Handbook of combinatorial designs. 2nd ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2007, 273-280

[3] Hughes D R, Piper F C. Design theory. Cambridge: Cambridge, University Press, 1985

[4] Kharaghani H, Tayfeh-Rezaie B. A Hadamard matrix of order 428. J Combin Designs, 2005, 13: 435-440

[5] Seberry J, Yamada M. Hadamard matrices, sequences and block designs// Contemporary design theory: a collection of surveys. New York: Wiley, 1992

[6] Ryser H J. Combinatorial Mathematics. New York: Wiley, 1963

[7] Leung K H, Schmidt B. The field descent method. Des Codes Cryptogr, 2005, 36: 171-188

撰稿人: 1 葛根年　2 向　青　3 殷剑兴

1 浙江大学

2 Delaware 大学

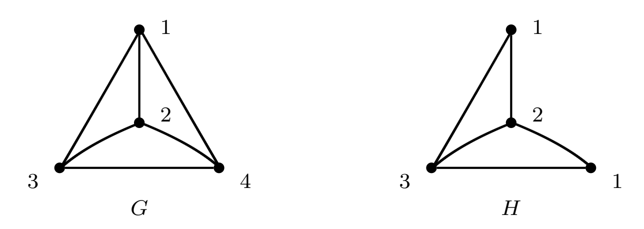
3 苏州大学

Hadwiger 猜想

Hadwiger Conjecture

Hadwiger 猜想是由图论学家 Hugo Hadwiger 于 1943 年提出的, 被 Bollobás, Catlin 及 Erdös[1] 称为 "图论研究中最深刻的难题之一"(one of the deepest unsolved problems in graph theory). 下面我们简要介绍这一猜想的具体内容.

一个图由其顶点集与边集组成, 其中每条边连接两个顶点, 由一条边连接的两个顶点被称为是相邻的. 如果一个图有 k 个顶点且任何两个顶点都是相邻的, 则称这个图为一个 k 阶完全图, 记为 K_k. 给定一个图 G, 我们给 G 的每个顶点染一种颜色 (一般用数字表示), 要求任何两个相邻的顶点都不能染相同的颜色, 所用的最少颜色数被称为是 G 的色数. 显然一个 k 阶完全图的色数恰好是 k(因为它有 k 个点, 至多用 k 种颜色. 另一方面, 它的顶点都是相邻的, 任何两个点都不能用相同的颜色). 下图给出了一个 4 阶完全图 G, 及从 G 中删除一条边后的图 H (顶点旁的数字表示它所染的颜色). Hadwiger 猜想：一个图的色数 k 与 k 阶完全图 K_k 有某种本质联系.



Hadwiger 猜想 (Hadwiger Conjecture)[3]　如果一个图 G 的色数不小于 k, 那么通过删除顶点、边以及收缩边, 可以从 G 得到一个 k 阶完全图 K_k.

如上图所示, 图 H 的色数是 3, 从 H 中删除一个染颜色 1 的顶点, 就得到一个 3 阶完全图 K_3.

Hadwiger 猜想在 $k = 1, 2, 3$ 时是很容易验证的. 因为色数为 1 的图是空图 (每个顶点是一个 K_1), 色数为 2 的图一定含有边 (一条边就是一个 K_2), 而色数为 3 的图一定有一个长度为奇数的圈 (可以被收缩成 K_3). $k = 4$ 的情形也比较容易, Hadwiger 在其文章[3] 中给出了一个证明, Dirac[2] 于 1951 年又证明了如果一个图的色数为 4, 则这个图含有 K_4 的剖分 (这一结论与著名的 Hajós 猜想有关). 当

$k \geqslant 5$ 时, Hadwiger 猜想就变得非常困难了. Wagner[5] 在其 1937 年的一篇文章中证明了 $k = 5$ 时 Hadwiger 猜想与四色问题等价, Robertson, Seymour 与 Thomas[4] 于 1993 年又证明了 $k = 6$ 时 Hadwiger 猜想也与四色问题等价. 因此, 借助于四色定理, Hadwiger 猜想在 $k \leqslant 6$ 的情形已经被解决了. 但 $k \geqslant 7$ 时, Hadwiger 猜想依然在困扰世人.

参 考 文 献

[1] Bollobás B, Catlin P A, Erdös P. Hadwiger's conjecture is true for almost every graph. European J Combinatorics, 1980, 1: 195-199

[2] Dirac G. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J London Math Soc, 1952, 27: 85-92

[3] Hadwiger H. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. Vierteljschr Naturforsch Ges Zürich, 1943, 88: 133-142

[4] Robertson N, Seymour P, Thomas R. Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs. Combinatorica, 1993, 14: 279-361

[5] Wagner K. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Mathematische Annalen, 1937, 114: 570-590

撰稿人：许宝刚
南京师范大学

西摩 (Seymour) 的二阶邻域猜想

Seymour's Second Neighborhood Conjecture

考虑无对称弧的非空简单有向图 D. 设 i 为一个正整数, u 是 D 的一个顶点, u 在 D 中的 i 阶邻域定义为 $N_D^i(u) = \{v \mid u$ 到 v 的有向距离为 $i\}$. 关于有向图, Seymour 提出了如下猜想:

猜想 1(Seymour 的二阶邻域猜想)　任何有向图 D 中都存在一个顶点 v_0, 使得 $|N_D^1(v_0)| \leqslant |N_D^2(v_0)|$.

1995 年, Dean 和 Latka[1] 猜测对于 D 是竞赛图时这个猜想是正确的, 这被 Fisher[3] 于 1996 年证明. 2001 年 Kaneko 和 Locke[4] 证明了猜想 1 对于最小出度小于 7 的有向图正确. 在一个没有发表的文献中, Cohn、Wright 和 Godbole 证明了猜想 1 对于随机图几乎都成立. 最近, Fidler 和 Yuster[2] 于 2007 年证明了猜想 1 对于最小出度为 $|V(D)| - 2$ 的有向图、竞赛图中去掉一个星图的有向图、竞赛图中去掉一个子竞赛图的有向图均成立. 这么多年过去了, 有不少人设法证明猜想 1, 但都没有成功. 这个猜想与下面的 Caccetta-Haggkvist 猜想有紧密的关系:

猜想 2(Caccetta-Haggkvist 猜想)　如果 D 是一个最小出度至少为 $\dfrac{|V(D)|}{k}$ 的有向图, 则 D 一定有一个长度至少为 k 的有向圈.

猜想 1 可以推导出猜想 2 对于 $k = 3$ 时成立. 人们围绕着猜想 2 做了很多的工作, 这包括由 AIM 和 NSF 专门资助的研讨会, 但是迄今为止猜想 1 和猜想 2 仍然没有得到解决.

参 考 文 献

[1] Dean N, Latka B. Squaring a tournament: an open problem. Congr Numer, 1995, 109: 73-80

[2] Fidler D, Yuster R. Remarks on the second neighborhood problem. J Graph Theory, 2007, 55: 208-220

[3] Fisher D C. Squaring a tournament: a proof of Dean's conjecture. J Graph Theory, 1996, 23(1): 15-20

[4] Kaneko Y, Locke S C. The minimum degree approach for Paul Seymour's distance 2 conjecture. Congr Numer, 2001, 148: 201-206

撰稿人：李学良
南开大学

韦斯 (Weiss) 有限局部本原图猜想

Weiss's Finite Locally Primitive Graphs Conjecture

代数图论的焦点问题之一是决定图的自同构群构造, 其本质是有限置换群研究, 它在信息科学、计算机科学和通讯, 特别在互联网络的设计与优化中有着广泛的应用. 而图自同构群研究中的一个关键问题是决定自同构群点稳定化子群的结构. 对于三度连通对称图, 著名图论大师 W. T. Tutte[5] 于 1947 年证明了自同构群点稳定化子群的阶整除 48, 后来代数图论学家 D. Z. Djokovic 和 G. L. Miller[2] 给出了自同构群点稳定化子群所有可能的同构类型. 对于一般度数的连通对称图, 自同构群点稳定化子群的结构亦得到了广泛研究, 如代数图论学家 M.D. Conder, A. Gardiner, C. D. Godsil, C. E. Praeger, V. I. Trofimov, R. Weiss 等在这方面都有深刻的工作.

一个有限传递置换群称为是本原的, 如果它的点稳定化子群是该置换群的极大子群. 一个图称为是局部本原的, 如果图自同构群每一点的点稳定化子群在该点邻域上的限制, 即在与该点相邻顶点集合上的限制是本原的.

Weiss 有限局部本原图猜想 存在正整数集合到自身上的函数 f, 使得对任意点传递局部本原 $d(d>2)$ 度连通图, 其自同构群点稳定化子群的阶不超过 $f(d)$.

可构造例子说明 Weiss 猜想中点传递连通图的局部本原性是必要的. 目前有关该猜想的一个重要进展是如果连通图是 2- 弧传递的, 即图自同构群的点稳定化子群在该点邻域上的限制是 2- 弧传递的, 则 Weiss 猜想成立. 这一重要成果由 A. Gardiner, R. Weiss 和 V. I. Trofimov 通过一系列文章得到. 由 V. I. Trofimov 和 R. Weiss[4] 可得若点传递局部本原连通图的度数是素数或不超过 20, 则 Weiss 猜想成立. 然而仅考虑这样的局部作用很难得到 Weiss 猜想的证明. 另外, M. D. Conder 等通过应用拟本原群的分类给出了一个新的归纳方法, 证明了若 Weiss 猜想对自同构群为几乎单群的图类在一定条件下成立, 则该猜想对所有非二部图成立.

Weiss 有限局部本原图猜想与有限置换群的 Sims[3] 猜想类似. Sims 猜想是说每一个有限本原置换群的点稳定化子群的阶不超过 $f(d)$, 其中 d 是该置换群的一个大于 2 的次轨道长度, f 是上面 Weiss 猜想中提到的整数函数. 尽管置换群的 Sims 猜想已由 P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl 和 G. M. Seitz[1] 完全解决且 Weiss 猜想研究已有较大进展, 但完全解决 Weiss 猜想还是一件遥远且困难的工作.

参 考 文 献

[1] Cameron P J, Praeger C E, Saxl J, Seitz G M. On the Sims conjecture and distance transitive graphs. Bull London Math Soc, 1983, 15: 499-506

[2] Djokovic D Z, Miller G L. Regular groups of automorphisms of cubic graphs. J Combin Theory B, 1980, 29: 195-230

[3] Sims C C. Graphs and finite permutation groups. Math Z, 1967, 95: 76-86

[4] Trofimov V I, Weiss R. Graphs with a locally linear group of automorphisms. Math Proc Cambr Phil Soc, 1995, 118: 191-206

[5] Tutte W T. A family of cubical graphs. Proc Cambr Phil Soc, 1947, 43: 459-474

撰稿人：冯衍全
北京交通大学

并闭集猜想

Union-Closed Sets Conjecture

1985 年 D. Duffus 提出如下猜想[1]：设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是集合一个并闭的子集族, 即对任意的 i, j 有 $A_i \cup A_j \in \mathscr{A}$, 则存在 $\cup A_i$ 的一个元素包含在 $\mathscr{A}$ 中的至少 $n/2$ 个集合中.

后来人们发现 P. Frankl 早在 1979 年就提出这个猜想的 "交闭" 的版本[2], 即：如果对任意的 i, j 有 $A_i \cap A_j \in \mathscr{A}$, 则存在 $\cup A_i$ 的一个元素包含在 $\mathscr{A}$ 中的至多 $n/2$ 个集合中. 因此, 这个猜想又称 Frankl 猜想. 容易证明这个猜想等价于下面的格论的命题：设 L 是一个 n 元有限格, 则存在 L 的一个并–不可约元素 x 使得由它生成的主对偶序理想 $V_x = \{y \in L : y \geqslant x\}$ 包含至多 $n/2$ 个元素. 在这里我们说 x 是并–不可约的, 是指不存在 $y, z \in L$ 满足 $x = y \vee z$.

这个看起来简单而初等的问题证明起来却十分困难, 因此有人称它是组合数学中最困难的问题之一, 著名组合学家 R. Stanley 称它是 "恶魔般的问题"(diabolical problem). 关于这个问题的最新文献见 [3]、[4], 关于它的图论的版本见文献 [5].

参 考 文 献

[1] Duffus D. Open problem session. Graphs and Order: 525, D. Reidel, 1985

[2] Frankl P. Extremal Set Systems, Cambridge: MIT Press, 1995, 1296

[3] Morris R. FC-families and improved bounds for Frankl's conjecture. European Journal of Combinatorics, 2006, 27: 269-282

[4] Bošnjak I, Marković P. The 11-element case of Frankl's conjecture. Electronic Journal of Combinatorics, 2008, 15: R88

[5] Mohamed H EI-Zahar. A graph-theoretic version of the union-closed sets conjecture. J Graph Theory, 1998, 26: 155-163

撰稿人：王　军
上海师范大学

独立系的 Chvátal 猜想

Chvátal's Conjecture for Independence Systems

设 S 是一个有限集, $\mathscr{A}$ 是 S 的一个子集簇 (即 $\mathscr{A}$ 的每个元素是 S 的一个子集). 若 $\mathscr{A}$ 中每个元素的子集也在 $\mathscr{A}$ 中, 即 $A \in \mathscr{A}$ 和 $B \subseteq A$ 蕴含 $B \in \mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 是一个独立系 (independent system), 亦称为降簇 (downset) 或理想 (ideal) 或单复形 (simplicial complex). 若 $\mathscr{A}$ 中任意两个元素相交非空, 则称 $\mathscr{A}$ 是交簇 (intersecting family). 特别地, 若 $\mathscr{A}$ 中的所有元素之交非空, 则称 $\mathscr{A}$ 是星 (star).

例如 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ 是集合 $\{1,2,3\}$ 上的一个独立系, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ 是该独立系中的一个 (最大) 星, 而 $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ 是一个 (最大) 交簇但不是星 (此处最大性是指该子集簇所含元素个数最多而言的).

交簇的研究是极值集合论 (Extremal set theory) 的重要内容[3], 著名的 Erdös-Ko-Rado (EKR) 定理是其中的一个核心结果, 而 Chvátal[2] 在 1972 年所提出的如下猜想是中心问题之一.

Chvátal 猜想　每个独立系中必有一个最大交簇是星.

目前仅知 Chvátal 猜想对一些特殊的独立系成立. 例如若独立系由 S 的所有子集组成, 则 Chvátal 猜想显然成立; 若独立系由 S 的所有含元素个数不超过 k 的子集组成, 其中 k 是不超过 $|S|/2$ 的一个正整数, 则由 EKR 定理可知此时猜想也是对的.

目前研究 Chvátal 猜想的基本途径是借助 Kleitman 引理[4] 和 Berge 定理[1], 但进展甚微. 文献 [5] 中包括了 Chvátal 猜想进展的一个简单综述和相关文献.

参 考 文 献

[1] Berge C. A theorem related to the Chvátal conjecture. Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975) pp. 35-40. Congressus Numerantium, No. XV, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1976

[2] Chvátal V. Intersecting Families of Edges in Hypergraphs Having the Hereditary Property. Berlin: Springer-Verlag, 1974, 61-66

[3] Frankl P. Extremal Set Systems, “Handbook of Combinatorics” (R. L. Graham, M. Grotschel, and L. Lovász, eds.), MIT Press & North-Holland, 1995

[4] Kleitman D J. Families of non-disjoint subsets. J Combin Theory, 1966, 1: 153-155

[5] Wang Y. Notes on Chvátal's conjecture. Discrete Math, 2002, 247: 255-259

撰稿人：王　毅
大连理工大学

非素数幂阶射影平面的存在性

Existence of Projective Planes of Non-prime Power Order

定义　设正整数 $n \geqslant 2$, n^2+n+1 元点集上由 n^2+n+1 条线组成的一个满足以下条件的关联结构称为 n 阶射影平面 (projective plane), 记为 $\mathrm{PG}(2,n)$：

(1) 任二不同点都恰好同时落在唯一的一条线上,

(2) 任二不同线都恰好有唯一的一个交点,

(3) 每个点都恰在 $n+1$ 条线上,

(4) 每条线都恰含 $n+1$ 个点.

一个 $\mathrm{PG}(2,n)$ 等价于一个参数为 $(n^2+n+1, n+1, 1)$ 的平衡不完全区组设计[4]. 已经证明：当 n 为素数幂时, $\mathrm{PG}(2,n)$ 都存在[3]. 而对所有非素数幂的 $n>1$, 尚未发现一个 $\mathrm{PG}(2,n)$ 存在的例子.

命题 [1]　设 $n \equiv 1, 2 \bmod (4)$, 且 n 的非平方因子中有形如 $4t+3$ 的素因子, 则不存在 n 阶射影平面.

问题　对于非素数幂 n, 是否存在 n 阶射影平面?

当 $n=10$ 时, $\mathrm{PG}(2,n)$ 的不存在性已被 Lam 等人通过计算机证明[5].

射影平面猜想　存在 $\mathrm{PG}(2,n)$ 当且仅当 n 为素数幂.

参 考 文 献

[1] Bruck R H, Ryser H J. The non-existence of certain finite projective planes. Canad J Math, 1949, 1: 88-93

[2] Dembowski P. Finite Geometries. New York: Springer-Verlag, 1968

[3] Hirschfeld J. Projective Geometries Over Finite Fields. Oxford: Oxford University Press, 1983

[4] Hughes D R, Piper F C. Design Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

[5] Lam C W H, Thiel L, Swiercz S. The nonexistence of finite projective planes of order 10. Canad J Math, 1989, 41(6): 1117-1123

撰稿人：葛根年
浙江大学

经典拉姆齐 (Ramsey) 函数的估值

Estimating Classical Ramsey Functions

20 世纪 30 年代初, 英国逻辑学家 Ramsey 的一篇论文[5] 证明了这样一个定理: 设 S 是一个点数为 N 的集合, 对给定正整数 n 和 t, 只要 N 充分大, 则无论怎样给 S 的子集用两种颜色着色, 总有 S 的一个 n 元子集 T, 使得 T 的所有 t- 元子集着色一致. 在组合数学中, 现在把这类描述没有绝对的无序的理论通称为 Ramsey 理论. 满足上述条件的最小 N(是 n 和 t 的函数), 被称为 Ramsey 数. 其实, 在 Ramsey 的论文之前, van der Waerden 证明了只要 N 充分大, 无论样给 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 中的数用两种着色, 总有一个长为 n 的算术级数, 证明参见文献 [3]. 相关的研究, 现作为整数 Ramsey 理论的一部分, 产生了许多重要的数学结果, 例如 Szemerédi 正则引理 (regularity lemma), 利用这个引理于泛函分析和数论, Gowers 和陶哲轩分别在 1998 年和 2006 年获得 Fields 奖.

我们现在看看 Ramsey 定理在图论中的情形. 图 $G = (V, E)$ 由点集 V 和边集 E 构成, 每一条边其实是 V 的一个二元子集. 当边集 E 包含所有可能的边, 则称该图为完全图, 点数为 N 的完全图记为 K_N. 经典 Ramsey 函数 $r(m, n)$ 定义为最小的正整数 N, 使得无论如何给 K_N 的边用红蓝着色, 总有红色的 K_m 或者有蓝色的 K_n. 显然 $r(1, n) = 1$ 且 $r(2, n) = n$. 通常讲的 Ramsey 数是指 $n \geqslant m \geqslant 3$ 时非平凡的 $r(m, n)$. 让我们通俗地理解定义 $r(n, n)$ 为最小的正整数 N, 使得无论哪 N 个人, 他们中或有 n 个人相互认识, 或有 n 个人互不认识. 设想有 5 个人围坐一圈, 每个人仅认识自己的两个相邻者. 则他们既没有 3 个人两两认识, 又没有 3 个人互不认识, 因而 5 达不到前面定义的 $r(3, 3)$, 故 $r(3, 3) > 5$. 要是有 6 个人, 记为 $v_1, v_2, \cdots, v_6$, 情况就不同了. 考察 v_1, 在其余的 5 人中, 他至少认识 3 人, 或至少不认识 3 人. 若为前者, 不妨设 v_1 认识 v_2, v_3, v_4. 当 v_2, v_3, v_4 中有两个人相互认识时, 则 v_1 和这俩的三人中两两相互认识, 否则 v_2, v_3, v_4 三人中两两相互不认识. 当 v_1 至少不认识 3 人时的情况类似. 因而我们有 $r(3, 3) \leqslant 6$ 故 $r(3, 3) = 6$. 这样简单论证可以加强我们对定义的理解, 但难以为继. 当 m 和 n 稍微大一点, 这种论证就不可能了. 事实上, 目前已知准确值的 Ramsey 数只有 9 个: $r(3, n)$, $3 \leqslant n \leqslant 9$, $r(4, 4)$ 和 $r(4, 5)$. 然而, 在不否定寻找个别准确值努力的同时, 要认识到数学上更有意义的是估计 $r(m, n)$ 作为函数的值的变化趋势. 没人奢望得到这些函数的公式. 这不奇怪, 数论中到 n 为止的质数个数 $\pi(n)$ 就是一个例子 (尽管容易算出大量 $\pi(n)$ 的

准确值). 著名的 Erdös-Szerekes 上界是 $r(m,n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$. 下列结果中的下界是 Spencer 使用 Lovász 局部引理 (Local Lemma) 而获得的, 有 30 多年的历史, 而上界则时间不长. 值得指出的是, 局部引理是由于这个应用而广受关注的, 成为 Lovász 在 1999 年获得 Wolf 奖的主要结果. 目前我们知道的最好的结果是下边两个估界.

对角 Ramsey 函数 (diagonal Ramsey function) $r(n,n)$：目前已知的估计是, 对任何 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{e} - \epsilon\right) n \sqrt{2}^{\,n} \leqslant r(n,n) \leqslant n^{-c \log n / \log\log n} \binom{2n-2}{n-1},$$

这里 $c > 0$ 是一个常数, 其中下界接近 $\sqrt{2}^{\,n}$, 上界[2] 接近 4^n, 两者相差甚远. 有人猜测当 n 充分大时 $r(n,n)$ 在 $(2-\epsilon)^n$ 和 $(2+\epsilon)^n$ 之间.

非对角 Ramsey 函数 (non-diagonal Ramsey function) $r(m,n)$：固定 $m \geqslant 3$, 目前已知的估计是, 对任何 $\epsilon > 0$, 只要 n 充分大,

$$c\left(\frac{n}{\log n}\right)^{(m+1)/2} \leqslant r(m,n) \leqslant (1+\epsilon)\frac{n^{m-1}}{(\log n)^{m-2}},$$

这里 $c = c(m) > 0$ 是一个仅和 m 相关的常数. 普遍认可的猜测是上界已经接近真值. 对 $m = 3$, Kim[4] 已经证明 $r(3,n)$ 与 $n^2/\log n$ 之比不超过一常数, 因此获得了 Fulkerson 奖.

这里很自然地产生以下的公开问题：上述的两个估界是否可以改进? Ramsey 理论研究了一个有趣的现象: 为了改进结果, 有时会产生新方法, 这些常常促进了其他学科的发展. 除了前面提到的 Szemerédi 正则引理和 Lovász 局部引理, 还有像随机方法、半随机方法、随机图理论等, 都在其他方面产生了很大的影响, 不少论文发表在 Nature 和 Science 上. Ramsey 理论的研究, 把数学的许多分支密切地联系在一起, 使之相互促进. 它还揭示了一个深刻的现象: 图的结构比我们认识的要丰富得多. 这一点有些像我们对实数的认识: 我们接触的实数基本上是有理数, 但几乎所有的实数都是无理数. 读者可从文献 [1]、[3] 对现代图论和 Ramsey 理论有一个了解.

参 考 文 献

[1] Bollobás B. Modern Graph Theory. New York: Springer-Verlag, 1998

[2] Conlon D. A new upper bound for diagonal Ramsey numbers. Annals Math, to appear

[3] Graham R, Rothschild B, Spencer J. Ramsey Theory. New York: Wiley, 1990

[4] Kim J. The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$. Random Struc Algo, 1995, (7): 173-270

[5] Ramsey F. On a problem of formal logic. Proc London Math Soc, 1930, 48: 264-286

撰稿人：李雨生
同济大学

柯克曼三元系大集的存在性问题

Existence Problem of Large Sets of Kirkman Triple Systems

1850 年, T. P. Kirkman 提出了一个问题: “十五个女生每天排成 5×3 队列外出散步, 能否给出一周的队列安排, 使得任意两人恰好有一天排在同一行?” 在同一年, J. J. Sylvester 进一步提出: “这样的安排能否连续十三周, 使得任意三人恰好有一天排在同一行?” 这就是著名的 “Sylvester 十五女生问题”. 下面给出这一问题所涉及的组合设计领域的一般概念.

设 X 是一个 v 元集合, $\mathcal{B}$ 是 X 中一些 3-子集 (称为区组) 组成的族, 若 X 的每个 2-子集都恰好包含于 $\mathcal{B}$ 的一个区组中, 则称 $(X,\mathcal{B})$ 是 v 阶斯坦纳三元系. 若 v 阶斯坦纳三元系 $(X,\mathcal{B})$ 的区组集 $\mathcal{B}$ 可分拆成若干个互不相交的子集, 使得每个子集都构成集合 X 的分拆，则称 $(X,\mathcal{B})$ 为 v 阶柯克曼三元系, 记作 $KTS(v)$. $KTS(v)$ 存在的充要条件是 $v=6t+3$, $t\geqslant 1$.

由于一个 v 阶柯克曼三元系 $KTS(v)$ 包含 $v(v-1)/6$ 个区组，v 元集合 X 中所有的 $v(v-1)(v-2)/6$ 个 3-子集有可能划分成 $v-2$ 个互不相交的子集族, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\cdots$, $\mathcal{B}_{v-2}$, 并使得每个 $(X,\mathcal{B}_i)$ $(1\leqslant i\leqslant v-2)$ 是一个 $KTS(v)$. v 元集 X 上 $v-2$ 个互不相交的 $KTS(v)$ 的集合称为 v 阶柯克曼三元系大集, 记为 $LKTS(v)$. **柯克曼三元系大集的存在性问题 (existence problem of large sets of Kirkman triple systems)**: 对于任意 $v=6t+3$, $t\geqslant 1$, 是否存在 v 阶柯克曼三元系大集?

“Sylvester 十五女生问题” 即是 $LKTS(15)$ 的存在性问题, 直到 1974 年, 这一问题才被 Denniston[1] 借助计算机解决. 柯克曼三元系大集的存在性问题提出迄今已有 150 多年的历史, 一直为组合学者广泛关注, 但其进展却相当缓慢. 除了一些小阶数的直接构造, 值得一提的是 1979 年 Denniston[2] 给出了柯克曼三元系大集的三倍递归构造及相应产生的无穷类. 进而, Denniston, Schreiber, Wilson 等陆续解决了 205 之内的一些阶数. 直到 20 世纪末以来, 柯克曼三元系大集的研究才出现了转机: 朱烈和张胜元[5] 改进了 Denniston 的三倍构造; 雷建国[3] 引进了 LR-设计, LGKS 等辅助设计, 给出了 $LKTS(v)$ 的一些递归构造; 季利均[4] 借助其在 3-设计方面的进展, 利用 2-可分的斯坦纳四元系得到了 $LKTS(v)$ 存在的无穷类; 康庆德和袁兰党也得到了 $LKTS(v)$ 存在的无穷类. 但是, 这些零星的结果距离 $LKTS(v)$ 存在性问题的完全解决依然相去甚远. 目前 $LKTS(v)$ 的存在性问题尚未解决的最小阶数是 $v=21$.

参 考 文 献

[1] Denniston R H F. Sylvester's problem of the 15 schoolgirls. Discrete Math, 1974, 9: 229-238

[2] Denniston R H F. Further cases of double resolvability. J Combin Theory A, 1979, 26: 298-303

[3] Lei J. On large sets of Kirkman triple systems with holes. Discrete Math, 2002, 254: 259-274

[4] Ji L. A construction for large sets of Kirkman triple systems. Des Codes Cryptogr DOI 10. 1007/s 10623-007-9069-2

[5] Zhang S, Zhu L. An improved product construction for large sets of Kirkman triple systems. Discrete Math, 2003, 260: 307-313

撰稿人：常彦勋
北京交通大学

拉丁方的横截问题

Transversals of Latin Squares

令 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$, 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵, 若 A 的每一行的 n 个元素、每一列的 n 个元素都是 $[n]$ 的一个全排列, 则称 A 是一个拉丁方. A 的一个横截是指 A 的 n 个位置的集合, 其中任意两个位置既不同行也不同列. 部分横截是横截的一个子集. 横截 (或者部分横截) 称为是拉丁的, 若这个横截 (或者部分横截) 的任意两个位置上的元素都不相同. 1967 年 Ryser[3] 提出以下猜想.

猜想 1(Ryser 猜想) 每个奇数阶拉丁方都有一个拉丁横截. 更一般地, 拉丁方的横截的个数与其阶数有相同奇偶性.

容易检验, 每个 5 阶拉丁方有 3 个或者 15 个拉丁横截. 然而 Parker 给出了很多 7 阶拉丁方, 它们的拉丁横截的个数为偶数. 从而此猜想在奇数阶的情况下不成立. Balasubramanian[1] 证明了偶数阶拉丁方的拉丁横截的个数是偶数, 因此当拉丁方的阶数是偶数时, Ryser 猜想是正确的. 由于存在偶数阶拉丁方没有拉丁横截, Stein[5] 和 Brualdi[2] 独立提出以下猜想.

猜想 2 每个 n 阶拉丁方都有一个阶数至少是 $n-1$ 的部分拉丁横截.

这两个猜想也可以非常形象地描述为一个图论问题.

设 $G=(V,E)$ 是一个图, G 的顶点集为 V, 边集为 E. G 的一个边着色 $c:E\to\{1,2,\cdots,r\}$, 是 G 的边集 E 到颜色集 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的一个映射. 若这个映射为满射, 则称此着色为 G 的一个 r- 边着色. 若着色 c 满足 G 的任意两条相邻的边不同色, 则称此着色为 G 的正常着色. 边着色图 G 的子图 H 称为异色的 (或彩虹的), 若 H 中任意两条边不同色.

图 G 中的独立边子集 M 称为 G 的一个匹配. 若 G 中的每个点 v, 都存在 M 中的边与 v 关联, 则称 M 是 G 的完美匹配, 或者 1-因子. 若 $M_1,M_2,\cdots,M_s$ 是 G 的 s 个两两不交的 1-因子, 且 $M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_s=E$, 则称 $M_1,M_2,\cdots,M_s$ 为 G 的一个 1-因子分解. 一个 1-因子分解也可以看成是 G 的一个恰好使用了 s 种颜色的正常边着色.

n 阶拉丁方 A 对应一个完全二部图 $K_{n,n}$ 的恰好使用 n 种颜色的边正常着色, 或者称为 $K_{n,n}$ 的一个 1-因子分解. 令 $K_{n,n}=(X,Y)$, $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, 边 x_iy_j 对应 A 的第 i 行第 j 列个位置, 边 x_iy_j 所着的颜色对应 A 的第 i 行第 j 列上的元. A 的一个拉丁横截对应 $K_{n,n}$ 的相应边着色中的

一个异色完美匹配, A 的一个拉丁部分横截对应 $K_{n,n}$ 的相应边着色中的一个异色匹配. 因此这两个猜想也可以叙述为:

猜想 1(Ryser 猜想)　当 n 为奇数, $K_{n,n}$ 的任意 1-因子分解都存在一个异色完美匹配.

猜想 2　$K_{n,n}$ 的任意 1-因子分解中都存在一个至少含有 $n-1$ 条边的异色匹配.

Shor[4] 证明了每个 n 阶拉丁方都有一个阶数至少是 $n-5.53(\log n)^2$ 的部分拉丁横截, 即 $K_{n,n}$ 的任意 1-因子分解中都存在一个至少含有 $n-5.53\ (\log n)^2$ 条边的异色匹配. 除此之外, 这两个猜想的研究尚无大的进展.

参 考 文 献

[1] Balasubramanian K. On transversals in latin squares. Linear Algebra & Appl, 1990, 131: 125-129

[2] Dénes J, Keedwell A D. Latin squares: new developments in the theory and applications. Ann Disc Math 46, North-Holland, New York, 1991

[3] Ryser H J. Neuere probleme der kombinatorik// Vortrage uber Kombinatorik Oberwolfach. Mathematiches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1967, 24-29

[4] Shor P W. A lower bound for the length of a partial transversal in a Latin square. J Combin Theory Ser A, 1982, 33: 1-8

[5] Stein S K. Transversals of Latin squares and their generalizations. Pacific J Math, 1975, 59(2): 567-575

撰稿人：李学良
南开大学

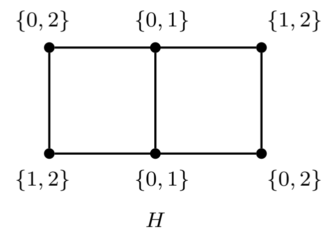
列表染色猜想

List Coloring Conjecture

列表染色是经典染色的推广, 这一概念是由图论学家 Vizing[5], 及 Erdös, Rubin 和 Talor[1] 分别独立地提出的, 其原始目的都是为了解决经典染色中的问题. 下面我们简要介绍这一概念及相关猜想的具体内容.

一个图由其顶点集与边集组成, 其中每条边连接两个顶点, 由一条边连接的两个顶点被称为是相邻的. 给定一个图 G, G 的一个 k– 染色 c 是从图的顶点集 $V(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映射, 使得当顶点 u 与 v 相邻时 $c(u)\neq c(v)$. 图 G 的色数是使得相邻的顶点都被染不同颜色所需的最少颜色数, 记为 $\chi(G)$.

下面是列表染色的定义. 对于给定的图 G, 我们对 G 的每一个顶点 v 分配一个颜色集 $L(v)$, 且记 $L=\{L(v)|v\in V(G)\}$. 如果存在从 $V(G)$ 到 $\cup_{v\in V(G)}L(v)$ 的一个映射 c, 使得对 G 的任一个顶点 u 都有 $c(u)\in L(u)$, 且当顶点 u 与 v 相邻时 $c(u)\neq c(v)$, 则称 c 是 G 的一个 L-列表染色. 如果对任一个预先分配的颜色列表 L, 当 $|L(v)|\geqslant k$ 对每个顶点都成立时, 总能找到 G 的一个 L-列表染色, 则称 G 是 k-列表可染色的. G 的列表色数, 记为 $\chi_l(G)$, 是使得 G 是 k-列表可染的最小正整数 k. 下面是一个图 H, 每个顶点旁边的集合表示该顶点的可用颜色集. 易见这个图对于给定的颜色列表 L 不是 L-列表可染的, 所以 $\chi_l(H)>2$.



H

容易看出, 当颜色列表 L 中每个顶点的颜色集都一样时 (不妨设任一个顶点 v 的颜色集 $L(v)$ 都是 $\{1,2,\cdots,k\}$), G 的一个 L-列表染色就是它的一个 k-染色. 所以说图的列表染色是经典染色的自然推广. 对任一个图 G 都有 $\chi_l(G)\geqslant\chi(G)$, 且严格不等式成立. 上图就给出了一个例子. 这个图 H 是一个二部图, 故 $\chi(H)=2$, 但 $\chi_l(H)>2$. 在哪些图上这两个参数相同呢 ? Vizing 猜想: 在线图上, 这两个参数取相同的值. 给定一个图 G, 其线图 $L(G)$ 是由 G 衍生出来的一个新图, $L(G)$ 的顶点集是 G 的全体边, $L(G)$ 中两个顶点相邻当且仅当它们各自对应的 G 的边有

一个公共的顶点.

列表染色猜想(List Coloring Conjecture)[5] 对任一个图 G, $\chi_l(L(G))=\chi(L(G))$.

到目前为止, 这一猜想只有部分结果. 1995 年, Galvin[2] 证明了列表染色猜想在二部图上成立, 即对任一个最大度为 Δ 的图 H, $\chi_l(L(H)) = \chi(L(H)) = \Delta$. 1996 年, Kahn 证明了对任一个最大度为 Δ 的图 G, $\chi_l(L(G)) = A\#(1 + o(1))\Delta$, 即列表染色猜想从渐近角度上是成立的.

因为任一个图的线图都是无爪图 (不含有 $K_{1,3}$ 作为导出子图的图), Gravier 和 Maffray 于 1997 年提出一个更强的猜想[3]: 每一个无爪图 G 都满足 $\chi_l(G) = \chi(G)$.

参考文献

[1] Erdös P, Rubin A L, Taylor H. Choosability in graphs. Congr Numer, 1979, 26: 125-157

[2] Galvin F. The list chromatic index of a bipartite multigraph. J Combin Theory Ser B, 1995, 63: 153-158

[3] Gravier S, Maffray F. Choice number of 3-colorable elementary graphs. Disc Math, 1997, 165/166: 353-358

[4] Kahn J. Asmptotically good list colorings. J Combin Theory Ser A, 1996, 73: 1-59

[5] Vizing V G. Vertex coloring with given colors. Diskret Anal, 1976, 29: 3-10

撰稿人: 许宝刚
南京师范大学

旅行售货员问题

The Traveling Salesman Problem

旅行售货员问题又名货郎担问题. 有一个售货员, 要在 N 个不同的城市推销他的产品, 考虑到旅行成本问题, 他的最佳选择是从某一个城市出发, 沿着一条总旅行费用最低的线路, 经过每一个城市恰好一次, 最后再回到出发的城市.

我们把每个城市看作一个点, 如果两个城市之间可以通行, 就用一条边连接相应的这两个顶点, 两城市间的通行费用就是这条边上的权重. 这样我们就得到一个 N 阶边赋权图, 旅行售货员问题就是在这个图上找一个边权总和最小且长度为 N 的圈. 当每条边上的权重都一样时, 这就是图论中著名的哈密顿 (Hamilton) 圈问题.

旅行售货员问题是最初的六个 NP-完全问题之一. 除非 P=NP, 这一问题甚至没有常数因子的近似算法. 有关这一问题的更详细的内容, 有兴趣的读者可进一步参阅文献 [5].

在图的哈密顿圈问题上, 我国图论工作者做出了很多非常出色的工作, 在国际上有很重要的影响, 最具代表性的是我国图论学家范更华[2] 于 1984 年推广著名的 Ore 条件得到的关于图的圈性结构的定理, 开辟了圈性结构研究的一个新方向, 被国际图论界命名为 Fan 定理、Fan 条件而被广泛引用. 这一领域中有许多尚未解决的问题, 其中有两个受到国际图论界的广泛关注. 一个是关于平面图哈密顿性的 Barnette 猜想, 另一个是关于线图哈密顿性的 Thomassen 猜想. 平面图已为大家所熟知, 在给出两个猜想之前, 我们先介绍一下线图的概念. 给定一个图 G, 我们来构造一个新图 H, 其中 H 的顶点集就是 G 的边集, 当且仅当 G 中的两条边有一个公共顶点时, H 中相应的两个顶点之间有一条边. 图 H 称为是图 G 的线图. 作为例子, 读者很容易验证一个圈的线图与这个圈本身是同构的, 而一个星的线图就是一个完全图.

Barnette 猜想(Barnette Conjecture)[3]　任何一个 3-正则, 3-连通的平面二部图有一个哈密顿圈.

Thomassen 猜想(Thomassen Conjecture)[6]　任一个 4-连通线图都有一个哈密顿圈.

这两个猜想中, 前一个是关于非常稀疏图类的哈密顿性, 而后一个则是关于相对稠密图类的哈密顿性, 因此备受关注. Barnette 猜想到目前为止还没有任何实质

性进展, 关于 Thomassen 猜想, 已知 4- 边连通图的线图及 7-连通线图都有哈密顿圈 (见文献 [4]). 读者可参阅文献 [3]、[4] 去了解有关图的哈密顿圈问题的更多内容及研究进展.

在谈到旅行售货员问题时, 另一个必须提到的是中国邮递员问题 (Chinese Postman Problem), 这是第一个用中国人命名的图论问题. 用图论的语言来描述, 中国邮递员问题要求在一个边赋权图中找出一条总权重最小且经过每条边至少一次的路径. 这一问题因最早由我国图论学家管梅谷提出并研究而被著名组合优化学家 Edmonds[1] 赋予此名, Edmonds 同时还给出了多项式时间算法彻底解决了这一问题.

参考文献

[1] Edmonds J, Johnson E L. Matching, Euler tours and the Chinese postman. Math Programming, 1973, 5: 88-124

[2] Fan G H. New sufficient conditions for cycles in graphs. J Combin Theory B, 1984, 37: 221-227

[3] Gould R J. Updating the Hamiltonian problem—a survey. J Graph Theory, 1991, 15: 121-157

[4] Gould R J. Advances on the Hamiltonian problem—a survey. Graph and Combinatorics, 2003, 19: 7-52

[5] Lawler E L, Lenstra J K, Rinnooy Ken A H G, Shmoys D B. The Travaling Salesman Problem. Hoboken: Wiley, 1985

[6] Thomassen C. Reflection on graph theory. J Graph Theory, 1986, 10: 309-324

撰稿人：许宝刚
南京师范大学

球面上的 g-猜想

The g-Conjecture for Spheres

球面上的 g-猜想是关于一个 $(d-1)$-维球面的三角剖分其 i-维面的可能个数的完全刻画, 其中 $0 \leqslant i \leqslant d-1$. 一个抽象的单纯复形 Δ 被称为一个 $(d-1)$- 维球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的三角剖分, 如果它的几何实现 (同拓扑学中定义) 和 $\mathbb{S}^{d-1}$ 同胚. 令 f_i 表示 Δ 的 i-维面的个数, 其中 $0 \leqslant i \leqslant d-1$, 且 $f_{-1}=1$. 定义 Δ 的 h-向量 $h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ 为

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}.$$

对于 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的任意一个三角剖分, 则 Dehn-Sommerville 方程 $h_i = h_{d-i}$ 成立. 定义 Δ 的 g-向量 $g(\Delta)=\left(g_0,g_1,\cdots,g_{\lfloor d/2\rfloor}\right)$ 为

$$g_0=1, \quad g_i = h_i - h_{i-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2\rfloor.$$

定义一个多重复形 (multicomplex) 为一个由非负整数向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ (对某个 n) 构成的集合 Γ, 使得若 $(a_1,\cdots,a_n)\in\Gamma$ 且 $0\leqslant b_i\leqslant a_i$, 则有 $(b_1,\cdots,b_n)\in\Gamma$. 向量 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的度 (degree) 定义为 $\sum a_i$.

球面上的 g-猜想 一个向量 $\left(g_0,g_1,\cdots,g_{\lfloor d/2\rfloor}\right)$ 是 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的一个三角剖分的 g-向量当且仅当存在一个多重复形 Γ, 使得 Γ 恰含有 g_i 个度为 i 的向量, 其中 $0\leqslant i\leqslant\lfloor d/2\rfloor$.

在 g-猜想中有一个关于向量 $(g_0,g_1,\cdots,g_{\lfloor d/2\rfloor})$ 的较复杂的数值刻画, 可参见文献 [5]. 一类特殊且重要的球面三角剖分是单纯多面体 (simplicial polytope). 它们是真面 (proper face) 为单形 (从而它们的边界是一个三角剖分球面的几何实现) 的凸多面体 (convex polytope). 当 $d\geqslant 4$ 时, 已经知道存在非多面体 (即并非来自于单纯多面体) 的 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的三角剖分.

McMullen[3] 首先明确地表述了单纯多面体上的 g-猜想, 由于几乎没有什么证据, 这可谓是一个大胆的猜想. 他意识到这个猜想有可能在球面上也成立, 但却不愿正式提出这个更一般的猜想. Stanley[4] 首先正式提出了球面上的 g-猜想, 他甚至认为 g-猜想还可以推广到比球面更一般的对象上, 于是提出了一个更一般的被称为 Gorenstein* 复形上的 g-猜想的猜想. 单纯多面体上的 g-猜想的充分性被 Billera

和 Lee[2] 所证明, 必要性被 Stanley[4] 所证明. 可以证明, 若充分性在单纯多面体上成立, 则在球面上也成立, 因此仅剩下必要性未被证明. 单纯多面体上的必要性证明使用了深刻的代数几何中的工具; 后来 McMullen 给出了一个更为初等的证明, 但仍然是非常代数化的证明.

f-向量理论仍是代数组合的一个非常活跃的研究领域. 进一步的研究见参考文献 [1] 和 [5].

参 考 文 献

[1] Bayer M M, Lee C W. Combinatorial aspects of convex polytopes// Handbook of Convex Geometry. Vol. A. Amsterdam: North-Holland, 1993, 485-534

[2] Billera L J, Lee C W. Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes. Bull Amer Math Soc, 1980, 2: 181-185

[3] McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytopes. Israel J Math, 1971, 9: 559-570

[4] Stanley R P. The number of faces of a simplicial convex polytope. Adv Math, 1980, 35: 236-238

[5] Stanley R P. Combinatorics and Commutative Algebra. 2nd ed. Boston: Birkhäuser, 1996

撰稿人：[1] 陈永川 [2]Richard P. Stanley

1 南开大学

2 美国麻省理工大学

双圈覆盖猜想

Cycle Double Cover Conjecture

一个图由顶点集合和边集合构成. 图中点的度数定义为与该点关联的边的数目. 如果图中每个点的度数均为常数 t, 则称该图为 t-正则图. 一个图是连通的, 如果图中任意两点均有路连接. 连通的 2-正则图被称为圈. 连通图中的一组边 F 被称为 k-边割, 如果 $|F| = k$ 且删去 F 的所有边导致图不连通. 1-边割简称为割边. Szekeres[1] 和 Seymour[2] 分别独立地提出如下猜想：

双圈覆盖猜想　每个无割边的图都有一组圈使得每条边恰好在两个圈上.

该猜想对平面图成立. 然而, 众所周知, 并不是每个图都是平面的. 至今, 已知该猜想成立的图族有：可三边染色的 3-正则图、有处处非零 4-流的图、有 Halmilton 圈或路的图、4-边连通的图、Cayley 图, 以及不含 Petersen 细分的图[3]. 该猜想有其强烈的拓扑背景, 对 3-正则图而言, 该猜想与图的强嵌入猜想等价. 就一般情况而言, 该猜想是强嵌入猜想的一个推论.

为了解决该猜想, 数学家们创造了一系列的新方法、新理论. 它们可粗略地分为两大类, 整体解决与局部调整. 具体方法包括：整数流、整数流覆盖、第二个圈、合理圈覆盖、最短圈覆盖、Hamilton 权、曲面调整等. 至今为止, 我们仅知该猜想的最小反例为：3-正则、无非平凡的 3-或 2-边割、无 Petersen 细分, 并且不可 3-边染色. 有关双圈覆盖猜想的更多内容可参阅文献 [5].

该猜想叙述简捷, 盈溢数学之美. 虽然为数不少的世界一流数学家们已为此探索了将近三十年, 而实质性进展仍为数不多. 运用整数流理论, 任一个图的圈的 $2k$ 覆盖问题 $(k \geqslant 2)$ 已解决[4]. 于是 $k = 1$, 即圈的二次覆盖问题已成为遗留的最后一个 “硬核桃”.

参 考 文 献

[1] Szekeres G. Polyhedral decompositions of cubic graphs. Bull Austral Math Soc, 1973, 8: 367-387

[2] Seymour P D. Sums of circuits// Graph Theory and Related Topics. New York: Academic Press, 1979, 342-355

[3] Alspach B, Goddyn L A, Zhang C Q. Graphs with the circuit cover property. Trans Amer Math Soc, 1994, 344(1): 131-154

[4] Fan G. Integer flows and cycle covers. J Combinatorial Theory Ser B, 1992, 54: 113-122
[5] Zhang C Q. Integer Flows and Cycle Covers of Graphs. New York: Marcel Dekker, 1996

撰稿人：张存铨
West Virginia University

凸多边形与厄尔多斯 -Szekeres(Erdös-Szekeres) 问题

Convex Polygons and Erdös-Szekeres Problem

1931 年 Esther Klein 发现了一个有趣的结果：对平面一般位置上放置 5 个点 (即任 3 点不在同一条直线上), 则其中必有 4 个点构成以它们为顶点的凸四边形. 如图 1 所示.

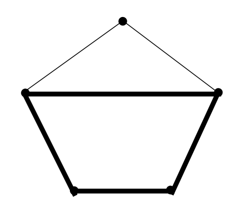
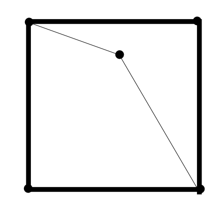
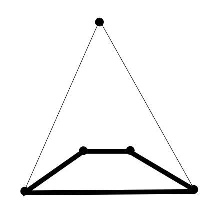




图 1　平面一般位置上的 5 个点, 存在 4 个点构成以它们为顶点的凸四边形

1935 年, 著名数学家 Erdös 和 Szekeres 在此基础上, 提出了**第一类 Erdös-Szekeres 问题**, **也称 "Esther Klein 问题"**或者**"Happy End Problem"**(后来 Esther Klein 成为 George Szekeres 的妻子).

第一类 Erdös-Szekeres 问题　给定正整数 $n \geqslant 3$, 寻找最小的正整数 $f(n)$, 满足对平面一般位置上 $f(n)$ 个点构成的任意集合 S, 都存在 n 个点构成以它们为顶点的凸 n 边形.

Erdös 在 1978 年提出了类似的问题, 即**第二类 Erdös-Szekeres 问题**.

第二类 Erdös-Szekeres 问题　给定正整数 $n \geqslant 3$, 寻找最小的正整数 $g(n)$, 满足对平面一般位置上 $g(n)$ 个点构成的任意集合 S, 都存在 n 个点构成以它们为顶点的凸 n 边形, 并且凸 n 边形内部不包含 S 中的任一点.

Erdös 和 Szekeres[2] 用 Ramsey 理论和几何理论两种不同方法证明了 $f(n)$ 的存在性, 并且对 $f(n)$ 的值给出了一个猜想, 后来 Erdös 决定以 500 美元悬赏解决这一猜想 (Erdös 已于 1996 年驾鹤西去, 当然这一悬赏也无法兑现了). 另外, Erdös 在文献 [1] 的前言中也提到了此问题.

猜想[2]　对任意的 $n \geqslant 3$, $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

显然 $f(3) = 3$, Klein 证明了 $f(4) = 5$, 文献 [2] 中提到 E. Makai 证明了 $f(5) = 9$, 后来 Kalbfleisch 等人也给出了证明. 事实上, 尽管还没有给出证明, 大家基本上已经认为 $f(6) = 17$. Erdös 和 Szekeres 在文献 [2]、 [3]中分别给出了 $f(n)$

的一个上界和下界: $2^{n-2}+1 \leqslant f(n) \leqslant \binom{2n-4}{n-2}+1$. 随后, 很多学者对这一问题做了研究. Tóth 和 Valtr 在 2005 年证明了 $f(n) \leqslant \binom{2n-5}{n-2}+1$(详见文献 [1]、[4]), 这是目前知道的一个最好的上界. 与其有关的问题是证明上述猜想或者改进它的估界.

对于 $g(n)$, 显然 $g(3)=3$, $g(4)=5$. Harborth 在 1978 年证明了 $g(5)=10$. Horton 在 1983 年证明了对任意的 $n \geqslant 7$, $g(n)$ 不存在 (见文献 [5]). 对于 $g(6)$ 的存在性一直是一个公开问题. 经过许多学者的不懈努力, Gerken 在 2006 年证明了 $g(6)$ 的存在性并且得到一个上界 $g(6) \leqslant f(9) \leqslant 1717$(此结果于 2008 年发表在 Disc.Comput.Geom. 杂志上, 见文献 [4]). Koshelev 在 2007 年改进了 Gerken 的结果, 在文献 [4] 中证明了 $g(6) \leqslant \max\{f(8), 400\} \leqslant 463$, 这是目前为止最好的上界. 关于下界的问题, 也有很多学者进行研究, 目前所知道的最好下界是 Overmars 在 2003 年得到的, 他证明了如果 $g(6)$ 存在, 则 $g(6) \geqslant 30$(见文献 [4]). 与其有关的问题是确定 $g(6)$ 或者改进它的估界.

关于 Erdös-Szekeres 问题及其猜想的详细介绍和最新进展, 有兴趣的读者可参考文献 [1]、[4]、[5] 以及其中的文献.

参 考 文 献

[1] Brass P, Moser W, Pach J. Research Problems in Discrete Geometry. New York: Springer-Verlag, 2005

[2] Erdös P, Szekeres G. A combinatorial problem in geometry. Compositio Math, 1935, 2: 463-470

[3] Erdös P, Szekeres G. On some extremum problems in elementary geometry. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1961, 3-4: 53-62

[4] Koshelev V A. On the Erdös-Szekeres problem. Doklady Mathematics, 2007, 76(1): 603-605

[5] Morris W, Soltan V. The Erdös-Szekeres problem on points in convex position–a survey. Bull Amer Math Soc, 2000, 37: 437-458

撰稿人: 李学良
南开大学

图的 Pfaffian 定向

The Pfaffian Orientation of Graph

图的 Pfaffian 定向问题最早由物理学家 Kasteleyn, Fisher 与 Temperley 同时引入, 详见文献 [1], 用以解决统计物理中平面方格子图的 dimer 问题 (用数学家的语言讲即是图论中的完美匹配计数问题). 一般地, 若图 G 有 Pfaffian 定向, 则 G 的完美匹配数可由多项式时间的算法来得到. 那么什么是图的 Pfaffian 定向呢? 定义它我们要用到图论中的几个基本概念.

图是由顶点集和边集构成的. 若图的一个边子集使得图中每个点都恰是其中一条边的端点, 则称这个边子集是该图的一个完美匹配. 易见有完美匹配的图必定有偶数个顶点. 一个图的一部分顶点和边构成的图称为是它的一个子图, 如果一个图删除一个子图的所有顶点, 余下的图有完美匹配, 则称该子图是好 (nice) 的. 对一个图的每一条边给定一个方向, 称为是这个图的一个定向. 图 G 的一个定向称为是 G 的一个 Pfaffian 定向 (也称为 "奇定向"), 若对 G 中任一个好的偶数长圈 C, 无论从哪个方向环绕 C 恰有奇数条边的方向与环绕方向一致 (见文献 [2]、[3]). 图 1 就是平面方格子图的一个 Pfaffian 定向的例子.

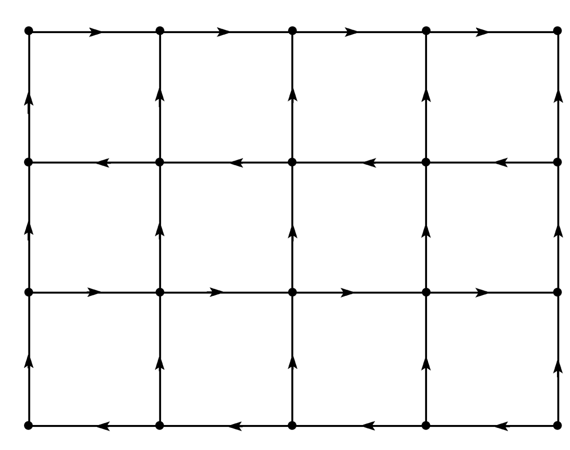


图 1　平面方格子图 $L(5,4)$ 的一个 Pfaffian 定向

自然地, 一个基本问题是什么样的图有 Pfaffian 定向? 平面图是具有 Pfaffian 定向的一类重要例子, 而非平面图 $K_{3,3}$(两部分各含 3 个点的完全二部图) 则是不具有 Pfaffian 定向的图的最小例子. 对于等部的二部图而言, 一个图是否具有 Pfaffian

定向的问题有许多重要的等价形式. 如 Polya 于 1913 年所提出的下述问题：在什么条件下方阵的积和式可等于由它的一些元素加上符号之后的矩阵的行列式？此处 n 阶方阵的积和式是所有取自不同行不同列的 n 个元素的积之和. 又例如它还等价于一个方阵的符号模式的问题, 即何种符号模式可保证所有具有这种符号模式的方阵都是非奇异的. 更多的等价形式可参见文献 [5]. 注意到, Valiant 证明了完美匹配的计数问题是 #P 完全的, 对二部图而言也是如此 (见文献 [4]), 它们难以找到多项式时间算法. 所以明确地区分出可 Pfaffian 定向与不可 Pfaffian 定向的图有重要意义. 对这一问题的二部图情形, 在 1999 年由 Robertson, Seymour, Thomas[5] 和 McCuaig 同时解决. 一些相关的新的进展见 Thomas 在 2006 年国际数学家大会上的 45 分钟报告[3].

顺便指出, 在统计物理中有许多未解决的匹配计数问题 (匹配是指图的一个边子集, 其每一个顶点最多是其中一条边的端点), 如高维格子图完美匹配计数问题, 以及平面格子图的匹配计数问题等. 物理学家称它们为 dimer-monomer 问题. 这些问题的提出已有数十年的历史, 至今还未见到有实质性的进展.

参 考 文 献

[1] Kasteleyn P W. Graph Theory and Crystal Physics// Graph and Theory Physics (F Harrary ed). New York: Academic Press, 1967, 43-110

[2] Lovasz L, Plummer. Matching theory. Ann of Discrete Math, 1986, 29

[3] Thomas R. A survey of Pfaffian orientation of graphs// Proceding of the International Congress of Mathematics. Vol 3. Madried, 2006, 963-984

[4] Valiant L G. The Complexity of Computing the Permanent. Theorem Comput Sci, 1979, 8: 189-201

[5] Robertson N, Seymour P D and Thomas. Permanents Pfaffian orientations and even directed circuits. Annals of Math, 1999, 150: 929-975

撰稿人：张福基
厦门大学

图的重构猜想

Reconstruction Conjecture of Graphs

两个图 G 和 H 称为是同构的, 记作 $G \cong H$, 如果存在从点集合 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的一个双射 (即既是单射又是满射的映射, 也称为是一个一一对应)f, 使得 G 中任意两个点 u 和 v 在 G 中有边连当且仅当它们在 H 中的对应点 $f(u)$ 和 $f(v)$ 在 H 中有边连.

由上述定义可见, 两个图 G 和 H 同构即意为：如果给图 H 的顶点以重新标号 (即给其以与所对应的 G 中点同样的记号), 则这两个图就一样了. 或者说, 同构的图除顶点记号外, 其结构是完全相同的.

由图 G 删除点 v 及与 v 相关联的所有边得到的图称为是图 G 的一个删点子图, 记为 $G-v$. 显然, 若 G 含有 n 个点, 则 G 就总共有 n 个删点子图. 有时候为形象起见, 人们把这 n 个 (不计次序的) 删点子图 (其中可能有互相同构的) 看成是原图 G 的一副 "牌", 或一副 "删点子图牌". 具有相同 "删点子图牌" 的两个图称为是 "亚同构" 的, 其数学定义如下.

定义 1　两个图 G 和 H 称为是亚同构的, 如果存在从点集合 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的一个双射 f, 使得对 G 中任一点 v, 有 $G-v \cong H-f(v)$.

由上述定义易见, 两个同构的图也必定是亚同构的. 而重构问题则是要反过来问：亚同构的图是否也必定是同构的？为分解难点, 这个问题也可以先对一个固定的图来提, 见如下定义.

定义 2　一个图 G 称为是可重构的 (reconstructible), 若所有和 G 亚同构的图都和 G 同构.

现在我们就可以给出重构猜想的正式数学提法了.

重构猜想　任一至少含有三个顶点的有限图都是可重构的.

重构猜想并不如想象的那样显然成立. 例如只含两个点的图就不是可重构的. 又例如对于有向图 (每条边都带有一个方向的图) 而言, 重构猜想也不成立 (可以举出一个含有 3 个点 4 条边的不可重构的有向图).

重构猜想是目前图论中最重要的未解决的问题之一, 它最早由 S. M. Ulam 于 1929 年提出. 由于重构猜想的提法简单, 又有重要的理论价值, 因此它引起了人们的广泛重视. 1957 年, P. J. Kelley 首先证明了所有的树都是可重构的. 后来, 著名数学家 W. T. Tutte[4], L. Lovasz[3] 和 R. P. Stanley 等人都在重构问题的研究上得

到过很好的结果. 但是由于这个问题的难度太大, 因此猜想本身至今尚未得到解决.

研究重构猜想除了考虑直接证明 (或否定) 猜想本身外, 还可以研究如下两类难度相对较低一些的相关问题:

(1) 研究某些重要的特殊图类的可重构性 (即是否这个图类中的所有图都是可重构的). 目前已知树、正则图、不连通图、仙人掌图、几乎无圈图等图类都是可重构的. 但是还有许多重要的图类, 例如二分图类等, 它们的可重构性还不能确定.

(2) 研究图的一些可重构的参数 (图的某个参数称为是可重构的, 如果任意两个亚同构图的这个参数值都相同). 目前已有许多参数被证明是可重构的, 但是还有许多重要的参数, 如亏格、边色数、自同构群等的可重构性尚不能确定.

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics 244, 2007

[2] Kelly P J. On Isometric Transformations. Ph D thesis, University of Wisconsin, 1942

[3] Lovasz L. A note on the line reconstruction problem, Journal of Combinatorial Theory Series B, 1972, 13: 309-310

[4] Tutte W T. All the king's horses. A guide to reconstruction. New York: Academic Press, 1979, 15-33

[5] Ulam S M. A collection of Mathematical Problems. New York: Wiley (Interscience), 1960, 29

撰稿人: 洪 渊
华东师范大学

整数流猜想

Integer Flow Conjectures

20 世纪 50 年代初, 著名数学家 Tutte[5] 为了攻克 “四色问题”, 创立了整数流 (integer flow) 理论. 1994 年 Seymour[4] 在国际数学家大会 1 小时报告中, 用专门一节来论述整数流理论的进展. 整数流的原始定义涉及可换群, 故而也称为群流 (group flow). 下面我们给出它的一个通俗易懂的等价定义.

一个图 G 由点集和边集构成. 图 G 的一个定向是指给 G 的每条边以一个确定的方向, 而 G 的一个 “边赋值” 则是指给 G 的每条边赋以某一个数值.

定义　设 k 是一个大于 1 的正整数. 我们称一个图 G 有 k-流, 如果存在 G 的某一个定向和某一个边赋值满足如下两个条件：

(1) G 的每条边所赋的数值 (也称为是该边上的流量) 都是一个小于 k 的正整数;

(2) 流量守恒条件：对 G 中每一个点, 进入该点的所有边的流量之和等于离开该点的所有边的流量之和.

图中的一条边被称为是割边, 如果删去该边后该边的两端就不再有路相连. 由流量守恒条件可知, 一个图有 k-流的必要条件是它无割边. 根据流的定义, 如果图 G 有 k-流, 则对所有大于 k 的整数 m, G 也有 m-流. 因此, 我们希望寻找最小的整数 k, 使得所有无割边的图都有 k-流. Tutte 猜想这个最小整数是 5.

5-流猜想(5-flow conjecture)　每个无割边的图都有 5-流.

该猜想提出时, 人们甚至还不知道是否存在正整数 k, 使得无割边图有 k-流. 1979 年, Jaeger[1] 取得了第一个实质性进展, 证明了无割边图有 8-流. 此结果在 1981 年被 Seymour[3] 改进为：无割边图有 6-流. 图 1 是著名的 Peterson 图. 它有 5-流, 赋值和定向如图所示. 已知有许多无割边图没有 4-流, Peterson 图就是一个例子. 也就是说, 如果只允许使用小于 4 的正整数, 则无论如何选择边的定向, 都无法在 Peterson 图上得到 4-流. Tutte 猜想: 在某种意义上, Peterson 图是唯一的例外.

4-流猜想(4-flow conjecture)　设 G 为无割边图. 如果通过任意多次的删点、删边、收缩边均无法从 G 得到 Peterson 图, 则 G 有 4-流.

若上述 4-流猜想成立, 则可推出著名的“四色定理”, 由此可见 4-流猜想的意义及难度. 称一个图是连通的, 如果图中任意两点之间均有路相连. 一个连通图被

称为是 k-边连通的, 如果删去任意 $k-1$ 条边后余下的图仍然连通. 已知 4-边连通图有 4-流. 4-边连通图有 3-流吗? 这便是著名的 3-流猜想 (3-flow conjecture): 每个 4-边连通图有 3-流. 该猜想至今尚无实质性的进展. 人们甚至无法证明是否存在一个常数 t 使得每个 t-边连通图有 3-流. 这也称为是弱 3-流猜想, 它与有限域上的堆垒基 (additive basis) 的存在性有关. 有兴趣的读者可参阅文献 [2].

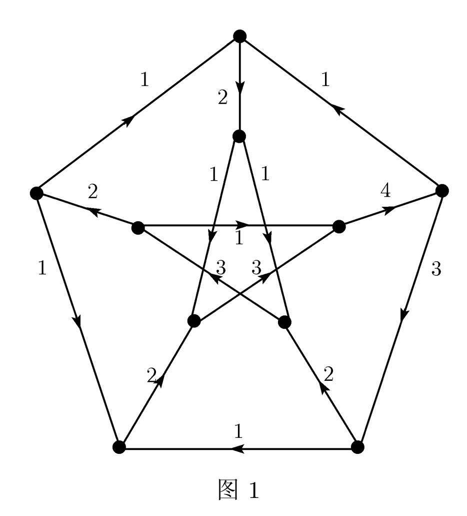


图 1

参 考 文 献

[1] Jaeger F. Flows and generalized coloring theorems in graphs. J Combin Theory Ser B, 1979, 26: 205-216

[2] Jaeger F, Linial N, Payan C and Tarsi M. Group connectivity of graphs—a nonhomogeneous analogue of nowhere-zero flow properties. J Combin Theory Ser B, 1992, 56: 165-182

[3] Seymour P D. Nowhere-zero 6-flows. J Combin Theory Ser B, 1981, 30: 130-135

[4] Seymour P D. Progress on the four-color problem. Proc International Congress of Mathematicians, Zurich, 1994, 183-195

[5] Tutte W T. A contribution to the theory of chromatic polynomials. Canadian J Math, 1954, 6: 80-91

撰稿人：范更华
福州大学

子图覆盖问题

Subgraph Covering

设图 G 的点集、边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 图中点的度数定义为与该点关联的边的数目. 如果图中每个点的度数均为偶数, 则称该图为偶度图. G 的一组子图 $\mathcal{F}=\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 称为是 G 的一个子图覆盖, 如果 $\bigcup_{i=1}^{m}E(H_i)=E(G)$, 也即如果 G 的每条边都被 $\mathcal{F}$ 中的至少一个子图所包含. 著名的 “四色问题” 等价于如下的命题：每个无割边的平面图可以有一个子图覆盖 $\mathcal{F}=\{H_1,H_2\}$ 满足：H_1 和 H_2 均为偶度图. 子图覆盖问题的意义与难度也可由此等价性而略见一斑. 众所周知, 路 (path)、圈 (circuit) 和匹配 (matching) 是最简单和常见的几类子图. 本文就介绍关于这三类子图覆盖的三个著名猜想.

Gallai 路覆盖猜想　设 G 为含 n 个点的连通图, 则 G 有一个子图覆盖 $\mathcal{F}=\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 满足：① 每个子图 H_i 是一条路, $1\leqslant i\leqslant m$; ② $m\leqslant\dfrac{n+1}{2}$; ③ 对所有 $i\neq j$, $E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing$.

Lovasz[2] 在 Gallai 路覆盖猜想上取得了部分结果. 他证明了：若猜想中的要求 ① 改为每个子图 H_i 是一条路或一个圈, 则该猜想成立. 大数学家欧拉证明了下述定理：任何 n 个点的偶度图有一个子图覆盖 $\mathcal{F}=\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 满足：① 每个子图 H_i 是一个圈, $1\leqslant i\leqslant m$; ② 对所有 $i\neq j$, $E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing$. 二百多年来, 人们一直试图解决上述欧拉定理中所需子图的个数, 也即 m 的上界.

Hajos 圈覆盖猜想　设 G 为含 n 个点的偶度图, 则 G 有一个子图覆盖 $\mathcal{F}=\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 满足：① 每个子图 H_i 是一个圈, $1\leqslant i\leqslant m$; ② $m\leqslant\dfrac{n}{2}$; ③ 对所有 $i\neq j$, $E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing$.

有关 Gallai 路覆盖猜想和 Hajos 圈覆盖猜想, 读者可参阅 Pyber 的综述性文章 [4]. 在该文中, Pyber 认为 Hajos 圈覆盖猜想的解决在现阶段是不可及的. 有关这两个猜想, 还可参阅文献 [1].

如果图中每个点的度数均为常数 k, 则称该图为 k-正则图. 图 G 的一个子图 H 称为是 G 的一个完美匹配, 如果 $V(H)=V(G)$ 且 H 为 1-正则图. 与 “四色问题” 有关的一个问题是 3-正则图的 3-边染色. 已知有许多 3-正则图不可 3-边染色. Fulkerson 猜想：将 3-正则图的每条边换成两条平行边所得到的 6-正则图可以 6-边染色. 用子图覆盖的语言, 该猜想可叙述为：

Fulkerson 完美匹配覆盖猜想　设 G 为 3-正则图, 则 G 有一个子图覆盖 $\mathcal{F}=$

$\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 满足：① 每个子图 H_i 是一个完美匹配，$1 \leqslant i \leqslant m$; ② $m = 6$; ③ G 的每条边恰好被 $\mathcal{F}$ 中的两个子图所包含.

关于上述 Fulkerson 猜想, 读者可参阅 Seymour 的文章 [5]. 有趣的是, Fulkerson 猜想与 Fano-coloring(与射影平面 Fano Plane 有关的染色问题) 有关联[3]. 在每三年一次的国际数学规划大会上, 国际数学规划学会和美国数学会联合颁发以 Fulkerson 命名的 Fulkerson 奖, 它被认为是国际离散数学界的最高奖之一. 若能解决上述 Fulkerson 猜想, 自然最有希望问鼎这项国际大奖.

参 考 文 献

[1] Chung F R K. On the coverings of graphs. Discrete Mathematics, 1980, 30: 89-93

[2] Lovász L. On covering of graphs//Theory of Graphs (P Erdös and G Katona eds). New York: Academic Press, 1968: 231–236

[3] Mačajova E, Škoviera M. Fano colourings of cubic graphs and the Fulkerson conjecture. Theoret Comput Sci, 2005, 349: 112-120

[4] Pyber L. Covering the edges of a graph. Colloq Math Soc János Bolyai, 1991, 60: 583-610

[5] Seymour P D. On multicolourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. Proc London Math Soc, 1979, 38: 423-460

撰稿人：范更华
福州大学

自回避行走的计数问题

Self-Avoiding Walks

格点无规行走 (lattice random walk)(波利亚行走, Pólya walk) 的概念最早由波利亚 (George Pólya) 提出. 这里的随机行走者在一个规则网格 (通常被取作超立方格点) 上游动. 一个自回避行走 (self-avoiding walk) 是一个带限制条件的无规行走：即不允许任何格点被访问两次. 无规行走和自回避行走具有许多内在的数学重要性, 它们的研究涉及了数学、生物学、化学及物理学等领域.

d-维整数格点 $\mathbb{Z}^d$ 上的一条 n-长自回避行走 ω 指一个有序集合 $\omega = (\omega(0), \cdots, \omega(n))$, 其中 $\omega(i) \in \mathbb{Z}^d$, $|\omega(i+1) - \omega(i)| = 1$ (欧几里得距离), 且对于 $i \neq j$, 有 $\omega(i) \neq \omega(j)$. 我们通常取 $\omega(0) = (0, 0, \cdots, 0)$.

在 d-维整数格点 $\mathbb{Z}^d$ 上, n-长无规行走的个数是 $(2d)^n$. 定义 $c_d(n)$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 上 n-长自回避行走的个数, 按照惯例, 我们定义 $c_0 = 1$. 现在要考虑的一个基本问题就是 c_n 究竟有多大? 它精确的表达式是什么? 在一维情形中问题很简单, 但是在二维及更高维情形这可能是一个相当困难的问题.

关于此问题的阐述可参见 Madras 和 Slade 的专著[4]. 对于小数值的 n, $c_d(n)$ 的计算甚至都非常困难. 对于方点阵 (square lattice), Conway 和 Guttmann[1] 计算出了直到 51-长的自回避行走的个数. 之后, Jensen 又给出了 c_n 进一步的计数, 他得到了当 $52 \leqslant n \leqslant 71$ 时, n-长自回避行走的个数. 最近的一个突破是 Hara 和 Slade[2] 取得的, 他们确定了维数 $d > 4$ 时 $c_d(n)$ 的渐近性质 (asymptotic behavior).

一个已知的结果是 $\lim\limits_{n\to\infty}[c_d(n)]^{1/n}$ 存在. 这个极限叫做自回避行走联结常数 (self-avoiding walk connective constant), 记为 μ_d.

目前关于 μ_d 的估计, 已知的最好的上下界是

$$\begin{aligned}
&\mu_2 \in [2.62002, 2.679192495],\\
&\mu_3 \in [4.572140, 4.7476],\\
&\mu_4 \in [6.742945, 6.8179],\\
&\mu_5 \in [8.828529, 8.8602],\\
&\mu_6 \in [10.874038, 10.8886].
\end{aligned}$$

对于 $d = 2$ 和 3, 存在一个正常数 γ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_d(n)}{\mu_d^n n^{\gamma-1}}$$

存在且非零. 以下是对于 $d\geqslant 4$ 情形的猜想：对于 $d>4$, 上述极限存在, 其中临界指数 (critical exponent) $\gamma=1$. 对于 $d=4$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_d(n)}{\mu_d^n n^{\gamma-1}(\ln n)^{1/4}}$$

存在且有限. 此外 $d\leqslant 4$ 时, 对临界指数 γ 的猜想如下：

$$\gamma=\begin{cases}43/32 & d=2,\\ 1.162\cdots & d=3,\\ 1 & d=4.\end{cases}$$

另外一个基本问题涉及二维自回避行走的标度极限 (scaling limit), 大家普遍认为, 它就是参数 κ 等于 8/3 的 Schramm-Loewner evolution (SLE). 更多细节可参见文献 [3].

还有一个问题是计算所有 n-长自回避行走的均方位移 (mean square displacement), 其定义是

$$s_d(n)\equiv\frac{1}{c_d(n)}\sum_{\omega}|\omega(n)|^2,$$

上式是对所有的 n-长自回避行走 ω 求和.

和 $c_d(n)$ 的情况类似, 下面是有关 $s_d(n)$ 的极限存在的猜想:

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{s_d(n)}{n^{2\nu}} & d\neq 4,\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{s_d(n)}{n^{2\nu}(\ln n)^{1/4}} & d=4,\end{cases}$$

其中当 $d>4$ 时, 临界常数 $\nu=1/2$. 此外, $d\leqslant 4$ 时, 对临界指数 ν 的猜想如下[4]：

$$\nu=\begin{cases}3/4 & d=2,\\ 0.59\cdots & d=3,\\ 1/2 & d=4.\end{cases}$$

临界常数 γ 和 ν 是格点无关的 (lattice-independent), 尽管它们依赖于维数 (dimension-dependent). 从这个角度来讲它们被认为具有普适性 (universality). 然而, 迄今人们还不能给出存在性的证明, 更不用说普适性的证明了.

参 考 文 献

[1] Conway A R, Guttmann A J. Square lattice self-avoiding walks and corrections to scaling. Phys Rev Lett, 1996, 77: 5284-5287

[2] Hara T, Slade G. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. Rev Math Phys, 1992, 4: 101-136

[3] Lawler G, Schramm O and Werner W. On the scaling limit of planar self-avoiding walk, Fractal Geometry and Applications: a Jubilee of Benoit Mandelbrot, Part 2, 339-364, Proc. Sympos. Pure Math. 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, arXiv:math.PR/0204277

[4] Madras N, Slade G. The Self-avoiding Walk. Boston: Birkhäuser, 1993

撰稿人：[1] 陈永川　[2]Richard P. Stanley

1 南开大学

2 美国麻省理工大学

P=NP?

P=NP?

“P=NP?” 是计算理论的核心问题, 其中, 复杂类 P 包含所有那些可以由一个确定型图灵机在多项式表达的时间内可以解决的判定问题, NP 则是指可以由非确定型图灵机在多项式时间内可以解决的判定问题. 通俗地讲, P 问题是指能够在普通的计算机上多项式时间内求解的判定问题, 而 NP 问题则是指那些在普通的计算机上能够在给定正确信息下多项式时间内可以验证的判定问题. 很显然, P 属于 NP, 那么 NP 是否属于 P? 这就是著名的 “P=NP？” 问题. 这一问题是 Clay 研究所的七个千禧问题之一, 其详细描述可见文献 [1].

人们之所以提出 NP 问题, 是因为大多数遇到的自然的难解问题最终都发现是 NP 问题. NP 问题类非常丰富, 存在于数学、优化、人工智能、生物、物理、经济、工业等各个领域. 如果能够解决 P 与 NP 两个问题类之间的关系, 则解决了这些问题的算法复杂度问题, 具有非常重大的意义.

1936 年, Turing 提出了理论计算的模型图灵机, 这个时期 Turing, Church, Gödel 等人关于计算理论的工作是 “P=NP？” 问题的基础. 20 世纪 70 年代, Cook 和 Levin 发表了著名的 Cook 定理[2,3], 引入了 NP 完全的概念, 第一次明确提出了 “P=NP？” 问题. 事实上, 在此 15 年前, Gödel 在给 Von Neumann 的一封著名的信中, 已经很清楚地提出了这个基本的问题, 那时 Gödel 已经意识到了它的重要性[4].

NP 完全问题是 “P=NP？” 问题的核心概念之一. NP 完全问题是 NP 问题的一个子类, 一个问题 L 是 NP 完全的, 如果 L 属于 NP 且所有的 NP 问题都可以在多项式时间内转化为问题 L. 可以认为, NP 完全问题是 NP 类中的最难的问题. 如果可以回答某一个 NP 完全问题是否属于 P 的问题, 就意味着 “P=NP？” 问题的解决. Garey 和 Johnson 在他们的书中列出了数百种 NP 完全问题[5], 现在已知的 NP 完全问题已达数千种.

作为其提出的 20 世纪 18 个重大数学未决问题之一, Smale 选择了下列源自传统数学问题的 NP 完全问题作为 “P=NP？” 问题的代表: 给定 Z_2 上关于 n 个变量的 k 个多项式, 问是否存在多项式时间的算法判定它们在 $(Z_2)^n$ 上有公共零点[6].

“P=NP？” 问题上述提法主要是受到了 Brownawell 关于 Hilbert 零点定理判定算法的影响. 设 $f_1, \cdots, f_k$ 是 n 个变元的复系数多项式, 根据 Hilbert 零点定理, $f_1, \cdots, f_k$ 在复数域上不存在公共零点当且仅当存在 n 个变元的复系数多项式

$g_1, \cdots, g_k$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 1 \tag{1}$$

其中 (1) 是恒等多项式. Brownawell 证明 g_i 的次数可以取为

$$\deg g_i \leqslant \max(3, D)^n, \quad D = \max\ \deg\ f_i.$$

这样复零点的存在问题就转换为线性方程组求解问题[7], 从而给出了判定方程组 $f_1 = 0, \cdots, f_k{=}0$ 存在复数解算法的复杂性. 遵循以上思路解决 "P=NP？" 问题, 需要很好地估计关于布尔多项式 (1) 中 g_i 的项数的上界.

自 "P=NP?" 提出以来, 人们做了很多尝试. 要证明 P=NP, 最显然的方法就是给出一个 NP 完全问题的多项式时间的算法, 其标准的工具包括贪婪算法、动态规划、归约到线性规划等. 在过去的几十年里, 一大批工程人员和程序人员为寻找 NP 完全问题的多项式时间的算法做了很多工作, 但都没有成功. 也有可能不通过给出 NP 完全问题的多项式时间的算法来证明 P=NP. 另一方面, 人们也已经尝试用对角线方法和布尔线路这两种一般的方法研究 P≠NP.

20 世纪 70 年代人们对 NP 完全问题的研究主要是横向发展, 也就是以许多不同的计算模型来分析难解问题的本质. 对这些新的计算模型的研究一方面使我们对难解问题有了更深一层的认识, 一方面也产生了一些预想不到的应用, 基于 NP 完全理论, 密码学取得了革命性突破, 建立了公钥密码体系. 到了 80 年代中, NP 完全问题的研究有了纵向的突破, 在许多表面看来并不相关的计算模型之间发现了深刻的刻画关系. 这些刻画关系不但解决了几个令人困扰多年的未解问题, 同时也刺激了其他相关领域的发展. 其中一个重大的结果是概率可验证明 (PCP) 对 NP 类的刻画, 由此得出了许多组合优化问题近似解的 NP 完全难近似性, 从而刺激了算法界对近似算法研究的新热潮[8]. 90 年代, 人们又研究了新的计算模型, 如量子计算机和命题证明系统, 新工具的引入无疑增加了这一问题的内涵. 例如, 可以问：在量子计算机模型下是否存在类似 "P=NP？" 的问题; 是否具有量子多项式时间算法求解某类 NP 完全问题? 另一个研究热点是参数复杂性理论 (papameterized complexity), 它是将 NP 完全问题的参数区别对待, 例如图的顶点覆盖问题, 它的参数有图的顶点个数 n 和覆盖子集尺寸 k, 而如果固定参数 k, 则顶点覆盖问题是多项式时间可解的, 但是其运行时间是 k 的指数函数. 于是研究 "NP=P？" 的问题, 可以分解为各个 NP 完全问题的固定参数如何影响各问题的 NP 完全性的. 这就形成了一套新的研究 "P=NP？" 的途径 —— 参数复杂性理论[9].

相关的一个问题是, 我们还不知道若干具有重要应用背景的计算问题的计算复杂性. 特别地, 我们希望知道这些计算问题是否具有多项式算法或者属于 NP 难的? 具体问题包括：

(1) 大正整数因子分解问题. 请参考 “大正整数因子分解是否具有多项式算法” 问题.

(2) 离散对数问题：对给定 $y = a^x$, 已知 a 和 y, 求 x, 这里的乘法是任何有限乘法群的乘法. 请参考 “离散对数求解” 问题.

(3) 图同构问题：对给定的两个图, 问它们是否同构？该问题显然属于 NP 问题, 但是至今未能找到多项式时间算法, 也没能证明它是 NPC 的.

(4) 曼哈顿网络问题：给定平面上 n 个点, 将它们用垂直和水平线连接, 使得每对点用最短垂直和水平线段连接, 而线段长度总和最少.

其他类似的例子很多, 其中图同构问题和大数分解问题最为著名, 因为这两个问题的解决涉及密码学和复杂性理论的很多基本问题.

参 考 文 献

[1] Cook S A. The P versus NP Problem. http://www.claymath.org/millennium /P_vs_NP/ Official_Problem_Description.pdf

[2] Cook S A. The complexity of theorem-proving procedures// Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1971: 151-158

[3] Levin L A. Universal search problems. Probl Peredaci Inform, 1973, 9: 115-116. English transl Probl Inf Transm, 1973, 9: 265-266

[4] Wigderson A. P, NP and mathematics: a computational complexity perspective// Proc of the 2006 International Congress of Mathematicians

[5] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractibility, a Guide to the Theory of NP-completeness. Srancisco: W H Freeman and Co, 1979

[6] Smale S. Mathematical problems for the next century. Mathematical Intelligencer, 1998, 20: 7-15

[7] Brownawell W. Bounds for the degrees in the Nullstellensatz. Annals of Math, 1987, 126: 577-591

[8] Arora S, Lund C, Motawani R, Sudan M, Szegedy M. Proof verification and the hardness of approximation problems. Journal of ACM, 1988, 45(3): 501-555

[9] Flum J, Grohe M. Parameterized Complexity Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006

[10] 堵丁柱, 葛可一, 王洁. 计算复杂性导论. 北京: 高等教育出版社, 2002

撰稿人：[1] 高小山 [2] 朱 洪

1 中国科学院数学与系统科学研究院

2 华东师范大学

单向函数的存在性

The Existence of One-way Functions

单向函数, 直观地说, 就是这样一个函数 $y=f(x)$, 由 x 的值求 $y=f(x)$ 的值容易, 而函数 $y=f(x)$ 的求逆, 即由 y 的值求 x 的值使 $y=f(x)$ 是困难的. 当然, 上述词语 "容易" 和 "困难" 可以用计算复杂性的语言来精确定义. 容易计算是指存在计算 $f(x)$ 的多项式时间算法. 计算困难是指, 对任意多项式时间算法, 可以用其求逆的 x 的概率是可以忽略不计的, 详见文献 [3]~[5].

有没有单向函数至今还是个未解决的问题. 但是, 若干被猜测是单向函数的问题已经在工业界得到广泛应用, 这些问题有：整数分解、离散对数、随机线性码解码、子集和问题等. 这些问题一个方向求解很容易, 而另一个方向求解很困难, 至今没有找到有效算法. 如果单向函数存在, 则 P≠NP. 这表明单向函数的存在比著名的 P≠NP 问题还困难.

单向函数的存在性是现代密码学的基础, 许多安全的密码方案的存在都是基于单向函数的存在[1,2]. 在公钥密码学中, 我们是基于陷门单向函数的存在性[3]. 所谓陷门单向函数就是当你掌握了陷门的信息后, 求逆就变得容易了, 例如 RSA 公钥密码体制就是这样. 在 Hash 函数中, 函数的单向性是一个基本的要求. 如果单向函数存在, 则伪随机发生器存在[4].

参 考 文 献

[1] Diffie W, Hellman M E. New directions in cryptograpgy. IEEE Trans Inform Theory, 1976, IT-22, 6: 644-654

[2] Goldteich O. Foundations of Cryptography. Vol I, Basic Tools. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

[3] Yao A C. Theory, application of trapdoor functions//23rd IEEE Symposium on FOCS, 1982, 80-91

[4] Levin L A. One-way function and pseudorandom generators. Combinatorica, 1987, 7: 357-363

[5] Papadimitriou C H. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994

撰稿人：邓映蒲
中国科学院数学与系统科学研究院

设计既实用又安全的公钥密码系统

Design of Practical and Secure Public Key Cryptosystems

当今在商业上广泛使用的公钥加密体制几乎全是基于大整数分解问题的困难性, 如 RSA, Rabin, 或基于离散对数问题 (有限域上的或椭圆曲线上的) 的困难性, 如 ElGamal, ECC. 但是, P. Shor 在 1994 年发现, 存在多项式时间的量子算法解大整数分解问题和离散对数问题. 这意味着, 一旦量子计算机制造出来, 当今商业上使用的公钥密码体制将通通被攻破. 虽然现在量子计算机还没有被制造出来, 但在这方面有着快速的进展. 因此, 设计既实用又能抵抗将来可能的攻击 (如量子攻击) 的公钥加密体制就是一个有着重要意义的研究问题.

值得注意的是, 大整数分解问题和离散对数问题在计算复杂性理论中都没有被证明是 NP-Complete 问题, 而至今也没有发现有多项式时间的量子算法解 NP-Complete 问题. 因此, 设计一种基于某个 NP-Complete 问题的公钥加密体制就有较大的把握说它在量子攻击下还是安全的. 在公钥加密体制的设计历史上, 研究人员曾考虑过以下四种密码体制: 基于背包问题的密码体制, 基于随机线性码的解码问题的密码体制, 基于有限域上非线性方程组的求解问题的密码体制, 基于格问题的密码体制. 这四类问题都是 NP-Complete 问题, 但最大的问题是从它们中到现在都没有设计出一个又实用又安全的公钥加密体制. 下面, 我们分别来看看它们的设计历史.

(1) 基于背包问题的密码体制

这类密码体制基于 Subset Sum 问题, 已知是 NP-Complete 问题. 第一个这类密码体制是 Merkle 和 Hellman 于 1978 年提出的, 称为 Merkle-Hellman Knapsack Cryptosystem. 但不幸的是在 1984 年被 Shamir 所攻破. 后来有许多变形, 如: 多次迭代背包体制, Graham-Shamir 背包体制, Chor-Rivest 背包体制, 但是这些体制都被攻破. 现在基于背包的公钥加密体制都已被攻破.

(2) 基于随机线性码的解码问题的密码体制

随机线性码的解码问题是个 NP-Complete 问题. 第一个基于它的密码体制是 McEliece 于 1978 年提出的, 这个密码体制虽然到现在没有被完全攻破, 但是它并不实用. 另一个是 Niederreiter 于 1986 年提出的, 是不安全的.

(3) 基于有限域上非线性方程组的求解问题的密码体制

这类密码体制也叫多变元密码体制. 有限域上非线性方程组的求解问题是个

NP-Complete 问题. 利用它构造密码体制很早就有人做了不成功的尝试, 但迟至 1988 年 Matsumoto 和 Imai 才提出了第一个实用的密码体制, 不幸的是 1995 年被 Patarin 攻破. 后来 Patarin 提出了 HFE, 但是后来也被攻破. 莫宗坚提出了几个 TTM, 也被一一攻破.

(4) 基于格问题的密码体制

格是欧氏空间的离散子群, 自从 LLL 格基约化算法于 1982 年提出, 格被应用于密码分析中. 1996 年 Ajtai 证明了在随机约化下, 格的最短向量问题是 NP-hard 的, 从此格问题也直接被应用于密码体制的构造中. 基于格的密码体制和别的密码体制不同, 它是基于平均复杂性的, 这是它最引人注意的地方. 基于格的密码体制有两种, 一种很安全, 有可证安全, 但是不有效, 即不实用. 另一种是很有效, 但是没有可证安全, 这意味着它可能不安全. 基于格的体制最著名的是 NTRU, 很有效, 但没有可证安全.

从上面的分析可以看出, 构造一个既实用又安全的公钥加密体制是很困难的事情, 并非有一个难题就可以构造一个好的密码体制. 如何设计出一个能抵抗将来可能的攻击的公钥加密体制在密码学界是一个重大的具有极大挑战性的问题.

参 考 文 献

[1] Shor Peter W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring//35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Santa Fe, NM, 1994), Los Alamitos, CA: IEEE Comput Soc Press, 1994, 124-134

[2] Shamir Adi. A polynomial-time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem. IEEE Trans Inform Theory, 1984, 30(5): 699-704

[3] Matsumoto T, Imai H. Public quadratic polynomial-tuples for efficient signature-verification and message-encryption. Eurocrypt' 88, 419-453

[4] Patarin J. Cryptanalysis of the Matsumoto and Imai public key scheme of Eurocrypt' 88. Crypto' 95, 248-261

[5] Patarin J. Hidden fields equations (HFE) and isomorphisms of polynomials (IP): two new families of asymmetric algorithms. Eurocrypt' 96, 33-48

[6] Berlekamp Elwyn R, McEliece, Robert J, van Tilborg Henk C A. On the inherent intractability of certain coding problems. IEEE Trans Information Theory, 1978, IT-24, 3: 384-386

[7] Ajtai M. Generating hard instances of lattice problems (extended abstract)//Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Philadelphia, PA, 1996). New York: ACM, 1996, 99-108

[8] Hoffstein Jeffrey, Pipher Jill, Silverman Joseph H. NTRU: a ring-based public key cryptosystem. Algorithmic Number Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1998, 267-288

[9] Niederreiter H. Knapsack-type cryptosystems and algebraic coding theory. Problems Control Inform Theory/Problemy Upravlen Teor Inform, 1986, 15(2): 159-166

[10] McEliece R J. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. DSN Progr Rep, 1978: 114-116

撰稿人：邓映蒲
中国科学院数学与系统科学研究院

大数分解是否有多项式算法?

Is There Any Polynomial Algorithm on Factorization of Large Integers?

公元前 300 年左右, 欧几里得在《几何原本》中证明了：每个正整数 $N \geqslant 2$ 均可表示成有限个素数的乘积, 并且不计素因子的次序这个表达式是唯一的. 这个结果是初等数论的基石, 称作是算术基本定理. 人们要问：若 N 是很大的整数, 求出 N 的素因子分解式至少要花多少时间？也就是说, 大数分解的算法能够好到何种程度?

这个问题的研究已经有很长的历史. 1976 年, 由于大数分解被用到保密通信的公钥体制中, 引起了数学、计算机科学和通信界的极大兴趣, 大数分解的算法不断被改进, 被分解的大整数记录不断被刷新. 可是, 对于信息科学和计算机科学非常重要的一个问题至今未能解决：大数分解是否有多项式算法?

在数学通信中每个比特 (bit) 可取 0 或 1, 所以 l 个比特有 2^l 种表达方式. 或者说, 若要传输 N 个信息, 需用 $\log_2 N$ 个比特来表示它们, 传输每个信息的时间与 $\log_2 N$ 成正比. 计算复杂性理论中, 对于处理 N 个信息的一个算法, 它的复杂度通常与 $\log_2 N$ 相比较. 如果所花时间是 $\log_2 N$ 的多项式, 这个算法叫多项式算法, 并被认为是容易的算法. 如果所花时间是 $\log_2 N$ 的指数函数 (如 $2^{\log_2 N} = N$), 则称为指数型算法. 目前既没有找到大数分解的多项式算法, 也没有证明大数分解的多项式算法不存在. 目前给出的分解大整数 N 的最好算法, 其复杂度为

$$O\left(\exp\left(\frac{64}{9}\log N\,(\log\log N)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)(\text{这里 } \exp(x) \text{ 表示 } \mathrm{e}^x).$$

大数分解是一件通俗易懂的事情. 但是近二十年来, 在改进已有的大数分解算法的过程中, 均采用了深刻的代数数论和算术几何的理论和结果. 在估计算法复杂性时还用到解析数论工具. 在理论上, 一个算法的好坏依赖于对这个算法的复杂性估计. 而在实际上, 人们设计一些大整数, 看哪种算法能把其中某个数加以分解, 而别的算法做不到. 目前设计的大数主要有两批, 一批是费马数 $F_n = 2^{2^n} + 1$, 另一批是梅森 (Mersenne) 数 $M_p = 2^p - 1$(p 为奇素数). 费马曾经计算过 F_0, F_1, F_2, F_3 和 F_4, 发现它们都是素数, 从而提出猜测：所有 $F_n(n \geqslant 0)$ 都是素数. 后来欧拉发现 $F_5 = 641 \times 6700417$. 1880 年, 82 岁的 Landry 分解出 $F_6 = 274177 \times 67280421310721$. 1970 年, Morrison 和 Brillhart 发明了连分数算法, 分解了 $F_7 = P_{17} \times P_{22}$(这里 P_l

表示一个十进制的 l 位素数). 1980 年, Brent 和 Pollard 发明了一种“rho”算法, 分解出 $F_8 = P_{16} \times P_{62}$. 1988 年和 1995 年, Brant 用新发明的椭圆曲线算法分解出 $F_{10} = P_8 \times P_{10} \times P_{40} \times P'_{252}$ 和 $F_{11} = P_6 \times P'_6 \times P_{21} \times P_{22} \times P_{564}$. 1990 年, Lenstra 和 Pollard 用新的数域筛法, 并动用了 700 个工作部, 分解了 $F_9 = P_7 \times P_{49} \times P_{99}$. 目前人们已经把 F_{12} 分解成 $P_6 \times P_8 \times P'_8 \times P_{12} \times P_{16} \times C_{1187}$, 其中 C_{1187} 是一个还未被分解的 1187 位整数. 到目前为止, 除了费马计算过的 $F_i(0 \leqslant i \leqslant 4)$ 之外, 人们还没有发现任何新的费马数是素数. 另一方面, 梅森数当中有许多是素数, 并且在大数分解比赛中, 许多新发现的大素数记录都是梅森数, 也有许多梅森数不是素数. Lendry, Cole, Poulet, Lenhmer 分别于 1869, 1903, 1932 和 1947 年分解了 $M_{59} = P_6 \times P_{13}, M_{67} = P_9 \times P_{12}, M_{73} = P_3 \times P_7 \times P_{13}$ 和 $M_{113} = P_4 \times P_5 \times P'_5 \times P \times P_{16}$. 1992 年, A.K.Lenstra 和 D.Bernstein 用数域筛法和两个超大型并行计算机分解了 $M_{523} = P_{69} \times P_{90}$.

以上介绍的大数分解算法都是确定型的算法, 还有一些更为实用的概率型的大数分解算法. 利用这种算法, 每进行一次所需时间不长, 会以较大的概率找到 N 的一个素因子. 若找不到则改变一些参数再做一次. 经过几次之后, 就会以很大的概率发现 N 的一个素因子. 判别这种大数分解算法的好坏需使用解析数论和概率统计中的理论和方法, 但是应当指出, 判别一个大数是否为素数比将 N 作素因子分解要容易得多. 也就是说, 要证明 N 是合成数, 不需用一定要找出 N 的一个比 N 小的素因子. 例如, 早在 1952 年 Robinson 就知道 F_{10} 不是素数. 但是次年, 用 SWAC 计算机才找到 F_{10} 的一个素因子 45592577. 长期以来, 人们认为素性判别 (即判别大数 N 是否为素数) 应当有多项式算法, 但是这种算法一直到 2002 年 8 月才由印度三位年轻学者 Agrawal, Kayal 和 Saxena 给出, 复杂度为 $O((\log N)^6)$.

最后指出以上所说的大数分解算法是建立在数字型电子计算机 (包括采用多个工作站的并行运算) 基础上. 20 世纪末期, 基于量子物理机制的量子计算机成为热点. 1994 年, P.Shor 证明了, 若采用量子计算方式, 则大数分解有多项式算法. 这项工作获得了 1998 年世界数学家大会 (柏林) 的尼凡林那奖, 这是给予四年内在数学应用领域成果最好的一位年轻人. 但是, 目前离建成量子计算机并且能达到实用程度, 似乎还需用相当长的时间. 20 世纪末, 人们采用量子计算机的装置和 Shor 算法“成功”地把 15 分解成 3×5, 在将来, 大数分解的 RSA 体制被攻破, 是由于找到采用电子计算机的多项式算法还是由于量子计算机得到应用, 人们不得而知.

参 考 文 献

[1] Agrawal M, Kayal N and Saxena N. Primes is in P. Dept of Computer Science and Engineering Indian Institute of Technology Kanput

[2] Morain F. La primalité en temps polynomials(d'apres Adlemen, Huang, Agrawal, Kayal, Saxena) // Astérisque, Séminaire Bourbaki, 2003: 917

[3] Manin Yu I. Classical computing quantum computing and Shor's factoring algorithm. Séminaire Bourbaki, 1999, 41: Exposé No. 862

[4] Manin Yu I, Panchishkim A A. Introduction to Modern Number Theory. Second ed. Berlin: Springer-Verlag

[5] Ribenboim P. The Little Book of Bigger Primes. Berlin: Springer-Verlag, 1999(中译本：博大精深的素数. 孙淑玲, 冯克勤译. 北京：科学出版社, 2007)

撰稿人：冯克勤
清华大学

离散对数求解问题

Problem of Discrete Logarithm

1976 年公钥密码诞生, 是密码学发展史上的一个革命性事件. 这一事件不但促进了密码学的发展和应用, 同时也刺激了计算数论的发展. 著名的 Diffie-Hellman 体制就是基于离散对数求解的困难性.

1. Diffie-Hellman 体制

设 A, B 为网络通信的两方, p 为素数, g 为摸 p 的原根, p 和 g 都是公开的, x_A 和 x_B 分别为 A 和 B 的秘密密钥 ($1 < x_A, x_B < p-1$). A, B 双方产生共享密钥以建立通信的过程如下：

① A 利用自己的秘密密钥 x_A 计算 $y_A = g^{x_A} \bmod p$,

B 利用自己的秘密密钥 x_B 计算 $y_B = g^{x_B} \bmod p$;

② A 将 y_A 发给 B,

B 将 y_B 发给 A;

③ A 利用 y_B 计算 $K_A = y_B^{x_A} \bmod p$,

B 利用 y_A 计算 $K_B = y_A^{x_B} \bmod p$.

A, B 各自计算的 K_A,K_B 是一样的, 均为 $K = g^{x_A x_B} \bmod p$. 于是 A, B 双方拥有了共同的密钥, 利用事先约定好的加密体制就可以进行秘密通信了. 假设 C 为非法窃听者, 想获取共享密钥 K. 在公共信道上, C 得不到 x_A 和 x_B, 但是可以得到 y_A 和 y_B. 若可通过 y_A 求出 x_A, 则可计算出 $K = y_B^{x_A} \bmod p$.

假设 $g^x \equiv y \bmod p$, 如何根据 y 求 x? 这一问题称为有限域 F_p 上的离散对数求解问题.

2. 离散对数问题

设 $G = \langle a, \cdot g \rangle$ 为有限循环群, $|G| = N$, a 为 G 的生成元, 群运算以乘法表示. 群 G 上的离散对数是指：给定元素 $b \in G$, 求整数 $x, 0 \leqslant x \leqslant N-1$, 满足 $a^x = b$.

常见的具有重大应用价值的是下述四类离散对数问题：

① 有限域 $G = F_{p^n}^*$ 上的离散对数求解, 其中 n 为大整数, p 为小素数; $p = 2$ 时具有特殊性.

② 有限域 $G = F_{p^n}^*$ 上的离散对数求解, 其中 p 为大素数, n 为小整数, $n = 1$ 时具有特殊性. Diffie-Hellman 体制就是基于有限域 F_p 上的离散对数求解的困难

性.

③ $G=E_p$ 为有限域 F_p 上的椭圆曲线点群, 其中 p 为大素数.

④ $G=E_{2^n}$ 为有限域 F_{2^n} 上的椭圆曲线点群, 其中 n 为整数.

此外还有其他的比如理想类群上的离散对数求解问题.

3. 算法研究及进展

自从公钥密码体制诞生以来, 离散对数求解引起了国际上密码学家和数学家的广泛关注, 取得了一系列进展, 应用了深刻的代数数论和算术几何.

目前, 第一类离散对数求解问题的最好算法是函数域筛法, 时间复杂度为 $L_{p^n}[1/3,1.523]$, 其中复杂度函数定义为

$$L_x[\delta,c]=O(c\exp(\log^{\delta}x\log^{1-\delta}\log x)).$$

除了算法研究以外, 还不断有世界纪录产生, 对于 $p=2$ 的情形, 目前最新的结果是 $n=609$.

第二类离散对数求解问题的算法是数域筛法, 时间复杂度为 $L_{p^n}[1/3,1.923]$.

第三、四类离散对数求解问题还没有次指数算法. 目前的求解算法为 Pollard's ρ 方法, 其时间复杂度为 $O(|G|^{1/2})$.

4. 问题

① 能否进一步改进第一、二类离散对数求解问题的次指数算法以降低 c 和 δ.

② 第一、二类离散对数求解问题是否有多项式时间算法?

③ 第三、四类离散对数求解问题是否次指数算法? 更进一步, 是否有多项式时间算法?

参 考 文 献

[1] Schirokauer O. Discrete logarithms and local units. Phil Trans R Soc Lond, 1993, A 345: 409-423

[2] Adelman L M. The function field sieve//Algorithmic Number Theory. LNCS877, 1994: 108-121

[3] Coppersith D. Fast evalution of logarithms in fields of characteristic. IEEE Transactions Information Theory, 1984, 30: 587-594

[4] Wiedemann D. H. Solving sparse linear systems over finite fields. IEEE Trans Inform Theory, 1986, IT-32, 1: 54-62

[5] Cohen H. A Course in Computational Algebraic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1983

[6] Adleman L M, Huang M A. Function field sieve method for discrete logarithms over finite fields. Information and computation, 1999, 151: 5-16

撰稿人：龚　贤
中国科学院数学与系统科学研究院

多变元公钥密码中 MQ 问题是否存在有效算法?

Is There Any More Efficient Algorithm for MQ Problem in Multivariate Public Key Cryptography?

设 $\mathbb{F}_q$ 是一个素数特征的有限域，$q := |\mathbb{F}_q|$. 一般来说，q 是某个素数的幂. 设 $n \in \mathbb{N}$ 是变量的个数, $m \in \mathbb{N}$ 是方程的个数, $d \in \mathbb{N}$ 是方程系的次数. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的变量, $\mathcal{P}$ 是由关于 n 个变量的 m 个最高次为 2 次的方程组成的方程系, 即 $\mathcal{P} := (p_1, p_1, \cdots, p_m)$, 每个方程 p_i 具有下列形式：

$$p_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \sum \gamma_{i,v} \prod_{j=1}^{d} x_{vj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

当 $d = 2$ 时, 上述多项式系求解问题称作 MQ (multivariate quadratic) 问题. 这时每个方程 p_i 的形式是

$$p_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \gamma_{i,j,k} x_j x_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_j + \alpha_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

这个问题中的参数有 $d \in \mathbb{N}$, 域大小 $q = p^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, p 是一个素数. 参数还有变量个数 $n \in \mathbb{N}$ 和方程的个数 $m \in \mathbb{N}$.

当 $d = 1$ 时, 上述问题就是有限域上线性方程和仿射方程的求解问题, 其解法已经得到很好的研究, 使用 Gaussian 消元法可在 $\mathcal{O}(n^3)$ 时间内求解. 对于稀疏多项式方程, 使用 Strassen 算法可在 $\mathcal{O}(n^\omega)$ $(2 \leqslant \omega \leqslant 3)$ 时间内求解. 当 $d \geqslant 2$ 时, 1997 年, Jacques Patarin 与 Louis Goubin 证明上述问题是一个 NPC 问题. 2002 年, Christopher Wolf 给出了一个详细的证明.

近十年来，多变元公钥密码体制 (简称 MPKC) 正日益被人们看好在未来取代如今被广泛运用的公钥密码体制 RSA. MPKC 的一般结构是：$\mathcal{P} = T \circ \mathcal{P}' \circ S$. 其中, 公钥 $\mathcal{P}$ 和私钥 $\mathcal{P}'$ 都是有限域上的二次多项式系, 私钥 T, S 是有限域上的仿射变换. 故 MPKC 常常被称做基于 MQ 问题的公钥密码体制, 如 MI, HFE 和 TTM 等. RSA 的安全性依赖于传统计算机分解大整数难这个事实. 但对于量子计算机来说, 大整数分解存在着多项式时间算法, 如 Shor 算法. 而对于有限域上 $d \geqslant 2$ 时的多项式系求解问题, 至今还没发现量子算法, 量子计算机在这类问题的求解上比传统计算机没有任何优势.

目前, 对于 $n \leqslant m$ 的有限域上 $d \geqslant 2$ 时的多项式系求解问题, F_5 和 $F_5/2$ 是较快的算法, 该算法依赖于 Gröbner 基的计算. 对于 $n > m$ 的有限域上 $d \geqslant 2$ 时的多项式系求解问题, Nicolas Courtois, Louis Goubin, Willi Meier 和 Jean-Daniel Tacier 等发现了一个比基于求 Gröbner 基算法更快的解法. 2002 年, Faugère 解决了 HFE 的第一个挑战, 他使用 $F_5/2$ 成功地求解 $d = 2, n = 80, m = 80$ 的有限域上多项式系求解问题, 当时所用机器是 AlphaServer DS20E (EV68 833 Mhz), RAM 内存 4GB, 计算时间 96 个小时. 2004 年, Steel 使用 Magma 实现了 F_4 算法, 并用它来解决 HFE 的第一个挑战, 结果比 Faugère 的 $F_5/2$ 算法要快. Steel 使用了带一个 Opteron 248 处理器 (2.2GHz, 1MB L2 缓存) 的 Sun V20Z 和 8GB 内存. 运算时间仅为 6.9 小时. 高小山等人发展了关于布尔函数的快速吴特征列方法, 对于一类由流密码产生的非线性布尔函数测试的结果比 Magma 中的 Gröbner 基 F_4 算法要快数倍.

对于多变元公钥密码系统 MPKC, 一般来说, 不可能是有限域上的一个随机多变元多项式系. 对于具体的多变元公钥密码系统, 它们所依赖的 MQ 问题的实例, 可能存在着有效算法, 如 MI 密码系统的线性化方程算法 (LE), HFE 密码系统的 Gröbner 基算法. 对于更多的多变元公钥密码系统 MPKC 所对应的 MQ 问题是否存在有效的算法, 是一个迫切需要解决的重要问题.

参 考 文 献

[1] Michael R Garay, David S Johnson. Computers and Intractability—A Guide to the Theory of NP-Completeness. W H Freeman and Company, 1979

[2] Fraenkel A S, Yesha Y. Complexity of problems in games, graphs and algebraic equations. Discrete Applied Mathematics, 1979, 1(1-2): 15-30

[3] Christopher Wolf. “Hidden Field Equations”(HFE) - variations and attacks. Diplomarbeit, Universit at Ulm, 2002. http://www.christopher-wolf.de/ dpl, 87 pages

[4] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F5)//International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation-ISSAC 2002. ACM Press, 2002, 75-83

[5] Jean-Charles Faugère, Antoine Joux. Algebraic cryptanalysis of Hidden Field Equations (HFE) using Gröbner bases//Dan Boneh. Advances in Cryptology-CRYPTO 2003. Springer-Verlag, 2003, 44-60

[6] Nicolas Courtois, Louis Goubin, Willi Meier and Jean-Daniel Tacier. Solving underdefined systems of multivariate quadratic equations//David Naccache and Pascal Paillier. Public Key Cryptography-PKC 2002. Springer-Verlag, 2002, 211-227

[7] Jean-Charles Faugère. HFE challenge 1 broken in 96 hours. Announcement that appeared in news://sci.crypt, 19th of April 2002

[8] Allan Steel. Allan steel's Gröbner basis timings page. http://magma.maths.usyd.edu.au/users/allan/gb/

[9] Jean-Charles Faugère. Algebraic cryptanalysis of (HFE) using Gröbner bases. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, February 2003. http://www.inria.fr/rrrt/rr-4738.html, 19 pages

[10] Chai F, Gao X S and Yuan C. A Characteristic Set Method for Solving Boolean Equations and Applications in Cryptanalysis of Stream Ciphers, Journal of Systems Science and Complexity, 2008, 21(2): 191-208

撰稿人：刘卓军
中国科学院数学与系统科学研究院

“最小秩”问题是否存在有效算法?

Is There Any More Efficient Algorithm for The MinRank Problem?

给定正整数 r, n, 且 $r < n$ 和有 q 个元素的有限域 $\mathbb{F}_q$ 上 m 个 n 阶方阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 求 $\mathbb{F}_q$ 上的一个 m 维非零向量 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$, 使得矩阵 $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m$ 的秩不大于 r. 这个问题称为“最小秩”问题. 现在人们需要弄清楚: 这个问题到底有多难? 在什么情形下存在有效解法? 与此相仿的是“最大秩”问题: 找 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的一个线性组合, 使得所得矩阵的秩不小于正整数 $R(R < n)$.

这个问题源于一般线性码理论中的两个问题:“子空间重量”问题和“秩距离码译码”问题. 1978 年, Berlekamp 在研究一般线性码理论时, 提出“子空间重量”问题, 并证明了求一般线性码的最小 Hamming 距离是一个 NPC 问题. 1985 年, 俄国学者 Gabidulin 提出了秩距离码和“秩距离码译码”问题。1996 年, Shallit, Frandsen 和 Buss 将上述两个问题中的一个矩阵推广到 m 个矩阵, 提出了“最小秩”问题。Shallit 等人证明:“最小秩”问题 (或“最大秩”问题) 是一个 NPC 问题. 后来人们发现: 当 r 比较小的时候, “最小秩”问题是可解的. 类似地, 当 R 比较大的时候, “最大秩”问题是可解的. 2000 年, Louis Goubin 和 Nicolas T. Courtois 分别对这两种情形找到了算法, 其复杂度分别为 $O(q^r)$ 和 q^{n-R}.

近十年来, 多变元公钥密码体制 (简称 MPKC) 日益受到人们的重视. MPKC 的一般结构是: $\mathcal{P} = T \circ \mathcal{P}' \circ S$. 其中, 公钥 $\mathcal{P}$ 和私钥 $\mathcal{P}'$ 都是有限域上的二次多项式系, 私钥 T, S 是有限域上的仿射变换. 故 MPKC 常常被称做基于 MQ 问题的公钥密码体制, 如 MI, HFE, TPM 和 TTM 等. 这些 MPKC 中, 公钥 $\mathcal{P}$ 和私钥 $\mathcal{P}'$ 的每个多项式都可以用矩阵表示. 从 T 出发, $T^{-1} \circ \mathcal{P}$ 可以表示为一系列矩阵的线性组合, 从而转化为“最小秩”问题. 通过求解“最小秩”问题实例, 找出私钥 $\mathcal{P}'$ 的二次项系数和仿射变换 S, 然后通过 Gaussian 消去法求私钥 $\mathcal{P}'$ 的一次项系数和常数项.

目前的问题是: 对于上述特殊情形下甚至一般情形下的“最小秩”问题是否存在更有效的算法? 如果这个问题的回答是肯定的, 那么对于上述可用“最小秩”问题来作密码分析的几个多变元公钥密码系统来说, 它们的安全性将受到严重的威胁. 因为若“最小秩”问题存在有效算法, 那么就可以直接得到这些多变元公钥密码系统的私钥.

参 考 文 献

[1] Louis Goubin, Nicolas T Courtois. Cryptanalysis of the TTM cryptosystem//Tatsuaki Okamoto. Advances in Cryptology-ASIACRYPT 2000. Springer-Verlag, 2000, 44-57

[2] Shallit J O, Frandsen G S and Buss J F. The computational complexity of some problems of linear algebra. BRICS series report, Aarhus, Denmark, RS-96-33, 1996. Available at http://www.brics.dk/RS/96/33

[3] Don Coppersmith, Jacques Stern and Serge Vaudenay. Attacks on the birational permutation signature schemes//Douglas R Stinson. Advances in Cryptology-CRYPTO 1993. Springer-Verlag, 1993, 435-443

[4] Don Coppersmith, Jacques Stern and Serge Vaudenay. The security of the birational permutation signature schemes. Jounal of Cryptology, 1997, 10: 207-221

[5] Aviad Kipnis, Adi Shamir. Cryptanalysis of the oil and vinegar signature scheme// Hugo Krawczyk. Advances in Cryptology-CRYPTO 1998. Springer-Verlag, 1998, 257-266

[6] Aviad Kipnis, Adi Shamir. Cryptanalysis of the HFE public key cryptosystem// Michael Wiener. Advances in Cryptology - CRYPTO 1999. Springer-Verlag, 1999, 19-30

[7] Christopher Wolf, An Braeken and Bart Preneel. Efficient cryptanalysis of RSE(2)PKC and RSSE(2)PKC//Conference on Security in Communication Networks-SCN 2004, 145-151, September 8-10 2004. extended version: http://eprint.iacr.org/2004/237

[8] Gabidulin E M. Theory of codes with maximum rank distance. Problems of Information Transmission, 1985, 21: 1-12

[9] Berlekamp E R, McEliece R J and Tilborg H C A Van. On the inherent intractability of certain coding problems. IEEE Transactions on Information Theory, 1978, IT-24(3): 384-386

[10] Stern J, Chabaud F. The cryptographic security of the syndrome decoding problem for rank distance codes//Kim Kwangjo and Matsumoto Tsutomu. Advances in cryptology-ASIACRYPT ’96 : International Conference on the Theory and Applications of Cryptology and Information Security, Kyongju, Korea, November 3-7, 1996, volume 1163 of LNCS, 368-381. Springer-Verlag, 1996

撰稿人：刘卓军
中国科学院数学与系统科学研究院

符号–数值混合计算

Symbolic-Numeric Computation

语言、文字与计算机是人类文明的三大标志. 特别是计算, 计算能力的高低, 可以衡量一个民族或地区进步与发展的程度.

人类为了生活、生产、商贸、建设、管理以及各种竞争、斗争、甚至战争的需要, 必须解决形形色色的问题, 而这种问题的依据与答案, 往往都以数值的形式表示出来. 因此从远古以来, 就发展了源于整数而终于实数复数的数值表示形式及其各种计算的方法, 从最简单的加、减、乘、除, 到各种方程解法, 以及有关的如插值、逼近、收敛、极限、误差估计等等理论与方法. 20 世纪中叶, 出现了计算机, 并发展迅猛, 不仅使计算能力大幅度提高, 而且具有多种特殊功能. 这使计算上升为与理论、实验鼎足而立的科研三大主要形式. 其中, 以单纯的数值为对象的, 也于 20 世纪上升为一门独立的学问, 称为计算数学. 它与各种其他科学结合, 还形成了形形色色诸如计算力学、计算化学等等分支交叉学科, 名目繁多.

数学由于理论发展的需要, 需使计算形式化、符号化, 由此形成了与数值计算有所不同的形式计算或符号计算方法. 近来的研究预示, 不仅这种计算有助于数学的理论推导, 甚至定理的证明也可通过这种计算来实现. 实行几何定理的机器证明, 即是这方面一个成功的范例.

科学技术的发展要求解决形形色色的问题, 由于问题的原始条件或数值与所求答案之间往往用某种形式的方程联系起来, 诸如对国民经济与国防安全等利害攸关的各种优化问题、自动控制问题、运筹规划问题等等, 最后都将归结为解某种类型方程的问题. 因而解各种类型的方程如多项式方程、微分积分方程、差分方程等自然成为数学应予重视的核心部分, 而各种方程的解决都无不通过计算这一途径. 计算的方法繁多, 但大体上说来不外乎两种形式：一是数值计算, 又一是符号计算. 在计算机上实施时, 前者快速, 后者精确, 但又各有缺点. 计算机只能识别有限事物, 故对于一般的实数或复数只能逐步逼近, 取适当精度的近似值. 因而收敛值无法确定, 更无法全部获得. 至于符号计算, 理论上虽可获得全部某种形式的精确解答, 但往往计算量大, 且表达形式十分庞大, 以至于即使现代的巨型机也难以承受. 为此, 设计一种混合算法, 在计算过程中不时切换两种计算方法, 使之既有两种计算之长, 又避两种计算之短, 应是解决目前计算上困难的一种适当途径. 为此应在理论上严格证明在混合计算中以数值代替文字符号时必须具有一定的稳定性, 即在数值稍有

偏差时, 不致过分失真而使解答面目全非. 从而将误差控制在解决一类问题所需要的范围内, 即得到误差可控算法. 这类算法也被称为可验证算法, 或可信算法. 这将是一个既有理论依据又能实际运用的一个值得考虑的问题. 一些初步的进展可见所列参考文献.

参 考 文 献

[1] Stetter H J. Numerical Polynomial Algebra. Philadelphia: SIAM, 2004
[2] Wang D, Zhi L. Symbolic-Numeric Computation. Basel: Birkhäuser, 2006
[3] Wu W T. Mathematics Mechanization. Beijing: Science Press/Kluwer, 2001

撰稿人：吴文俊
中国科学院数学与系统科学研究院

多项式方程组的有效求解

Solving Polynomial Equation Systems Effectively

多项式方程求解是最古老与核心的数学问题之一. 根据方程求解的数域, 常见的方程求解问题包括：复数域上的方程求解、实数域上的方程求解、有限域上的方程求解、布尔方程的求解等. 根据求解算法的类型, 我们可以考虑准确的符号算法、数值近似算法、随机算法、符号和数值混合算法、近似算法等. 根据方程解的特性, 我们可以考虑零维方程的数值解, 也可以考虑方程的正维数的解, 即所谓流形解. 本书中, 有若干问题涉及方程求解, 包括 "设计既实用又安全的公钥密码系统","变元公钥密码中 MQ 问题是否存在有效算法","曲面交线的高效可靠计算", "平面连杆机构轨迹综合", "空间并联机构的位置正解".

复数域上零维方程求解是最基本的, 本问题考虑这一情形.

方程求解的符号算法可以给出方程组解的完整刻画与精确求解, 具有众多的重要应用. 但是已知的算法都具有指数复杂度, 而且存在例子说明指数复杂度是不能改进的. 例如 Groebner 基方法[2]、柱型分解法[1] 与 Ritt- 吴特征列方法[9].

一般认为, 只有多项式复杂度的算法是可以有效求解的, 因此符号计算方法对于大规模方程组一般是不可行的. 退而求其次, 我们可以考虑方程求解的近似算法, 即是否存在方程求解的具有多项式复杂度的近似算法. 这是 Smale 提出的 20 世纪 18 个重大数学问题之一.

问题 对于具有 n 个变量的 n 个多项式, 是否存在统一的平均复杂度为多项式的近似算法求出方程组的一组解? 更一般地, 是否可以将多项式方程组根据其是否可以有效求解进行分类?

Shub 与 Smale 在他们的系列论文 [1]~[5] 中已经给出了求解多项式组的复杂度为多项式的近似算法, 但是这一算法不是统一的. 具体介绍如下.

考虑映射 $f : \mathrm{C}^n \to \mathrm{C}^n$, $f(z) = (f_1(z), \cdots, f_n(z))$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 其中 f_i 是 Sd_i 次多项式. 可以通过引入一个新的变元 z_0, 将 f_i 变为齐次多项式, 这样我们将首先在射影空间中考虑问题, 然后回到初始的仿射空间.

由于 Abel 与 Galois 的结果, 我们知道代数方程是不能显式求解的, 近似求解可以用 Newton 迭代内在刻画. 计算机复杂度可以用求解方程所用的实数的算数运算个数与比较次数来衡量. 为了得到算法的平均计算复杂度, 我们需要给多项式空间一个概率分布, 则问题可以更加精确地描述为：

问题　对于具有 n 个变量的 n 个多项式 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$, 是否存在一个近似求解算法, 其平均计算时间小于 f 的系数个数的一个多项式?

Shub-Smale 证明上述问题是可以解决的, 但是对于不同的 $d=(d_1,\cdots,d_n)$, 算法是不同的. 一个求解算法称为统一的是指这一算法可以适用于所有 d.

参 考 文 献

[1] Arnon D S, Collins G E and McCallum S. Cylindrical algebraic decomposition. SIAM J on Comput, 1984, 13: 878-889

[2] Buchberger B. An algorithm for finding a basis for the residue class of zero-dimension polynomial idea. Aequationes Math, 1970: 374-383

[3] Smale S. Mathematical problems for the next century. Mathematical Intelligencer, 1998, 20: 7-15

[4] Shub M, Smale S. Complexity of Bezout's theorem I. Geometric aspects. Journal of the American Mathematical Society, 1993, 6(2): 459-501

[5] Shub M, Smale S. Complexity of Bezout's theorem II. Volumes and probabilities, in Computational algebraic geometry. Progress in Mathematics, Basel: Birkhäuser. 1993, 109: 267-285

[6] Shub M, Smale S. Complexity of Bezout's theorem III. Condition number and packing. J of Complexity, 1993, 9: 4-14

[7] Shub M, Smale S. Complexity of Bezout's Theorem IV. Probability of Success; Extensions. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(1): 128-148

[8] Shub M, Smale S. Complexity of Bezout's theorem V. Polynomial time. Theoret Comp Sci, 1994, 133: 141-164

[9] Wu W T. Mathematics Mechanization. Beijing: Science Press/Kluwer, 2001

撰稿人：高小山
中国科学院数学与系统科学研究院

基于有理多项式平方和的全局最优验证

Exact Certification of Global Optimality Via Rationalizing Sums-of-Squares

1900 年, D. Hilbert 在巴黎国际数学家会议上提出了对数学发展产生重大影响的 23 个数学问题, 其中第十七个问题为：任意实系数的多元多项式 f 能写成 $\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)$ 中有理函数的平方和的充分必要条件是 f 是半正定的 (i.e., 假设 f 在 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ 上有定义, 则 $f(a_1,\cdots,a_n)\geqslant 0$). 当 $n=1$ 时, $f(x)\in\mathbb{R}(x)$ 是半正定的, 那么 $f(x)$ 可以写成 $\mathbb{R}(x)$ 上两个有理函数的平方和. Hilbert 于 1893 年证明了 $n=2$, $f(x,y)\in\mathbb{R}(x,y)$ 是半正定的, 则 $f(x,y)$ 能写成 $\mathbb{R}(x,y)$ 上 4 个有理函数的平方和. Artin 在 1927 年证明了 Hilbert 的猜想在 $\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)$ 上成立. 假设 K 是一个域, 存在正整数 $p=P(K)$ 满足 K 上的任何平方和一定能写成 p 个 K 上的元素的平方和, 最小的 p 被称为 Pythagoras 数. 已知的 Pythagoras 数如 $P(\mathbb{Q})=4, P(\mathbb{R})=1, P(\mathbb{R}(x))=2, P(\mathbb{R}(x,y))=4$. 1967 年, Pfister 证明了 $f\in\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的, 那么一定能写成 $\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)$ 中 2^n 个有理函数的平方和. Pourchet 于 1971 年证明了 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 是半正定的, 则可写成 $\mathbb{Q}[x]$ 中 5 个多项式的平方和. 定义 $P_{n,m}$ 和 $\sum_{n,m}$ 分别为 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中 n 个变元, 次数为 m 的齐次半正定多项式和多项式平方和的集合, 显然 $\sum_{n,m}\subseteq P_{n,m}$. Hilbert 证明了当 $n=2, m$ 是偶数并且 $m\geqslant 2$; 或 $n\leqslant 2, m=2$; 或 $n=3, m=4$ 时, $\sum_{n,m}=P_{n,m}$. 对其他情形, 我们有 $\sum_{n,m}\subset P_{n,m}$. Motzkin 于 1967 年给出的多项式：$z^6+x^4y^2+x^2y^4-3x^2y^2z^2$ 是半正定但不能写成多项式平方和的形式 (SOS). Polya 于 1928 证明了如果 $f\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 是偶次的正定多项式, 那么对充分大的正整数 r, $f\cdot\left(\sum {x_i}^2\right)^r$ 是 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 上单项式的平方和. Habicht 于 1940 将 Polya 的结果推广为将任意一个正定的多项式写成两个单项式平方和的商. Reznick 于 1995 年证明了：假设 f 是 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中次数为 m 的齐次正定多项式, $\epsilon(f)$ 是 f 在单位球上的下确界和上确界的比, 如果 $r\geqslant\dfrac{nm(m-1)}{4\log 2\epsilon(f)}-\dfrac{n+m}{2}$, 那么 $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^r f$ 是 $\mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n]$ 上线性形的 $(m+2r)$ 次幂的非负 $\mathbb{R}$- 线性组合. 1964 年,

Krivine 首次提出了基于 Hilbert 第 17 问题的 Positivstellenstz: 任意 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中的多项式 f, f 在 $\mathbb{R}^n$ 中任意点的计值是正的, 当且仅当存在 $s,t\in\sum_{n,m}$ 满足 $s\cdot f=1+t$. Cassier 于 1986 年将定理推广为：f 在以原点为中心的半径为 $R\geqslant 0$ 的球上是非负的, 当且仅当对任意 $\epsilon>0$, $s,t\in\sum_{n,m}$ 满足 $f+\epsilon=s+t\left(R^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$. Pablio 和 Lasserre 于 2000 年分别提出了基于该定理和半正定规划来计算多项式的全局最优解. Kaltofen 等于 2008 年提出了基于有理系数多项式平方和的全局最优问题可信下界的计算.

基于上述讨论, 我们罗列了 4 个相关的问题.

问题 1 对任意 $n\geqslant 2$, $n+2\leqslant P(\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n))\leqslant 2^n$, $P(\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n))$ 的确切值是多少? $P(\mathbb{Q}(x_1,\cdots,x_n))$ 的上界是 2^{n+2} 或 2^n+3 吗?

问题 2 如果 $f\in\mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n]$ 是 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 上的多项式的平方和, 那么 f 也是 $\mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n]$ 上的多项式的平方和吗? 如果是, 则如何构造?

问题 3 f 在 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 上是正定的, 如何构造合适的多项式 $q\in\sum_{n,2r}$ 使得 $q\cdot f\in\sum_{n,m+2r}$, 并且 r 最小或多项式平方和的个数最少.

问题 4 如果 $f\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$, 给定 $f_{min}\in\mathbb{Q}$, 利用 Hilbert 第 17 问题的解, 在多项式时间内验证 $f_{\min}$ 是 f 的下界.

参 考 文 献

[1] HILBERT D. Mathematsche Probleme. Göttinger Nachrichten, 1900, 253-297

[2] ARTIN E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Hamb Abh, 1927, 5: 100-115

[3] PFISTER A. Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Inventiones Math, 1967, 4: 229-236

[4] POURCHET Y. Sur la representation en somme de carres des polynomes a une indeterminee sur un corps de nombres algebriques. Acta Arith, 1971, 19: 89-109

[5] POLYA G. Über positive Darstellung von Polynomen Viereljschr. Ges Zürich, 1928, 73: 141-145

[6] REZNICK B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. Cont Math, 2000, 253: 251-272

[7] KRIVINE J. Anneaux preordonnes. J Anal Math, 1964, 12: 307-326

[8] LASSERRE J. Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM J Optim, 2000, 11(3): 796-817

[9] PARRILO P A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization. PhD thesis, California Institute of Technology, 2000

[10] KALTOFEN E, LI B YANG, Z ZHI L. Exact certification of global optimality of approximate factorizations via rationalizing sums-of-squares with floating point scalars//Proc Intern Symp on Symbolic and Algebraic Computation, 2008, 155-163

撰稿人：支丽红
中国科学院数学与系统科学研究院

有理代数曲面的高效参数化与隐式化方法

Effective Implicitization and Parameterization Methods of Rational Surfaces

空间代数曲面有两种表示方式：**隐式**表示：

$$f(x,y,z)=0 \tag{I}$$

与有理**参数表示**：

$$x=P(u,v),\quad y=Q(u,v),\quad z=R(u,v). \tag{R}$$

由曲面的隐式表示计算其有理参数表示称为曲面的参数化. 反过来, 由曲面的有理参数表示计算其隐式表示称为参数方程的隐式化. 隐式化与参数化问题不仅是经典的数学问题, 其高效算法的研究还在计算机图形学中有重要应用.

参数曲面的隐式化本质上是一个消元问题, 已经存在多种算法, 如 Groebner 基方法、吴方法、结式方法等. 但是, 寻找效率更高的算法任然是一个重要的研究问题. 其中动曲面方法是其中最有效的方法[6], 它可以将曲面的隐式方程表示为一个相对低阶的行列式. 新近发展起来的 μ 基方法则是动曲面方法的理论的完善与自动化, 关于它的研究还在进行中[7]. 一个悬而未决的问题是：

参数曲面的有效隐式化算法　是否任何参数曲面的隐式方程都可以表示成一个低阶的行列式? 如果是, 如何有效得到该行列式?

并不是所有曲面都有参数表示, 具有有理参数表示的代数曲面称为单有理代数曲面.

代数曲面的参数化算法由 Schicho 给出[4]. 但是这一算法非常复杂, 难以有效计算曲面的参数表示. 因此, 寻找曲面的高效参数化算法仍是一个挑战性问题.

曲面的有效参数化算法　给出一般超曲面参数化的高效算法.

参数化中另一个挑性的问题是所谓正则参数化问题. 有理参数表示 (R) 称为曲面 (I) 的正则参数表示如果除去一个低维集合后曲面上的点与参数 (u,v) 的值一一对应. 如果一个曲面具有正则参数化, 则曲面称为有理曲面.

代数几何的一个古典结果是：复数域上任意单有理代数曲面都是有理曲面[2]. 等价的, 复数域上任意有理参数表示 (R) 都可以通过重新参数化变为正则参数表示. 但是对于高维的代数簇, 这一结果不再正确[1,4].

上述结果不是构造性的, 我们因此提出下列问题.

正则参数化问题 对于复数域上曲面的有理参数表示 (R), 通过重新参数化, 使其变为同一曲面的正则有理表示.

这一问题与多变元 Lueroth 定理有关, 可以等价描述为：

构造性 Lueroth 定理 设 $r_1, \cdots, r_m$ 为变量 u, v 的复系数有理函数, 求复系数有理函数 $p(u, v), q(u, v)$ 使得 $\mathbf{C}(r_1, \cdots, r_m)=\mathbf{C}(p, q)$.

正则参数化问题一些初步的结果见文献 [3], 但离问题的完全解决还相差很远.

参 考 文 献

[1] Artin M, Mumford D. Some elementary examples of unirational varieties which are non-rational. Proc London Math Soc, 1972, 25(3): 75-95

[2] Castelnuvo G. Sulla rationalita della involuzioni pinae. Mathematische Annalen, 1894, 44: 125-155

[3] Chionh E W, Gao X S and Shen L Y. Inherently improper surface parametric supports. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23: 629-639

[4] Schinzel A. Polynomials with Special Regard to Reducibility. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

[5] Schicho J. Rational parametrization of real algebraic surfaces. Proc ISSAC 1998, 302-308

[6] Sederberg T W, Chen F. Implicitization using moving curves and surfaces. Proceedings of Siggraph'1995, 1995, 301-308

[7] Chen F, Cox D and Liu Y. The mu-basis and implicitization of a rational parametric surface. Journal of Symbolic Computation, 2005, 39: 689-706

撰稿人：[1]高小山 [2]陈发来

1 中国科学院数学与系统科学研究院

2 中国科学技术大学

曲面交线的高效可靠计算

Effective and Robust Computation of Surface Intersections

曲面求交是计算几何、几何造型和计算机辅助设计等领域中的基本问题之一. 在这些领域中, 曲面之间的布尔运算、拼接、等距曲面的构造等等, 都需要计算两张曲面的交线或者曲面的自交线. 求交问题通常都可以归纳为求解非线性多项式方程组. 在几何造型应用中, 要求非线性方程组的求解具有严格的**可靠性**、**精确性**和**高效性**.

几种最常见的曲面与曲面求交问题是：有理多项式参数曲面与代数曲面求交, 有理多项式参数曲面与有理多项式参数曲面求交, 以及代数曲面与代数曲面求交. 特别地, 有理多项式参数曲面与代数曲面求交是所有情形中最为简单的, 但能够表现曲面与曲面求交这类问题的共同难点.

假设代数曲面表示为 $f(x,y,z)=0$, 参数表示曲面为 $x=X(u,v)/W(u,v)$, $y=Y(u,v)/W(u,v), z=Z(u,v)/W(u,v)$. 把参数表示曲面的方程代入到代数曲面的定义式中, 经通分消去分母得到代数曲线 $F(u,v)=0$. 这样求交问题就转化为跟踪代数曲线 $F(u,v)=0$.

求交问题要解决两个基本问题：**交集的拓扑结构以及交集的准确计算**. 求交算法的可靠性主要是确定交集的拓扑结构, 它是求交算法能否有效地应用于几何造型系统的关键. 曲面与曲面交集的拓扑结构可以非常复杂. 它可能是空集、一些孤立点, 也可能是一些曲线段、小圈、曲面片、或者它们的并集. 此外, 曲面交线的一个特定分支也可以非常复杂. 例如, 两个双三次曲面的交线最高次数可以达到 324 次! 其亏格可高达 200 多! 如此高次数、高亏格的曲线可以表现出非常复杂的局部结构.

由于有限精度计算所引入的数值误差, 当今所有的数值求交算法都无法准确确定交集的拓扑结构及几何形状. 基于符号计算的交线的拓扑结构分析也由于运算量的巨大而不实用.

上述因素使得迄今为止还没有出现一个算法能同时满足上述三方面的要求, 即可靠性、精确性与高效性. 因此寻找满足上述要求的曲面交线算法仍然是计算几何和几何造型等领域最困难的问题之一.

参 考 文 献

[1] Josef Hoschek and Dieter Lasser. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. A K Peters, 1993

[2] Nicholas M Patrikalakis and Takashi Maekawa. Intersection problems//G Farin, J Hoschek and M S Kim. Handbook of Computer Aided Geometric Design. North-Holland, 2002

[3] Nicholas M Patrikalakis and Takashi Maekawa. Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002

撰稿人：邓建松　陈发来
中国科学技术大学

平面向量场不变曲线次数的庞加莱 (Poincaré) 问题

The Poincaré Problem on The Degree Bound
of Invariant Algebraic Curves of Plane Vector Field

考虑如下定义在复平面 $\mathbb{C}^2$ 上向量场：

$$X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 $P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ 并且 $P(x,y), Q(x,y)$ 没有非平凡的公因子. 一条平面代数曲线 $C(x,y) = 0$ 称为 X 的不变代数曲线, 如果 $X(C(x,y)) = H(x,y)C(x,y)$, 这里 $H(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. $\deg(P(x,y))$ 与 $\deg(Q(x,y))$ 中的极大者称为 X 的次数. Poincaré[1] 在研究 X 的可积性时, 提出了如下问题：能否通过 X 的次数给出 X 的所有不变曲线的次数的上界？这就是通常所说的“Poincaré 问题”. 一般来说这个问题的答案是否定的, 比如对于任意的正整数 n, $y = x^n$ 是向量场 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + ny\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的不变代数曲线. 但是 Darboux 定理告诉我们 X 的所有不变代数曲线的次数存在一个上界. 因而这个问题可以修正成：能否给出一个算法求出给定平面向量场的所有不变曲线的次数的一个上界?

一个二元函数 $f(x,y)$ 称为 X 的首次积分, 如果对于 X 的任意积分曲线, $f(x,y)$ 在它上的取值为一常数. 当 $f(x,y)$ 为有理函数时, 称 $f(x,y)$ 为有理首次积分; 当 $f(x,y)$ 为基本函数或者 Liouvillian 函数时, 则称 $f(x,y)$ 为基本首次积分或者 Liouvillian 首次积分. Poincaré 问题是由 Darboux, Poincaré 在研究平面向量场或者一阶一次非线性常微分方程的是否存在有理首次积分时提出来的. 因而也有人将判断给定的平面向量场是否存在有理首次积分问题称为 Poincaré问题. Darboux[2] 证明了给定的平面向量场 X, 或者它的不变代数曲线的数目少于 $\dfrac{d(d+1)}{2} + 2$, 或者它存在一个有理的首次积分并且它的所有不变代数曲线的次数不超过这个首次积分的次数, 这里 d 为 X 的次数. Poincaré则指出了要求 X 的有理首次积分, 仅需要确定 X 的所有不变代数曲线的次数的上界. Prelle 与 Singer[3] 则证明了求 X 的基本首次积分问题的最大障碍在于求它的积分因子, 而求积分因子问题可以归结为确定 X 的所有不变代数曲线的次数的上界.

平面向量场不变曲线次数的 Poincaré 问题是微分方程构造性研究的基本问题之一, 有很多的应用. 举例如下：① 用于寻找平面向量场具有中心 (center, 指

有闭积分曲线环绕的孤立奇异点) 的条件. 寻找平面向量场具有中心的充分必要条件问题对 Hilbert 第十六问题的第二部分起着重要的作用. ② 用于宇宙动力系统 (cosmological dynamical systems) 的求解. ③ Lie 建立了平面向量场的非平凡无穷小对称与它的积分因子之间的对应关系, 因而这个问题的解决对确定平面向量场的无穷小对称有很大的意义. ④ 由于平面向量场等价于一阶一次的微分方程：$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$. 因而解决了 Poincaré 问题就解决了求解这类型一阶一次微分方程的代数函数解问题.

下面简要介绍问题的进展. 用 d 表示 X 的次数. 由于 X 定义了复射影平面上的一个叶状结构 (foliation), 当前人们大多是从几何的角度来研究这个问题. 目前所得到的部分结果当中大多需要对不变代数曲线或者 X 的奇异点添加特定的条件 (奇异点是指有多条积分曲线通过它的点). 当不变代数曲线的各个不可约分支是非奇异的并且各个分支间彼此最多只相交于一个点时, D.Cerveau 与 A.L.Neto[4] 证明了该不变代数曲线的次数不超过 $d+2$. 当 X 的所有奇异点只有有限条积分曲线通过时, M.M.Carnicer 在文献 [5] 中证明了同样的不等式. 这两个结果都是通过 X 的次数来控制不变代数曲线的次数并且奇异点消解技术在其中起着重要的作用. 前面的例子已经说明了一般来说我们不能通过 X 的次数来给出不变代数曲线的次数的上界. 进一步的, A.L.Neto 在文献 [6] 中构造了几类具有固定次数以及奇异点具有固定的局部解析性质的叶状结构, 它具有任意大次数的有理首次积分. 这意味着我们甚至不可能通过 X 的次数以及 X 的奇异点的局部信息来给出不变代数曲线的次数的上界. J.V. Pereira 在文献 [7] 中引进了叶状结构的多亏格 (plurigenera). 他证明了当叶状结构的 Kodaira 维数为 2 时, 不变代数曲线的次数的上界依赖于叶状结构的次数、多亏格以及不变代数曲线的几何亏格. 最近还有一些结果, 通过引进 Milnor 数、示性数或者 Baum-Bott 指标来给出上界, 但是这些结果也都是在对 X 或者不变代数曲线做特定限制的情况下给出.

最后我们将介绍一些在计算机代数领域里这方面已有的工作. 虽然我们无法知道不变代数曲线的次数的上界, 但是由 Darboux 定理只要我们能够找到足够多的不变代数曲线那么我们就能够求出有理首次积分. Prelle 与 Singer 在文献 [3] 中给出了一个算法, 这个算法在预先给定不变代数曲线的次数上界的情形下求出可能的基本首次积分. 这个算法通常被称为“Prelle-Singer”算法. 目前这一算法已经在计算机代数系统 REDUCE 以及 MACSYMA 中实现. Man 与 Maccallum 在文献 [8] 中改进了“Prelle-Singer”算法, 使得算法避免了有理数域的代数扩张上的运算. 他们在计算机代数系统 REDUCE 中部分实现了算法, 只能部分实现的原因是 REDUCE 系统中的 solve 函数无法判断给定的代数方程组是否存在有理数解. Scharwz 在文献 [9] 中给出了求带参数的平面向量场的多项式首次积分的算法, 这

一算法能够给出平面向量场存在多项式首次积分时参数所需要满足的关系. Duarte 等人将“Prelle-Singer”算法推广到了二阶一次常微分方程[10].

参 考 文 献

[1] Poincaré H. Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier order et du premier degré I and II. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, 5: 161-191; 1897, 11: 193-239

[2] Darboux G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du I° order et du premier degré. Bull des Sci Math (Mélanges), 1878, 60-96, 123-144, 151-200

[3] Prelle M J, Singer M F. Elementary first integrals of differential equations. Trans AMS, 1983, 279(1): 215-229

[4] Cerveau D, Neto A L. Holomorphic foliations in $\mathbb{CP}(2)$ having an invariant algebraic curve. Annales de l'institut Fourier, 1991, 41(4): 883-903

[5] Carnicer M M. The Poincare problem in the nondicritical case. Annals of Mathematics, 1994, 140(2): 289-294

[6] Neto A L. Some examples for Poincaré and Painlevé problems. preprint, IMPA, 2000

[7] Pereira J V. On the Poincaré problem for foliations of general type. Math Ann, 2002, 323: 217-226

[8] Man Y K, Malcolm A H Maccallum. A rational approach to the Prelle-Singer Algorithm. J Symbolic Comput, 1997, 24: 31-43

[9] Scharwz F. An algorithm for determining polynomial first integrals of autonomous systems of ordinary differential equations. J Symbolic Comput, 1985, 1(2): 229-233

[10] Duarte L G S, Duarte S E S, Mota L A C P D and Skea J E F. Solving second-order ordinary differential equations by extending the Prelle-Singer method. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34: 3015-3024

撰稿人：冯如勇
中国科学院数学与系统科学研究院

微分代数簇的不可缩分解

Irredundant Decomposition of Differential Algebraic Varieties

代数几何的一个基本结果是：任意一个代数簇可以分解为不可约代数簇的并. 这一分解称为不可缩的, 如果任意一个不可约代数簇都不包含在其他代数簇中.

在构造性代数几何中, 上述定理可以通过 Ritt- 吴特征列方法构造性实现. 设 S 为有理系数 n 个变量的多项式集合, 我们用 Zero(S) 表示 S 中多项式在复数域上的公共零点的集合, 即代数簇.

Ritt- 吴零点分解定理就是要给出任意拟代数簇一个构造性描述. 为此, 我们需要下面的概念. 一个多项式组称为升列, 如果通过变量重新命名后可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}
&A_1(u_1,\cdots,u_q,y_1)=I_1y_1^{d_1}+y_1 \text{ 的低次项}\\
&A_2(u_1,\cdots,u_q,y_1,y_2)=I_2y_2^{d_2}+y_2 \text{ 的低次项}\\
&\cdots\cdots\\
&A_p(u_1,\cdots,u_q,y_1,\cdots,y_p)=I_py_p^{d_p}+y_p \text{ 的低次项},
\end{aligned}$$

其中 A_j 关于 y_i $(i<j)$ 的次数比 A_i 关于 y_i $(i<j)$ 的次数要低. $I_i \neq 0$ 称为 A_i 的**初式**. 设 $AS=\{A_1\cdots,A_p\}$、J 为 A_i 的初式的乘积. 对于以上概念, 定义

$$\mathrm{SAT}(AS)=\{P|\ \text{存在正整数 } n \text{ 使得 } J^nP\in(AS)\}.$$

如果 AS 是不可约的, 则 SAT(AS) 是一个素理想. 可以认为, AS 是这一素理想的一般点的构造性表示. Ritt- 吴分解定理是讲：对一非空多项式集合 S 我们可以在有限步内构造不可约升列 AS_k, 使得[1,4]

$$\mathrm{Zero}\ (S)=\bigcup_k \mathrm{Zero}(\mathrm{SAT}(AS_k)) \tag{1}$$

在上述分解中, 有些分支是多余的. 要想去掉这些多余分支, 我们需要计算 SAT(AS) 的生成基[4].

以上结果除了计算 SAT(AS) 的生成基这一问题之外, 可以平行推广到代数微分方程[1~3]. 因此对于给定的微分多项式集合 S, 我们也可以计算类似式 (1) 的分解, 将相应的微分代数簇分解为不可约微分代数簇. 为了进一步得到不可缩分解, 我们需要解决以下问题：

素理想包含问题 给定两个不可约微分升列 $AS1, AS2$, 判定 SAT($AS1$) 是否包含 SAT($AS2$).

如果集合 S 只包含一个微分多项式 F. 则 Zero(F) 的不可缩分解可以由 Ritt 的低次项定理直接解决[1,2]. 对于不可缩分解 (1) 与 $F=0$ 一个解 s, 我们希望知道 s 属于 (1) 中哪些分支. 这一问题可以归结为下面的问题:

Ritt 问题 A 是含有 n 个变量的不可约微分多项式, 判定 $(0,\cdots,0)$ 是否属于 Zero(SAT(A)).

不难看出 Ritt 问题是素理想包含问题的特殊情况. 对于只含有一个变量的二阶常微分方程, Ritt 解决了以上问题[2]. 一般情形没有什么进展, 原因之一是在代数情形用于求解这一问题的一些工具, 例如, 代数簇的 Chow 形式, 多项式理想的 Groebner 基, 都不能推广到代数微分方程. 因此, 也可以通过研究这些更一般的问题为 Ritt 问题的解决提供线索.

参 考 文 献

[1] Ritt J F. Differential Algebra. American Mathematical Society, 1950

[2] Kolchin E. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York: Academic Press, 1973

[3] Wu W T. On the foundation of algebraic differential polynomial geometry. Sys Sci & Math Sci, 1989, 2(4): 289-312

[4] Wu W T. Mathematics Mechanization. Beijing: Science Press/Kluwer, 2001

撰稿人：高小山

中国科学院数学与系统科学研究院

差分代数簇的不可约分解

Irreducibility Decomposition for Algebraic Difference Varieties

代数几何的一个基本结果是：任意一个代数簇可以分解为不可约代数簇的并. 这一分解称为不可缩的, 如果任意一个不可约代数簇都不包含在其他代数簇中.

在构造性代数几何中, 上述定理可以通过 Ritt- 吴特征列方法构造性实现. 设 S 为有理系数 n 个变量的多项式集合, 我们用 Zero(S) 表示 S 中多项式在复数域上的公共零点的集合, 即代数簇.

Ritt- 吴零点分解定理就是要给出任意拟代数簇一个构造性描述. 为此, 我们需要下面的概念. 一个多项式组称为升列, 如果通过变量重新命名后可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}
&A_1(u_1,\cdots,u_q,y_1)=I_1y_1^{d_1}+y_1 \text{ 的低次项}\\
&A_2(u_1,\cdots,u_q,y_1,y_2)=I_2y_2^{d_2}+y_2 \text{ 的低次项}\\
&\cdots\cdots\\
&A_p(u_1,\cdots,u_q,y_1,\cdots,y_p)=I_py_p^{d_p}+y_p \text{ 的低次项},
\end{aligned}$$

其中 A_j 关于 y_i $(i<j)$ 的次数比 A_i 关于 y_i $(i<j)$ 的次数要低. $I_i \neq 0$ 称为 A_i 的**初式**. 设 $AS=\{A_1,\cdots,A_p\}$、J 为 A_i 的初式的乘积. 对于以上概念, 定义

$$\mathrm{SAT}(AS)=\{P|\text{ 存在正整数 } n \text{ 使得 } J^nP\in(AS)\}.$$

如果 AS 是不可约的, 则 SAT(AS) 是一个素理想. 可以认为, AS 是这一素理想的一般点的构造性表示. Ritt- 吴分解定理是讲：对一非空多项式集合 S 我们可以在有限步内构造不可约升列 AS_k, 使得[1,4]

$$\mathrm{Zero}(S)=\bigcup_k \mathrm{Zero}(\mathrm{SAT}(AS_k)) \tag{1}$$

在上述分解中, 有些分支是多余的. 要想去掉这些多余分支, 我们需要计算 SAT(AS) 的生成基.

以上结果中的大部分内容已经被推广到代数微分方程[4,6,7].

差分方程是另外一类主要的方程类型. 一个自然的问题是研究一般代数差分方程集合解的结构. Ritt 等人早在 20 世纪 30 年代就已经证明：任意一个差分代数簇可以分解为不可约差分代数簇的并[5]. 但是这一结果的构造性算法一直未能给出, 即：给出一个算法将差分代数方程的解集分解为不可约差分代数簇.

解决上述问题一个自然的途径是将 Ritt- 吴零点分解定理推广到代数差分方程, 文献 [2] 和 [3] 已经对这一途径做了尝试. 所得到的结果可以将差分代数簇分解为式 (1) 的形式, 其中 AS_k 是真不可约的. 文献 [2]、[3] 还证明对于真不可约升列 AS, Zero(SAT(AS)) 不空. 由此, 可以解决相应差分与差分–微分混合方程系统的完备理想成员问题.

文献 [2]、[3] 中还定义了强不可约的升列的概念, 并证明：对于强不可约升列 AS, Zero (SAT(AS)) 是自反素理想. 但是, 如何计算强不可约升列还是一个公开问题.

由于差分方程的结构的特点, 很多关于差分方程的问题是不可判定的. 所以, 计算强不可约升列问题也可能是不可判定的. 因此, 我们提出一个弱一些的问题：证明对于一个真不可约升列 AS, Zero(SAT(AS)) 是纯差分代数簇, 即 Zero(SAT(AS)) 可分解为维数与阶数相同的差分代数簇.

参 考 文 献

[1] Cohn R M. Difference Algebra. Interscience Publishers, 1965

[2] Gao X S, Luo Y and Zhang G. A characteristic set method for ordinary difference polynomial systems. MM-Preprints, 2006, 25: 84-102 to appear in JSC

[3] Gao X S, van der Hoeven J, Yuan C and Zhang G. A characteristic set method for differential-difference polynomial systems. MM-Preprints, 2006, 25: 57-83

[4] Ritt J F. Differential Algebra. American Mathematical Society, 1950

[5] Ritt J F, Raudenbush H W. Ideal Theory and Algebraic Difference Equations. Trans of AMS, 1939, 46: 445-452

[6] Kolchin E. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York: Academic Press, 1973

[7] Wu W T. On the foundation of algebraic differential polynomial geometry. Sys Sci & Math Sci, 1989, 2(4): 289-312

撰稿人：高小山　袁春明

中国科学院数学与系统科学研究院

最小微分维数多项式的计算

Computation of Minimal Differential Dimension Polynmials

设 K 是一个零特征微分域, $\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$ 为其微分算子. 设 $L = K\langle\eta_1, \cdots, \eta_n\rangle$ 为 K 及有限个元素 $\eta = \{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$ 所生成的微分扩域. 以 Θ 表示 $\delta_1, \cdots, \delta_m$ 所生成的自由交换半群. 如果 r 是任一个非零整数, 令

$$\Theta(r) = \left\{\delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \in \Theta \,|\, \sum_{i=1}^{m} k_i \leqslant r\right\},$$

又令 $L_r = K(\Theta(r)\eta_1 \cup \cdots \cup \Theta(r)\eta_n)$. Kolchin[2] 于 1964 年证明了存在着一个系数是有理数的单元多项式 $\omega_{\eta|K}(t)$, 使得

(i) 若 r 是任何足够大的整数, 则有 $\omega_{\eta|K}(r) = \mathrm{trdeg}_K L_r$;

(ii) $\deg \omega_{\eta|K} \leqslant m$, 而且 $\omega_{\eta|K}(t)$ 可以写成 $\omega_{\eta|K}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \binom{t+i}{i}$, 其中 $a_0, \cdots, a_m$ 为整数.

(iii) $d = \deg \omega_{\eta|K}$、a_m 和 a_d 与扩域 L/K 的微分生成集 η 无关. d 和 a_d 分别叫作 L/K 的微分类型和典型微分维数. 此外, a_m 是 L 在 K 上的微分超越度, 也就是在所有 L 有限子集 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 中, 使得集合 $\{\theta\xi_i \,|\, \theta \in \Theta, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 在 K 上代数无关的最大的 k.

此多项式 $\omega_{\eta|K}(t)$ 定义为微分扩域 L 在 K 上微分生成集 η 的相关微分维数多项式. 1975 年, Sit[7] 证明了所有有限生成的微分扩域的维数多项式的集合是良序集, 其中序 $\prec$ 定义如下：$f(t) \prec g(t)$ 且而当且对任的够大的整数 r 有 $f(r) < g(r)$.

由此可知, 对每个有限生成的微分扩域 L/K, 总存在有限子集 $\eta \subseteq L$, 使得 $\omega_{\eta|K}(t)$ 在 L/K 的所有有限微分生成子集的微分维数多项式中对于序 $\prec$ 来说是最低的. 此多项式定义为扩域 L/K 的最小微分维数多项式.

下面的两个问题尚无解答：

(1) 寻求一个算法, 可以断定一个已知的微分扩域 L 在 K 上的微分生成集 η 及其相关的微分维数多项式 $\omega_{\eta|K}(t)$, 是否是 L/K 的最小微分维数多项式.

(2) 寻求一个算法, 可以从一个已知的微分扩域 L 在 K 上的微分生成集及此集的微分关系, 计算 L/K 的最小微分维数多项式.

显而易见, 解决了第二个问题, 就可以解决第一个问题.

微分维数多项式的概念与决定物理场的偏微分方程组的强度概念是密切相关的. 强度概念为爱因斯坦首创及研究, 他曾提出了[1] 在定义一物理场的所有微分方程组中, 如何决定其中强度最高之一组的问题. 1980 年, Mikhalev 和 Pankratev[6] 说明了微分代数方程的强度, 可以看成是一个与方程组相关的微分扩域的微分维数多项式. 利用微分代数语言, 爱因斯坦找寻最高强度的问题就是找寻某个微分扩域的最小微分维数多项式的问题. 因而决定此多项式的问题, 不只是微分代数的重要问题, 其解答更可导致理论物理学新的重要成果.

1980 年, Mikhalev 和 Pankratev[6] 证明了: 如果只考虑微分类型是 $m-1$ 的 (m 是 Δ 的基数)、典型微分维数是 r 的有限生成微分扩域, 那么多项式 $\binom{t+m}{m}-\binom{t+m-r}{m}$ 是这些扩域所有微分维数多项式中最小的. 在 [3]、[4] 及 [5, 第 5.7 节] 各文献中, 曾获得多项式 $\binom{t+m}{m}-\binom{t+m-r}{m}$ 或 $d\binom{t+m}{m}$ 为最小微分维数多项式的、有限生成的微分扩域的一些性质. 对某些个别的微分扩域, Kondrateva 得到了它们的最小微分维数多项式 (见文献 [3] 和 [4]). 最后, 在文献 [5, 第 5.7 节], 还证明了由所有最小微分维数多项式形成的集, 就是由所有与有限生成的微分扩域相关的微分维数多项式形成的集.

微分维数多项式的计算, 已知的有两个方法. 其一是基于决定扩域的微分理想的特征集, 其二是利用与扩域相关的 Kähler 微分量模的自由分解 (详见 [6] 和 [5, 第五和第九章]). 不过, 我们没有计算最小微分维数多项式的算法, 就是当生成集的决定理想是由线性微分方程生成的特殊情况下, 这一问题也没有解决. 这说明了上述尚未解答的问题是有实在的困难的. 它们的解答将会是微分代数学及其应用的一个重要的进展.

参 考 文 献

[1] Einstein A. The Meaning of Relativity. Appendix II (Generalization of gravitation theory). 4th ed. Princeton, 1953, 133-165

[2] Kolchin E R. The notion of dimension in the theory of algebraic differential equations. Bull Amer Math Soc, 1964, 70: 570-573

[3] Kondrateva M V. Description of the set of minimal differential dimension polynomials. Vestnik Mosk Univ, ser I, 1988, 1: 35-39 (In Russian)

[4] Kondrateva M V. The minimal differential dimension polynomial of an extension of a field that is defined by a system of linear differential equations. Math Zametki, 1989, 45: 3, 80-86 (In Russian)

[5] Kondrateva M V, Levin A B, Mikhalev A V and Pankratev E V. Differential and Difference Dimension Polynomials. Knower Academic Publishers, Corrected, 1998

[6] Mikhalev A V, Pankratev E V. Differential dimension polynomial of a system of differ-

ential equations. Algebra (collection of papers). Moscow: Moscow State Univ, 1980, 57-67 (In Russian)

[7] Sit W. Well-ordering of certain numerical polynomials. Trans Amer Math Soc, 1975, 212: 37-45

撰稿人：Alexander Levin
The Catholic University of America Washington

罗塔–巴克斯特 (Rota-Baxter) 代数中的几个问题

Problems in Rota-Baxter Algebras

设 K 为交换环, R 为结合 K- 代数. 固定 K 中元素 λ. 若 R 上线性算子 P 满足如下 “Rota-Baxter 方程”, 则称 P 为 (权为 λ 的)Rota-Baxter 算子：

$$P(x)P(y) = P(xP(y)) + P(P(x)y) + \lambda P(xy),$$

这里 x, y 是 R 中任意元素. R 及所带 Rota-Baxter 算子便称为 Rota-Baxter 代数. Rota-Baxter 算子得名于数学家 G. Baxter 在 1960 年源于概率论的研究[2] 和组合大师 Rota 的大力推动[10]. 它集数学分析中的积分算子、离散数学中的求和算子、代数中的标量乘积及量子场论中的投影算子为一体, 并与以著名物理学家杨振宁和 R. Baxter 命名的经典杨 -Baxter 方程[1] 密切相关. 从 20 世纪末开始, Rota-Baxter 算子在 Hopf 代数、数论、组合、Operads、微分代数和量子场论[3,6,8] 等领域都得到应用. 但整体来说, Rota-Baxter 代数的理论及研究还处于初步发展阶段, 许多基本问题尚有待解决, 以下是其中三个：

(1) 自由交换 Rota-Baxter 代数的结构　自由交换 Rota-Baxter 代数在 Rota-Baxter 代数研究中的地位类似于自由交换代数 (即多项式代数) 在交换代数研究中的地位. 因此对其代数性质的研究对整个 Rota-Baxter 代数的研究至关重要. 自由交换 Rota-Baxter 代数的特殊情形在三十年前已由 Rota 和 Cartier[10] 构造. 其一般情形及自由非交换 Rota-Baxter 代数的构造于近几年得到[5,6]. 根据文献 [5] 中得到的张量分解, 自由交换 Rota-Baxter 代数由粘合洗牌代数扩张得到. 而粘合洗牌代数本身又是有名的拟对称多项式代数、洗牌代数和拟洗牌代数的推广, 有着广泛的应用, 而其代数结构并不简单. 以洗牌代数为例, 它在有理数域上是由 Lyndon 字生成的多项式代数, 但在整数环或有限域上就相当复杂. 这方面的进展见文献 [7].

(2) 链条件问题　自由交换 Rota-Baxter 代数中怎样的理想满足升链条件? 与结合代数和微分代数理论的研究类似, 这是 Rota-Baxter 交换代数和 Rota-Baxter 代数几何的研究中要首先解决的问题. 本问题的困难在于自由交换 Rota-Baxter 代数的结构远比自由交换代数 (即多项式代数) 和自由交换微分代数 (即微分多项式代数) 复杂. 因此较常见的理想, 如根理想和 Rota-Baxter 理想, 都不适用. 这方面的初步工作见文献 [4].

(3) 与杨 -Baxter 方程的关系 虽然 Rota-Baxter 算子中的 Baxter 和杨 -Baxter 方程中的 Baxter 并没有关系, 但 Rota-Baxter 算子和经典杨 -Baxter 方程及结合杨 -Baxter 方程却有着密切联系[1]. 一个自然的问题是量子杨 -Baxter 方程应该怎样与 Rota-Baxter 代数或其量子推广联系? 洗牌代数的量子化[9] 有可能提供自由量子 Rota-Baxter 代数的信息.

参 考 文 献

[1] Bai C. A unified algebraic approach to classical Yang-Baxter equations. Jour Phys A: Math Gen, to appear

[2] Baxter G. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. Pacific J Math, 1960, 10: 731-742

[3] Ebrahimi-Fard K, Guo L and Kreimer D. Spitzer's Identity and the Algebraic Birkhoff Decomposition in pQFT. J Phys A: Math Gen, 2004, 37: 11037-11052

[4] Guo L. Ascending chain conditions in Baxter algebras. Internat J Algebra Comput, 2002, 12: 601-622

[5] Guo L, Keigher W. Baxter algebras and shuffle products. Adv Math, 2000, 150: 117-149

[6] Guo L, Keigher W. On differential Rota-Baxter algebras. J Pure Appl Algebra, 2008, 212: 522-540

[7] Guo L, Xie B. Structure theorems of mixable shuffle algebras and free commutative Rota-Baxter algebras. Arxiv: 0807. 2267

[8] Guo L, Zhang B. Renormalization of multiple zeta values. J Algebra, 2008, 319: 3770-3809

[9] Rosso M. Quantum groups and quantum shuffles. Invent Math, 1998, 133: 399-416

[10] Rota G C. Baxter algebras and combinatorial identities I, II. Bull Amer Math Soc, 1969, 75: 325-334

撰稿人: 郭 锂
Rutgers University

阿蒂亚 (Atiyah) 猜想

Atiyah Conjecture

2001 年, M.F. Atiyah 提出了以下猜想[1], 现在被文献称为 Atiyah 猜想：

假设 $\mathbb{R}^3$ 中有互不相同的 n 个点 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$, 用 t_{ij} 表示单位球面上的点 $\dfrac{a_i-a_j}{|a_i-a_j|}$. 构造关于变元 t 的 $n-1$ 次多项式 $p_i=\prod_{j\neq i}(t-t_{ij})$, 猜测这 n 个多项式是线性无关的.

1997 年 Berry 和 Robbins 在研究量子力学的 spin 统计定理时, 提出下面的问题：考虑两个著名的流形, 一个是流形 $C_n(\mathbb{R}^3)$, 它是由 $\mathbb{R}^3$ 中所有 n 个互不相同的点组成的构形空间, 另一个流形是 flag 流形 $U(n)/T$, 它是由 C^n 中 n 个正的向量组成的等价类集合, 其中每个向量差一个相位等价. n 个元素的置换群 S_n 自由作用在 $C_n(\mathbb{R}^3)$ 上. 问：是否对每个 n 都存在连续映射 $f_n: C_n(\mathbb{R}^3)\to U(n)/T$, 它与 S_n 的作用相容? Atiyah 构造的映射 $t_{ij}=\dfrac{a_i-a_j}{|a_i-a_j|}$, 就是 $n=2$ 情形下由 $C_2(\mathbb{R}^3)$ 到 $U(2)/T=S^2$ 的连续映射.

Atiyah 在文献 [1] 中对 $n=3$ 的情形和 n 点共线的情形证明了他的猜想成立. M. Eastwood 和 P. Norbury 证明了 $n=4$ 的时候猜想也成立[3]. Atiyah 和 Sutcliffe 在文献 [2] 中又进一步提出两个更困难的猜想, 称为 Atiyah-Sutcliffe 第二和第三猜想.

参 考 文 献

[1] Atiyah M. Configurations of points. Phil Trans R Soc Lond A, 2001, 359: 1375-1387

[2] Atiyah M, Sutcliffe P. The Geometry of Point Particles. The Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2002, 458(2021): 1089-1115

[3] Eastwood M, Norbury P. A proof of Atiyah's conjecture on configurations of four points in Euclidean three-space. Geometry and Topology, 2001, 5: 885-893

撰稿人：李洪波
中国科学院数学与系统科学研究院

非负矩阵分解

Nonnegative Matrix Factorization

非负矩阵分解 (nonnegative matrix factorization, NMF) 是当代大量数据计算和处理中一种有力的工具. 非负矩阵分解利用对非负的基向量进行没有减法的线性组合, 对数据提供了一种更加简单直观的表示和理解. 应用到非负矩阵分解的领域已涉及图像处理[1]、文本信息挖掘、生物信息等.

非负矩阵分解可以精确的定义如下. 给定一个 $m \times n$ 的非负实矩阵 A (即其所有元素非负) 和其秩 $k, k > 1$, 试找一对非负的实矩阵因子 $m \times k$ 的 W 和 $k \times n$ 的 H, 满足下列条件:

$$A = WH, \tag{1}$$

或断定分解不存在.

对非负矩阵的研究可追溯到 Perron 和 Frobenius 在 1907 年的工作. 而非负矩阵分解问题 (1) 的提出则在 1973 年[2]. 在过去的几十年中, 人们提出各种数值算法来解决非负矩阵分解的逼近问题. 具体来说, 给定一个 $m \times n$ 非负实矩阵 A 和参数 $k \ll \min(m, n)$, 试找非负的实因子 $m \times k$ 的 W 和 $k \times n$ 的 H 对 A 进行低秩的逼近, 即满足下面的优化问题:

$$\min_{W \geqslant 0, H \geqslant 0} f(W, H) \equiv \frac{1}{2} \parallel A - WH \parallel_F^2 . \tag{2}$$

目前存在的算法都是基于局部改进或贪婪算法 (参见文献 [3]、[4] 和其中的参考文献), 这其中没有一种算法能够保证解的最优化性. 这表明找到非负矩阵分解问题的最优化解并非易事. 事实上, 最近人们严格地证明了非负矩阵分解 (1) 是 NP-hard[5]. 由于非负矩阵分解在众多应用中的重要性, 针对非负矩阵分解的理论研究及其算法发展将会继续活跃在组合优化和数值代数的领域.

参 考 文 献

[1] Lee D, Seung H. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. Nature, 1999, 401: 788-791

[2] Berman A, Plemmons R J. Problem 73-14, rank factoriztion of nonnegative matrices. SIAM Review, 1973, 15(3): 655

[3] Paatero P, Tapper U. Positive matrix factorization: A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values. Environmetrics, 1994, 5: 111-126

[4] Kim H, Park H. Nonnegative factorization based on alternating nonnegative constrained least squares and active set method. SIAM J Matrix anal Appl, 2008, 30(2): 713-730

[5] Vavasis S A. On the complexity of nonnegative matrix factorization. http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0708.4149

撰稿人：柏兆俊
University of California

非线性偏微分方程间断解问题的高精度格式

High Order Scheme for Nonlinear PDEs with
Discontinuous Solutions

数值分析和科学计算的一个非常重要的研究领域是设计和分析求解偏微分方程的数值格式. 通常情形下, 这些偏微分方程的准确解是无法显式给出的. 许多不同的数值离散格式被提出并分析, 例如有限差分方法、有限元方法、谱方法等. 对一维问题, 如果数值解可由 N 个自由度来表示. 例如, 对差分方法而言, 即为 N 个网格点的函数值; 对谱方法而言, 即为前 N 项的 Fourier 系数, 当数值解和方程的准确解的误差在某种范数意义下 (例如 L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 范数) 满足 $O(N^{-k})$, 我们称该格式为 k 阶的. 当 k 的值较大时 $(k \geqslant 3)$, 格式称为高精度格式. 有些情形下, $k = 2$ 也被称为高精度格式.

数值格式的精度阶是针对全局误差 (即数值解和方程的准确解之间的误差) 而言的. 数值分析中还涉及到一个局部截断误差的概念. 对时间依赖问题, 从偏微分方程的准确解出发, 数值格式仅走一步所引入的数值误差与时间步长的比值即为局部截断误差. 局部截断误差可以很容易地由 Taylor 展开得到, 但是全局误差的估计通常情况下是非常困难的. 对具有光滑解的偏微分方程, Lax 等价定理及它的一系列推广表明一个稳定格式的全局截断误差和局部截断误差具有相同的误差阶. 因此, 人们常常称局部截断误差为 $O(N^{-k})$ 的数值格式为 k 阶的格式.

利用局部截断误差设计一个高精度的稳定格式是相对容易的. 对于给定的 k, 甚至可以构造出对于任意 k 误差小于 $O(N^{-k})$ 谱方法. 事实上, 谱方法逼近偏微分方程解析解的误差可以达到指数阶递减, 即 $O(e^{-\alpha N})(\alpha > 0$ 为常数). 由 Lax 等价定理及它的一系列推广可知, 这样得到的格式就是全局误差意义下的高精度格式.

尽管如此, 偏微分方程的解可能不光滑. 例如双曲型方程, 即使初值和边界条件非常光滑, 其解也会出现间断. 此时, 利用局部截断误差设计的针对光滑解的高精度格式将无法保证全局误差在强范数 (例如 L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 范数) 意义下的高精度收敛. 举例来讲, 当高阶差分格式或者谱方法用来逼近双曲型偏微分方程的间断解时, 所产生的数值误差在 L^1 范数下将不会好于 $O(N^{-1})$. 这似乎意味着高精度的格式在这一情形下并不优于一阶的格式.

20 世纪 70 年代末, Lax, Mock[3], Majda, McDonough, Osher[4] 证明了高精度格式在逼近线性偏微分方程的间断解时仍然能保持高精度, 但此时度量误差的范数

应为 Sobolev 空间中的负范数. 简单的说, 高精度被隐藏在 “函数矩”(乘以光滑函数后的积分) 中, 但却无法在强范数意义下直接得到. 根据这一数学事实, 我们可以利用某种 “后处理”(例如 [1]、[3]、[4] 中的后处理) 来得到一个调整后的数值解. 调整后的数值解将真正具有强范数 (如 L^2 范数) 意义下的高精度.

那么当偏微分方程为非线性且解有间断时, “高精度” 格式在什么意义下仍然保持高精度呢? 这仍然是一个尚未解决的问题. 至今为止, 除去一些特殊情形, 如事先知道间断的个数及能够精确地计算间断的位置, 没有一个数学理论来证明非线性方程间断解问题的 “高精度” 格式的数值解在某种范数意义下仍然保持高精度. 在文献 [3]、[4] 中用到的数学技巧很大程度上依赖于方程的线性性, 因此无法直接地推广到非线性问题. Lax[2] 认为, 对于非线性偏微分方程的高精度格式的数值解应该仍然包含高精度的信息, 只是我们还不知道怎样描述和提取这些信息. 事实上, Lax 应用信息论的观点表明, 相比线性偏微分方程, 由于非线性偏微分方程解算子的收缩性, 应该有更多的高阶信息被保留在非线性方程高精度格式的数值解当中. 数值结果 (例如 [5] 中的结果) 表明对非线性间断问题的高精度数值解确实含有高精度的信息, 可以通过某种后处理过程来提取. 关于非线性方程高精度的真正含义的严格数学理论的研究将会是非常有意义的工作.

参 考 文 献

[1] Bramble J H, Schatz A H. Higher order local accuracy by averaging in the finite element method. Mathematics of Computation, 1977, 31: 94-111

[2] Lax P D. Accuracy and resolution in the computation of solutions of linear and nonlinear equations//C De Boor and G Golub Recent Advances in Numerical Analysis. Academic Press, 1978

[3] Lax P D, Mock M. The computation of discontinuous solutions of linear hyperbolic equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1978, 31: 423-430

[4] Majda A, McDonough J and Osher S. The Fourier method for nonsmooth initial data. Mathematics of Computation, 1978, 32: 1041-1081

[5] Shu C W, Wong P S. A note on the accuracy of spectral method applied to nonlinear conservation laws. Journal of Scientific Computing, 1995, 10, 357-369

撰稿人：舒其望

美国布朗大学

分片多项式方程组的计算及相关几何问题

Computation of System of n-Dimensional Piecewise Polynomials, and Its Related Geometric Problems

经典代数几何学之所以是一门具有强大生命力的基础性的分支学科, 原因之一是它顺应了人们采用多项式来刻画几何曲线、曲面和近似表达各种函数特别是连续函数的历史潮流. 按照 Weierstrass 逼近定理、定义于有界闭域上的任意给定的连续函数都可以用多项式序列来一致逼近. 然而由于多项式本身的整体性太强, 它在一点附近的性质足以决定它的整体性质, 但这种整体性质却不为大多数几何对象所具备. 因而许多几何对象不能用多项式来很好地刻画. 这在一定程度上制约了几何学的应用与发展. 随着 20 世纪 40 年代现代计算机的问世和发展以及样条 (分片多项式) 理论的系统创立使人们可以采用样条、即分片多项式来刻画与近似表达各种几何曲线面和其他几何对象. 从而为计算几何的理论和应用开辟了广阔的新天地. 事实上, 20 世纪中叶以来人们逐步转向采用样条来刻画和近似表达各种曲线、曲面与其他几何对象, 使得样条特别是多元样条成为计算几何的理论基础和基本工具.

设 Δ 为区域 $D \in \mathbb{R}^n$ 的剖分, $S_d^\mu(\Delta)$ 定义为 D 上的分片 d 次且 μ 阶光滑的分片多元多项式样条空间. 分片代数簇定义为多元样条组的公共零点的集合, 即

$$Z(f_1, f_2, \cdots, f_s) = \{x \in D | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0,$$
$$f_i \in S_{d_i}^{\mu_i}(\Delta_i), i = 1, 2, \cdots, s\},$$

其中 $\Delta_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 为 D 的剖分.

物体表面都是由一块曲面或多块曲面相交而成, 因此研究曲面交集的几何性质对于认识、识别和重构物体极为重要. 由于计算手段的限制, 以前人们总是用多元多项式表示各种曲面, 因而特别重视研究多项式曲面的交集及其几何性质. 事实上, 经典代数几何中的基本研究对象 “代数簇” 正是以研究多元多项式曲面的交集为原型的研究方向. 现代计算机问世以来, 作为分片多项式的样条业已成为表示和研究各类曲面的基本工具和载体. 因而研究由多元样条 (组) 的 (公共) 零点集合所定义的 “分片代数簇” 不仅在数学上可以引发新的几何学领域, 而且在计算机科学, 诸如计算机辅助设计、制造, 计算机图形学及图像处理中都是十分重要的. 由于多元样条具有局部性质, 并且严重依赖于剖分的几何性质, 使得它的零点所界定的分

片代数簇呈现异常复杂的几何结构. 因此照搬代数几何中研究经典代数簇的方法来研究分片代数簇是难以奏效的.

有待研究的难题包括: 任意剖分上分片代数簇的几何特征; 分片代数簇的不可约分解; 分片代数簇的计算方法; 分片代数簇局部和全局间的转换关系; 分片代数簇的坐标环、局部与整体几何性质、与相关多项式环的代数几何关系等.

参 考 文 献

[1] Ren-Hong Wang. Multivariate Spline Functions and Their Applications. Beijing/New York: Science Press/Kluwer Pub, 2001
[2] Walker R J. Algebraic Curves. Princeton: Princeton University Press, 1950
[3] Hartshorn R. Algebraic Geometry. New York: Springer-Verlag, 1977
[4] Schoenberg I J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quart Appl Math, 1946, 4: 45-99, 112-141
[5] de Boor C. A Practical Guide to Splines. New York: Springer-Verlag, 1978

撰稿人：王仁宏
大连理工大学

高维大尺度反散射问题的分析与计算

Large Scale Multi-dimensional Inverse Scattering Problems: Analysis and Computation

由于具有重要的科学和工业应用, 反问题领域的研究在过去的几十年中取得了极大的发展. 各种各样的反问题, 包括 PDE 系数的确定、初值重构、场源函数的估计、界面或者边界条件的检验等等都要求求解不适定的非线性算子方程. 反散射问题尤其具有重要意义, 即通过测量散射场的远场形态来重建非均匀媒质的折射率[7]. 这样的问题源于军事和工业应用的不同领域, 比如非破坏性试验、地震成像、潜艇探测技术、医学成像以及近场光学. 除了很强的非线性性以外, 反问题还有两个主要的困难：不适定性以及很多局部极小点的出现. 虽然大量的算法被设计出来求解反问题, 但是进展却很慢. 一个很大的困难是由于多重局部极小点的存在, 经典的迭代优化方法有很快的局部收敛速度但是却不能计算全局极小点. 另一个主要的困难是不适定性, 也就是说测量中极小的噪声就可能导致求解计算中产生很大的误差. 众所周知, 反散射问题的不适定性随着频率的增加而减小. 但是在高频的时候, 非线性方程振荡得特别厉害, 同时还会产生更多的局部极小点. 求解反问题的一项挑战就是发展一套方法既利用了问题在高频时的正则性又不受局部极小点的影响.

关于大规模正、反散射问题, 特别重要的一类问题是复杂媒质中电磁波的传播问题. 最近的研究成果是一套正则递归线性化方法, 该方法可以求解 Maxwell 和 Helmholtz 方程的反散射问题[2~4,6]. 这套方法最重要的是发展了一种高效的正则递归线性化算法, 关于波数是连续的处理或者是递归线性化. 一个很有挑战性的公开问题是设计可以处理大规模数据的数值方法. 另外一个待解决问题是处理不完全的数据, 即限制孔径数据或者无相移数据[8]. 数学上, 挑战来自于对上述递归线性化方法收敛性的证明. 反问题的稳定性也是非常重要的研究课题, 特别是在多频数据的情况下. 到目前为止该问题还没有任何结果. 关于反问题的稳定性研究, 我们向读者推荐的参考文献是 [1]、[4]、[6]、[9]. 在实际计算方面, 一个重要的亟待解决的问题是求解大波数电磁场问题.

参 考 文 献

[1] Alessandrini G. Stable determination of conductivity by boundary measurements.

Appl Anal, 1988, 27: 153-218

[2] Bao G, Li P. Inverse medium scattering problems for electromagnetic waves. SIAM J Appl Math, 2005, 65(6): 2049-2066

[3] Bao G, Li P. Inverse medium scattering for the Helmholtz equation at fixed frequency. Inverse Problems, 2005, 21: 1621-1644

[4] Bao G, Li P. Inverse medium scattering problems in near-field optics. J Comput Math, 2007, 25(3): 252-265

[5] Calderon A P. On an inverse boundary value problem. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro, 1980, 65-73

[6] Chen Y. Inverse scattering via Heisenberg's uncertainty principle. Inverse Problems, 1997, 13: 253-282

[7] Colton D, Kress R, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Applied Math Sciences 93, Springer-Verlag, 1992

[8] Kenig C, Sjöstrand J. and Uhlamnn G. The Calderón problem with partial data. Ann of Math, 2007, 165(2): 567-591

[9] Sun Z. On continuous dependence of an inverse initial boundary value problem of wave equation. J Math Anal Appl, 1990, 150: 188-204

[10] Sylvester J, Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Annals of Math, 1987, 125: 153-169

撰稿人：包 刚

美国密西根州立大学

求解无界区域非线性偏微分方程的人工边界方法

Artificial Boundary Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations in Unbounded Domains

科学与工程中的大量计算问题可归结为数值求解偏微分方程. 对于有界区域内的偏微分方程, 已可用有限差分法、有限元法等多种数值方法有效地求解, 其严格的数学理论也早已建立且日臻完善. 无界区域上的偏微分方程同样有广泛的应用背景, 如机翼绕流、无限大地基上坝体应力分析、声波、电磁波在空间的转播等等. 这些问题的求解区域是无界区域. 区域的无界性给数值求解带来了本质性的困难, 已有的数值计算方法已难以有效地求解这些问题.

20 世纪 70 年代以来, 无界区域上的偏微分方程边值问题, 特别是外边值问题的数值求解受到了极大关注. 在这一方向出现了大量的研究工作, 形成了科学与工程计算的一个重要分支. 例如, Thatcher 及应隆安、韩厚德等提出了无限元方法, G. Hsiao, W.L. Wendland, J.C. Nedelec, C.A. Brebbia, 冯康与余德浩等发展了边界元法. 基于在人工边界上的边界归化, 各种人工边界法、耦合算法和区域分解算法也应运而生.

人工边界法是求解无界区域问题时最常用的数值方法. 该方法要求在人工边界上得到原问题的解满足的准确边界条件或构造出近似边界条件. 准确的人工边界条件是对人工边界外部区域的微分方程实施边界归化得到的边界上的自然积分方程, 也即 Dirichlet to Neumann (DtN) 映射, 因此人工边界法也称为自然边界元法或 DtN 方法, 在这一方向冯康、韩厚德、余德浩做出了开创性的工作, 随后 J.B. Keller, D. Givoli 等也对该方法的发展与应用做出了重要贡献. 在实际计算中常应用的近似人工边界条件在工程界也被称为吸收边界条件、无反射边界条件或透射边界条件. 近年获得迅速发展和应用的完美匹配层 (PML) 方法也是一种人工边界法, 只是其人工边界不是曲线或曲面, 而是一个边界层. 在人工边界上找出无界区域上偏微分方程的解满足的边界条件是人工边界方法的核心. 早期人们常常直接将原问题的解在无穷远处满足的条件移植到人工边界上, 如 Dirichlet 边界条件或 Neumann 边界条件是经常被应用的. 一般地讲它们不是原问题的解在人工边界上满足的准确边界条件, 而仅仅是一个非常粗糙的近似边界条件. 若希望在有界计算区域上获得原问题的具有一定精度的数值解, 就必须保证所选取的有界计算区域足够大, 但在很大的有界计算区域上数值求解偏微分方程仍然是一个困难的课题. 人

工边界法的核心正是对已知的问题和引进的人工边界构造出原问题的解在人工边界上满足的 “合适” 的人工边界条件, 从而可将原问题简化为等价的或近似的有界计算区域上的问题. 这样的人工边界条件应该满足如下基本要求：简化问题适定且易于数值求解；简化问题的解在有界计算区域上等于原问题的解, 或是其在有界计算区域的一个很好的近似；有界计算区域尽可能地小, 以减少计算量和节省内存. 由于迄今仅对一些规则区域上的典型方程得到了准确人工边界条件的解析表达式, 如何应用数值方法得到近似人工边界条件仍是一个重要的研究课题.

上述计算方法已被广泛应用于数值求解无界区域上的线性偏微分方程边值问题, 但对无界区域上非线性偏微分方程边值问题的数值解法的研究还在探索之中. 为应用人工边界法数值求解非线性问题, 需要得到人工边界上该非线性问题的准确或近似的边界条件. 一般情况下, 此时的人工边界条件是未知函数及其微商在人工边界上的非线性积分方程. 目前仅对少数特殊的非线性偏微分方程, 例如 Burgers 方程, 描述薄膜生长的 Kardar-Parisi-Zhang(K-P-Z) 方程, 一维三次非线性 Schrodinger 方程等, 得到了原问题解的准确的非线性人工边界条件. 而对于更多的非线性偏微分方程是否能够实现边界归化, 如何得到人工边界条件, 以及构造能有效求解无界区域上非线性偏微分方程问题的较一般的数值方法, 至今仍是亟待解决的非常困难的课题.

参 考 文 献

[1] Feng K. Differential versus integral equations and finite versus infinite elements. Math Numer Sinica, 1980, 2(1): 100-105

[2] Han H D, Ying L A. Huge element and local finite element method. Acta Math Appl Sinica, 1980, 3(3): 237-249

[3] Keller J B, Givoli D. Exact non-reflecting boundary conditions. J Comput Phys, 1989, 82: 172-192

[4] Zhu J L. The Boundary Element Analysis for Elliptic Boundary Value Problems. Beijing: Science Press, 1991

[5] Yu D H. Natural Boundary Integral Method and its Applications. Beijing/New York: Science Press/Kluwer Academic Publishers, 2002

[6] Ying L A. Numerical Methods for Exterior Problems. New Jersey/Singapore: World Scientific, 2006

撰稿人：余德浩

中国科学院数学与系统科学研究院

求解线性代数方程组的最优方法

Optimal Solvers for Linear Algebraic Systems

求解线性代数方程组是科学与工程计算的最基本问题之一, 绝大多数的计算问题最终都归结为线性代数方程组的求解. 大规模线性方程组求解的主要困难在于其工作量, 如何减少其工作量是计算数学里面最重要的问题之一.

最古老也是最通用的求解线性方程组的方法是高斯消元法. 对于一个 $n \times n$ 的矩阵, 高斯消元法所需的浮点运算次数为 $O\left(n^3\right)$, 这对非常大的 n 太费时而不可用. 利用一些特殊的技巧, 如 Strassen 等提出来的快速矩阵相乘算法, 高斯消元法的运算量可以减少到 $O(n^{2.376})$, 但工作量仍然太大 (而且还有稳定性问题). 从理论上讲, 求解一个一般的线性方程组最少需要多少工作量是一个悬而未决的问题.

提高求解线性代数方程组效率的最有效途径是利用问题的特殊性. 如高斯消元法, 我们有时可以利用矩阵的稀疏性来提高效率. 其主要技巧是通过对未知量的重新排序以减少矩阵的带宽. 然而, 如何最大可能地减少一个一般稀疏矩阵的带宽本身是一个 NP- 完全问题. 因此, 这类高斯消元法的适用性受到极大限制. 另外一种值得一提的直接法是快速傅里叶变换 (FFT). 对于一些非常特殊的二阶椭圆有限元和有限差分格式, 利用 FFT 的计算量可达到 $O(n\log n)$, 但这类算法的应用范围十分有限.

上面所提到的高斯消元法及 FFT 都属于直接法的范畴. 另一类有效的方法是迭代法, 最常用的基本迭代法有：雅可比迭代法、高斯赛德尔迭代法和共轭梯度法. 这些方法的收敛速度对大规模问题往往太慢.

多重网格法 (即区域分解算法) 是目前最有效的求解从偏微分方程离散所得代数方程组的方法. 利用偏微分方程的特性, 对于一大类的偏微分方程, 尤其是二阶椭圆方程的离散化问题, 多重网格法可以达到最优 $O(n)$ 或次优 $O(n\log n)$. 比较常见的多重网格方法有 V- 循环、W- 循环和 BPX 预条件因子. 虽然这些多重网格法能达到最优或次优的计算量, 总体来说这类方法的应用过于依赖于方程的性态与网格信息, 难于推广与实现. 如何将多重网格法有效地应用于更广泛的问题 (比如强不定的 Helmholtz 方程) 是有待更深入研究的难题.

近年来代数多重网格法 (AMG) 得到了广泛的重视, 其思想是用代数的形式实现多重网格的效率. 这类算法的特点是不直接需要微分方程及其离散网格等信息,

因此使用方便. 尽管人们希望能应用这类方法到更多问题, 目前只对于少数的几类方程比较有效, 比如对无结构网格离散化的 Poisson 方程. 然而, 对于几乎所有的代数多重网格算法, 其理论论证仍然是一个有待解决的问题. 另外, 如何推广这类方法到更一般的问题, 更是一个目前重大的研究课题. 一种比较可行的方法是将一些复杂的方程化成比较简单的, AMG 适用的问题 (比如象 Poisson 方程). 例如, 针对 Maxwell 方程组, Hiptmair 和 Xu 在 2007 年提出的预条件因子, 将这类方程的求解问题转化成标准的 Poisson 方程的求解, 从而可以利用现有的代数多重网格算法快速求解.

与求解代数方程组密切相关的是如何计算矩阵向量乘积. 对一般的稠密矩阵, 矩阵与向量的乘积需要 n^2 的计算量. 但是如果利用问题的特殊性, 其计算量可以降至 $O(n\log n)$, 如 Hackbusch 等提出的 Panel Clustering 以及 H- 矩阵, Greengard 和 Rokhlin 提出的快速多极法 (fast multipole method). 这些方法利用问题的特殊性, 矩阵向量乘法的计算量可以减少为 $O(n\log n)$, 因此可大大提高求解相应代数方程组的效率. 这些方法对于积分方程和多体问题的求解都有很重要的应用.

以上所提的各种方法及其应用, 远远不能满足实际问题的需要. 如何根据问题的特殊性, 提出有效的特别是最优的算法来减少计算量与存储量是科学与工程计算中持久的重要的研究课题.

参 考 文 献

[1] Bramble J H. Multigrid Methods. Longman Scientific & Technical, 1993

[2] Bramble J H, Pasciak J E, Xu J. Parallel multilevel preconditioners. Mathematics of Computation, 1990, 55: 1-22

[3] Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. Mathematics of Computation, 1977, 31: 333-390

[4] Fedorenko R P. The Speed of Convergence of One Iteration Process. Zhurnal vychislitel'noj matemaki i matematicheskoj fiziki, 1964, 4: 559-563. Also in USSR Computational Math and Math Physics, 1964, 4: 227-235

[5] Greengard L, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations. J Comput Phys, 1987, 73: 325

[6] Hackbusch W. Multigrid Methods and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1985

[7] Hackbusch W, Nowak Z P. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. Numer Math, 1989, 54: 463

[8] Hiptmair R, Xu J. Nodal Auxiliary Space Preconditioning in $H(\mathrm{curl})$ and $H(\mathrm{div})$ Spaces. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007, 45: 2483-2509

[9] Xu J. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. SIAM Review, 1992, 34: 581-613

撰稿人： 许进超
宾夕法尼亚州立大学

燃烧方程组间断解的数值计算方法

Numerical Methods for The Discontinuous Solutions
to The Systems of Combustion Problems

化学反应流的研究可以追溯到 1880 年前后法国物理学家 Vieille, Mallard, Le Chatelier, Berthelot 在火焰传播的实验中观察到的一个现象：在充满可燃气体的管道一端点火, 开始时火焰以每秒数米的速度传播, 随后在一些情况下, 火焰传播速度加快到每秒 2000 米, 甚至更高. 前者被命名为爆燃波, 而后者被命名为爆轰波. 这两种波在自然界、人类生活和科技活动中是常见的, 例如, 当内燃机正常工作时, 气缸内的燃烧波是爆燃波, 而一旦发生事故爆炸时, 爆燃波就转换成了爆轰波.

1899 年 Chapman 和 1905 年 Jouguet 各自独立地利用守恒律得到了燃烧波的定量关系. 按照他们的理论, 燃烧波还可以细分为强爆轰波、弱爆轰波、强爆燃波和弱爆燃波. 对于强波与弱波之间的临界情形, 人们称它们为 CJ 爆轰波和 CJ 爆燃波. 因此燃烧波共有六种.

燃烧波可以用双曲型守恒律方程组描述. 由于燃烧使可燃物质转换为已燃物质, 这两种物质都不能说是守恒的, 因而方程组是非齐次的：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f^i(U)}{\partial x_i}=\psi(U), \tag{1}$$

其中 U 为流动变量, f^i 为流通矢量, t 为时间, x_i 为空间坐标, d 为问题的维数, ψ 为非线性的化学源项. 通常情况下, 常微分方程组 $U_t=\psi(U)$ 所具有的反应时间尺度比偏微分方程组 $U_t+\sum\limits_{i=1}^{d}f^i_{x_i}(U)=0$ 所具有的流动时间尺度小若干个数量级, 因此燃烧方程组 (1) 为刚性的.

Chapman 和 Jouguet 得到的燃烧波是方程组 (1) 在反应速度为无穷大时的临界情形的间断解, 而方程组 (1) 的一般解就是临界情形的一个小的摄动, 即在燃烧波附近有一个狭窄的化学反应区. 众所周知, 双曲型守恒律方程组的间断解是不能被初值唯一确定的, 还需要一个辅助的熵条件以排除非物理解. 然而, 因为燃烧会使系统的熵发生变化, 不可能用熵条件界定或排除任一种燃烧波. 在实际问题中出现的燃烧波的类型取决于燃烧区域内的微观机制. 这是燃烧波计算有别于激波计算的新的困难.

燃烧波计算的另一困难是它的方程组是刚性守恒律方程组, 而刚性方程组的数值求解一直就很困难. 就燃烧波而言, 快反应可以造成火焰结构的大空间梯度变化. 如果计算对于火焰结构的时空分辨率不足, 由于系统的非线性作用, 可能得到整体上完全错误的结果; 如果只靠全局地增加网格点数来达到分辨火焰的时空尺度的要求, 那么计算量将大得无法忍受, 计算误差的累积也将成为新的问题. 如何做到既能分辨最快尺度的化学反应又能以较高的计算效率来模拟整体宏观流动的发展过程, 是燃烧波的数值计算研究中一直没有解决好的难题.

因为燃烧方程组实在太复杂, Majda 引入了一个简化的模型[2]. 鉴于在双曲型守恒律方程计算中关于单个方程式的理论更为完整, 他把质量、动量和能量守恒方程合并成一个. 但是 Majda 模型不是单个方程式, 因为燃烧问题中还有一个质量转换的方程, Majda 方程组是一个由两个方程耦合而成的方程组. 近年来, 关于燃烧问题的数学研究常常从 Majda 模型入手.

Colella, Majda 和 Roytburd 发现对于燃烧方程组和 Majda 模型必须用非常细的网格, 大约在反应区域内至少要 30 个网格点, 才能得到正确的波形和波速, 否则波速会比真实的波快得多[3]. 这实际上是波的类型的偏差, 对于强爆轰波的计算结果却是弱爆轰波. 类似的研究结果可参看文献 [4]、[5]. 通常认为求解刚性偏微分方程比较有效的方法是分裂法, 但应当指出, 分裂法虽然可以提高计算效率, 但仍不能解决计算快反应时因采用的空间–时间分辨率不足而得到虚假爆轰波速度的问题. 目前人们趋向于同时采用高精度高分辨率格式和自适应网格计算来有效地降低分辨反应区所需的网格规模. 因为刚性反应流问题的反应区一般只占全部计算区域的很小一部分, 所以自适应网格计算是一种十分有效的途径. 还有一些方案则研究如何在网格分辨率不足的情况下仍能计算出整体上正确的燃烧波结构[7,8], 以及在复杂湍流情况下如何从微观机制的角度去模化反应项等等[10]. 有关的理论分析的工作有文献 [6]、[9].

燃烧波的数值计算是计算数学、流体力学、工程热物理和化工等领域共同关心的研究内容. 应该说, 这方面的工作无论是方法的设计还是理论的分析都还是很少的. 与激波问题相比, 这是一块有待于开垦的处女地.

参 考 文 献

[1] Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience Publishers Inc, 1948

[2] Majda A. A qualitative model for dynamic combustion. SIAM J Appl Math, 1981, 41: 70-93

[3] Colella P, Majda A and Roytburd V. Theoretical and numerical structure for reacting shock waves. SIAM J Sci Stat Comput, 1986, 7: 1059-1080

[4] Oran E S, Boris J P. Numerical Simulation of Reactive Flow. New York: Elsevier,

1987

[5] Pember R B. Numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation I. Spurious solutions. SIAM J Appl Math, 1993, 53: 1293-1330

[6] Berkenbosch A C, Kaasschieter E F and Klein R. Detonation capturing for stiff combustion chemistry, Combust. Theory Modeling, 1998, 2: 313-348

[7] Bao W, Jin S. The random projection methods for hyperbolic conservation laws with stiff reaction terms. J Comput Phys, 2000, 163: 216-248

[8] Helzel C, Leveque R J and Warnecke G. A modified fractional step method for the accurate approximation of detonation waves. SIAM J Sci Comput, 2000, 22: 1489-1510

[9] Ying L A. Finite difference method for a combustion model. Math Comp, 2003, 73: 246, 595-611

[10] Pitsch H. Large-eddy simulation of turbulent combustion. Ann Rev Fluid Mech, 2006, 38: 453-482

撰稿人：[1] 应隆安　[2] 袁　礼

1 北京大学

2 中国科学院数学与系统科学研究院

三维椭圆和电磁场计算问题的 hp 自适应有限元方法

The hp Adaptive Finite Element Method for 3D
Elliptic and Electromagnetic Problems

偏微分方程的求解通常先对求解的区域进行网格剖分, 然后在该网格上利用有限元方法、有限差分法或者有限体积方法进行离散求解. 由于方程的解事先未知, 传统的网格剖分方法是经验性的, 这对于复杂的工程技术问题特别是非线性问题往往效率很低, 这极大地限制了各种离散方法的应用范围.

自适应有限元方法根据问题的性质和所需求解精度自动调整有限元网格, 是一种偏微分方程的具有最优计算复杂性的离散方法. 自适应有限元方法的基本思想是误差平均分配, 即希望在每个网格单元上解的离散误差几乎相等, 但是由于偏微分方程的解事先并不知道, 人们实际上无法知道每个单元上的实际误差. 1978 年 I. Babuška 和 C. Rheinboldt 在文献 [1] 中提出利用后验误差估计来估计每个单元上的离散误差, 从而使得误差平均分配的思想的实施成为可能. 当前这种以有限元后验误差分析为理论基础的自适应有限元方法, 因其具有应用范围广且易于软件化等优点, 已经成为科学计算的研究焦点之一.

后验误差估计是指仅依赖于离散解和微分方程已知数据的可以计算的量, 它们局部地刻画了离散误差, 对于三维椭圆问题的线性有限元离散方法, 大量的计算结果显示, 利用自适应有限元方法人们可以得到最优计算复杂性, 即如果 u 为偏微分方程的解, u_h 为由自适应算法产生的有限元解, 则 $u - u_h$ 的能量误差 $\|u - u_h\|$ 以 $N^{-1/3}$ 的渐近速度收敛, 其中 N 是问题的自由度个数. 对于带奇性的三维电磁场计算问题的最低阶棱单元逼近, 我们最近的研究[6] 显示, 基于适当的后验误差估计, 自适应有限元方法同样可以得到最优计算复杂性的离散精度.

对于线性有限元或者棱单元逼近, 人们知道 $N^{-1/3}$ 是所能达到的最佳逼近精度, 如果要提高收敛阶, 一个自然的想法是利用高次有限元方法, 即所谓的 p 有限元方法. 我们知道高阶方法只对光滑的解有效, 对于奇性问题只有加密网格即所谓的 h 有限元方法才能有效地减少离散误差, hp 自适应有限元方法的根本目的就是希望通过自适应地加密网格或提高单元阶数来提高收敛阶. 1994 年 B.Q. Guo 的研究[2] 表明, 对于奇性椭圆问题, 利用先验的几何加密网格和单元次数分布, hp 方法可以产生指数收敛, 即离散误差以 $e^{-\beta N^{-1/5}}$ 的速度渐近收敛, 这里 N 是自由度的个数. 如何设计一个自适应的 hp 方法, 达到上面的指数收敛的最佳逼近精度, 成为

一个具有重要意义的待解决的问题. CH. Schwab 在文献 [5] 中研究了二维 hp 自适应方法, 三维 hp 自适应方法的研究及其在电磁计算问题的应用也有大量工作, 读者可以参见文献 [3]、[4] 以及相关文献.

参 考 文 献

[1] Babuška I, Rheinboldt C. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15: 736-754

[2] Guo B Q. The h-p version of the finite element method for solving boundary value problems in polyhedral domains//M Costabel et al. Boundary Value Problems and Integral Equations in Nonsmooth Domains. Marcel Dekker Inc, 1994, 101-120

[3] Rachowicz W, Demkowicz L. Three dimensional *hp*-adaptive finite element package for electromagnetics. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2002, 53: 147-180

[4] Ledger P D, Morgan K. The application of the hp finite element method to electromagnetic problems. Archives of Computational Methods in Engineering, 2005, 12: 235-302

[5] Schwab CH. *p*- and *hp*-Finite Element Methods. Oxford: Clarendon Press, 1998

[6] Chen Z, Wang L and Zheng W. An adaptive adaptive multilevel method for time-harmonic Maxwell equations with singularity. SIAM Journal on Scientific Computing, 2007, 29: 118-138

撰稿人：陈志明
中国科学院数学与系统科学研究院

双曲型守恒律方程组差分方法对间断解的收敛性

Convergence of Finite Difference Methods for
Hyperbolic Systems of Conservation Laws

激波现象大量地存在于自然界, 最为壮观的激波现象当属每年农历 8 月 18 日的钱塘江大潮. 在激波两侧, 介质的物理量发生了突变, 常伴随有高温、高速、高压的流动. 无粘可压缩流体运动可以用 Euler 方程组描述, 它是一个双曲型守恒律方程组, 方程组的一般形式是

$$U_t + \sum_{i=1}^{d} f^i_{x_i}(U) = 0, \tag{1}$$

其中 U, f^i 都是向量. 式 (1) 是一个非线性偏微分方程组, 对于 Euler 方程组, 它是质量、动量和能量守恒的数学表示. 已经证明, 即使初值充分光滑, 一般而言, 非线性双曲型守恒律方程组 (1) 也不存在整体光滑解. 因此, 间断解是一个合理的数学提法. 同时, 解的间断就是激波的数学抽象, 所以间断解的计算具有重要的实际意义. 双曲型守恒律方程组的数值计算开始于 20 世纪 40 年代, 它的对象是空气中的激波. 很明显, 这是由喷气式飞机与原子弹的研制所推动的.

双曲型守恒律方程的计算有两个基本的困难：第一, 差分方法的要点是把解的微商用差商近似代替. 现在解是间断的, 这就从根本上动摇了差分方法的基础. 第二, 守恒律方程只利用了守恒性, 在热力学中, 它只涉及第一定律, 因此在计算中不免出现违背热力学第二定律的非物理解. 几十年来, 这一方面的研究蓬勃发展, 已有了广泛的应用与大规模的软件. 然而, 理论研究的严重滞后至今未能有根本上的改观.

最早作出重要贡献的是 Von Neumann. 他引入了 “人工黏性” 的概念, 即在方程中人为地添加一黏性项. 这样, 方程的解在激波处被平滑化了, 差分的引入成为可能. 另一方面, 黏性代表摩擦, 它使得系统的熵不断增加, 从而不会违背热力学第二定律. 在此基础上产生了一批行之有效的差分格式, 其中有代表性的是迎风格式、Lax-Friedrichs 格式和 Godunov 格式等.

在理论上作出突破性贡献的是 Oleinik. 她于 1957 年针对解不连续的情况, 引入了变差的估计以代替导数的估计, 又引入了 “熵条件” 使得热力学第二定律进入了双曲型方程. 她不但证明了一维情形方程式 (即方程组中只含有一个方程) 解的

唯一性, 还证明了 Lax-Friedrichs 格式的收敛性, 从而得到了存在定理. 这是一个关于一维方程式的十分完整的结果. 后来, 她的结果被推广到了多维情形和一类差分格式, 即单调格式.

Oleinik 的理论有一个局限性, 它只适用于方程式. 这一点被 Glimm 所突破. 在 1965 年发表的文章中, Glimm 在 Godunov 格式的基础上, 引入了随机的因素, 第一次在 “小初值” 的条件下, 对于一维方程组, 证明了近似解的变差是一致有界的, 这样就得到了子序列的收敛性, 同时也得到了存在定理. Glimm 格式在实际应用中也是一个有效的方法.

由于对于方程组没有恰当的熵条件, 不可能排除非物理解, 也不会有唯一性, Glimm 的理论只能停留在子序列的收敛性上, 没有能得到完整的收敛结果. 这一点在过了三十余年后才获得突破, Bressan 利用非线性半群建立了相应的唯一性理论, Glimm 格式的收敛理论才算最终完成.

Glimm 理论有三方面的局限性：第一, 它的方法十分特殊, 只适用于 Glimm 格式, 而对于有更为广泛应用的其他差分格式不适用. 第二, 只限于一维问题. 第三, 只限于 “小初值”, 即初值的变差必须充分小, 也即每一物理量在各处都差不多相等. 这三项当然在应用上是不能满意的. Oleinik 与 Glimm 的理论还有一个共同的局限性, 即它们都限于低阶格式. 关于这些方面的问题, 有很多研究工作, 但是更多的问题仍然有待于解决.

对于多维问题, 有一些新的方法问世, 例如有限体积方法、间断有限元方法等, 它们在应用中十分有效. 但是理论分析仅限于方程式, 并且尽管精确解具有有界变差, 现在还未能证明任何一个格式在非均匀网格上的解具有同样的性质. 这一缺陷使得收敛性的证明不完美.

对于 “大初值”, 20 世纪 70 年代后期出现的补偿列紧理论使人们看到了曙光, 利用它可以分析一维问题的方程组中含有一个方程或两个方程的情形. DiPerna 和以丁夏畦为首的研究集体在这方面有重要工作.

低阶格式不能满足应用上的需要, 但是另一方面, 严格地说, 差分格式的精度最高只能有一阶. 这是因为在两个相邻的格点之间激波的准确位置是不可能捕捉的, 所以误差最好也只能和步长同阶. 事实上, 已经证明了低阶格式有 1/2 阶的收敛性, 并且不可能改善. 现在已经有很多高阶格式问世, 例如 TVD 格式、ENO 格式、WENO 格式等. 它们在解的光滑部分有高的精度, 以满足应用上的要求. 然而, 在激波附近, 它们的收敛性理论是不完整的, 还不足以与低阶格式的相应理论媲美.

双曲型方程组间断解的数值方法在理论上期待着新的突破, 它还有赖于对间断函数的逼近理论的新思考.

参 考 文 献

[1]

[2] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm Pure Appl Math, 1965, 18: 95-105

[3] DiPerna R. Convergence of the approximate solutions of conservation laws. Arch Rat Mech Anal, 1983, 82: 27-70

[4] Smoller J. Shock Waves and Reaction Diffusion Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1983

[5] 丁夏畦, 陈贵强, 罗佩珠. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. Acta Math Sci, 1985, 5, 4: 415-432, 433-472

[6] 应隆安, 滕振寰. 双曲型守恒律方程及其差分方法. 北京: 科学出版社, 1991

[7] Kröner D. Numerical Schemes for Conservation laws. Teubner: Wiley, 1997

[8] Cockburn B, Johnson C, Shu C W and Tadmor E. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Editor: Quarteroni A). Lecture Notes in Mathematics, 1697. Berlin: Springer-Verlag, 1998

[9] Bressan A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem. Oxford: Oxford University Press, 2000

[10] LeVeque R J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2002

撰稿人：应隆安
北京大学, 厦门大学

高精度有限元方法中未解决的具体问题

Some Open Problems in High Accuracy
Finite Element Methods

由于需要求解的数学物理问题越来越复杂, 对现有算法的要求也就越来越高. 事实上, 这些问题的离散化 (例如通过有限元方法) 导致了变量众多 (10^6 或更多) 的代数方程组, 即使如此, 离散解 (或有限元解) 也只有中等的精度. 所以, 构造高阶精度的有限元解便成为当务之急.

有两种不同的构造方法可以使有限元解达到高阶精度：一是直接构造高次的有限元解, 二是间接地通过低次有限元的解作线性组合 (又称外推).

1. 高次有限元解的 “双 p 猜想”

20 世纪 70 年代, 人们猜测 p 次的有限元解在离散化的网格点上会有 $2p$ 阶精度, 这对常微分方程已得到证明[1]. 对于矩形区域上的泊松方程, 只对 $p=1,2,3$ 有了证明[1]. 30 年来一直没有突破, 直到最近才有人[7,10] 向 $p=4$ 进军. 对更大的 p, 仍是悬案, 所以称为 $2p$ 猜想. 有没有反例, 例如 $p=6$ 对不对?

更多的问题：当求解区域被剖分为三角形网格, 在网格点上也有 $2p$ 阶精度吗? 当方程为四阶椭圆或一阶双曲呢? 当问题为三维呢? 目前无法回答, 将来如果能证明, 也是非常难非常长.

2. 低次有限元的外推

高次元 (如 $p=4$) 虽有高阶精度 (8 阶), 但会增加构造的困难 (特别到了三维), 并受到方法上的限制, 丢失了问题固有的特征 (如单调性、守恒律).

另一途径通过外推, 它只是有限元解 (低次的) 的线性组合, 使网格点上有高阶精度. 这里只用低次有限元, 没有构造上的困难. 必须指出, 当初人们以为 (甚至给了一个 “证明”) 有限元外推 (展开式) 几乎点点成功, 但有反例[3] 指出, 有限元外推 (展开式) 几乎点点不成功. 人们被迫对有限元解作后处理[9], 才使有限元外推整体成功. 但对二阶椭圆问题, 能证明有限元外推在网格点一举成功, 无需后处理[8]. 那么, 当方程为四阶椭圆或一阶双曲, 有限元外推在网格点上也能成功吗? 此外, 在三维情况下, 当初始剖分为非均匀四面体网格时, 有限元外推成功吗?

3. 非正规网格与高阶精度

自适应方法希望能将高阶精度和非正规网格结合起来, 可惜两者往往不能得兼 (特别是三角形网格). 但是对矩形网格和某些有限元方法, 两者可能得兼[4,5], 所以

需要研究这些有限元作为自适应的优先选用对象. 特别要研究初始剖分为非均匀三角形网格时高阶精度的可能性.

参 考 文 献

[1] Douglas J, Dupont T and Wheeler M F. An L^∞ estimate and superconvergence for a Galerkin method for elliptic equation based on tensor products of piecewise polynomials. RAIRO Anal Numer, 1974, 8: 61-66

[2] Křížek M. Superconvergence Phenomena on three-dimensional meshes. Int J Numer Anal Model, 2005, 2(1): 43-56

[3] Lin Q, Liu J. Counterexamples to the asymptotic expansion of interpolation in finite elements. Adv Comput Math, 2007, 27(2): 167-177

[4] Lin Q, Lin J. Extrapolation of the bilinear element approximation for the Poisson equation on anisotropic Meshes. Numer Methods for PDEs, DOI 10.1002/num. 20202, 2007

[5] Lin Q, Lin J. Superconvergence on anisotropic meshes. International Journal of Information and systems Sciences, 2007, 3(2): 261-266

[6] Lin Q, Lu T. Asymptotic expansions for finite element approximation of elliptic problem for ploygonal domains. Proc 6 Int Conf Comp Meth Appl Sci Eng, Versailles,1983

[7] Lin Q, Zhou J. Superconvergence in high-order Galerkin finite element methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196: 3779-3784

[8] Rannacher R. Extrapolation techniques in the FEM (A survey) // Summer school on Numerical Analysis, MATC7, Helsinki, Univ of Tech, 1988, 80-113

[9] Shaidurov V. Multigrid Methods for Finite Elements. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1995

[10] 朱起定. 有限元高精度后处理理论. 北京：科学出版社, 2008

撰稿人：林 群

中国科学院数学与系统科学研究院

最优剖分的有关理论和计算问题

Some Theoretical and Computational Problems Related to Optimal Tessellations

这里阐述的是三十年来尚未解决的最优剖分中的有关问题. 剖分 (Tessellation) 是一个数学的很多分支都会涉及的概念, 它在我们日常生活和科学问题中经常出现. 以熟知的事物为例：一个国家在行政区域上常分为省, 这些省份从地理上构成了国家的一个剖分. 再如一天可分成小时, 二十四个小时合起来从时间上对一天构成了剖分. 这两例还代表了两类剖分：前者往往是不规则无结构的, 后者则是规则有结构的. 在工程与科学计算领域常用到的计算网格也是剖分的特殊形式.

用更数学化的语言来说, 如果一个集合 X 由它的一些内部不相交的子集 $\{X_i\}$ 的并集组成, 这些子集的集合就构成了 X 的一个剖分. 一个集合有形形色色的剖分方式, 其中某些剖分或许具备了更多优美的数学特性和实际价值, 这就引出了最优剖分的理论. 比如：给定一个区域 D 和它内部的若干点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ (称为生成集), D 中离每个生成点 x_i 最近的那些点形成了 D 的一个子集 V_i(即对应于 x_i 的 Voronoi 区域), 这种由 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 所构成的对 D 的 Voronoi 剖分就有许多特性, 例如若是设想 D 中住满了居民, 让 V_i 里居住的人们到在 x_i 设置的办事处办理业务显然是最合理的, 否则他们不得不去更远的办事处.

Voronoi 剖分的应用非常广泛[1], 它对给定的生成集 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 来说是最优的, 然而一个区域可以通过选取不同的生成集来得到许多 Voronoi 剖分. 如果生成集十分特殊, 相应的 Voronoi 剖分可以非常规则, 但一般说来, Voronoi 剖分通常是无结构的, 其中又有一些剖分的性质会更好或更优. 拿前例来说, 可以想象人们去比较近的办事处既节约时间又省交通费, 因而不妨假定他们去办事的消耗与距离的平方成正比. 在这个前提下, 我们若是考虑 V_i 中所有居民的利益, 那么把 V_i 里的办事处挪到 V_i 的几何质心便是最优的, 那样, V_i 中人们的平均消耗就达到了最小[2]. 这可由简单的数学事实给出：

$$\min_{y_i} \int_{V_i} \rho(x)|x-y_i|^2 dx$$

的极小值点正是 V_i 的几何质心 (centroid). 这里 ρ 代表在 D 上定义的某个密度分布, 而距离则用通常的欧式距离. 不过一旦挪动一个办事处的位置, 那就又有一个更佳的 Voronoi 剖分. 因此, 为了取得平衡, 一个最优剖分 (optimal tessellation) 的所

有的生成点必须同时是相应的 Voronoi 区域的几何质心. 这种特殊的最优 Voronoi 剖分又被称为 Centroidal Voronoi Tessellation (CVT)[2]. 可以证明, 对 D 中任意点集 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 和任意剖分 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 以下的泛函

$$\min_{\{x_i, V_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho(x)|x - x_i|^2 dx$$

取得最优值时, $\{V_i\}_{i=1}^n$ 一定对应了由 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 确定的 CVT, 就是说 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 既是 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 的生成点集又是它们的几何质心. CVT 正是这个意义下的最优剖分.

CVT 很受欢迎, 这不但取决于它的最优性, 也与它的简单易懂和普适易用分不开[2]. 我们很容易在更抽象和一般的框架下推广 CVT 的定义, 如让 D 取在流形上以及使用黎曼度量和单边距离等[3,4]. 它可被视为对一个复杂的抽象集合进行最优剖分并从中选出最佳代表的一般策略. 同时, 在许多传统领域, CVT 和大家熟知的一些概念密切相关. 如 CVT 用在统计分类学中即和经典的 K-MEANS 方法等价, 在数据压缩传输技术上, CVT 则对应了最优的向量量子化策略[2]. 尽管近年来有关 CVT 这一最优剖分形式的研究和应用越来越多 (从 GOOGLE SCHOLAR 可以查到), 目前仍有不少理论与计算上的挑战, 其中最著名的理论问题要算 Gersho 猜想了[5].

约在三十年前, Gersho 考虑了基于简单欧式度量的 CVT(即他所指的最优向量量子化策略) 当 $n \to \infty$ 时的渐近行为. 他敏锐地指出, 对足够大的 n, 最优 CVT 所对应的基本 Voronoi 单元在渐近意义下应是彼此全等的[5]. 这一猜想在维数大于等于 3 的空间至今尚未被完全证明[2,7], 而二维的基本 Voronoi 单元被证明是正六边形, 若猜想成立, 三维单元则对应了有十四个面的 Truncated octahedron, 其相应的生成点集会形成经典的体心立方晶体结构. 后者在晶格分布的特殊假定下已有理论验证[6], 而对一般区域, 大量的计算也支持这一答案[7]. 这一理论问题的解决和许多类似的问题如密集堆垒的 Kepler 猜想及肥皂膜泡的 Kelvin 问题等有相关之处, 也对大量应用问题如最优设计和网格生成等有重要指导意义. 在关于 CVT 的计算上, Lloyd 很早就从设计最优向量量子化策略的角度提出了从生成点到质心的不动点迭代[8], 成为 CVT 计算最有效的方法之一, 并在很多应用中大显身手, 但 LLoyd 算法的全局整体收敛性的分析至今尚不完全 (文献 [9] 中例举了部分最新结果和有关文献). 此外, 如何发展对高维、大规模问题也有效的, 包括确定的或随机以及可扩展并行的算法, 也有很大的实际意义.

参 考 文 献

[1] Okabe A, Boots B and Sugihara K. Spatial Tessellations, Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. Chichester: Wiley, 1992

[2] Du Q, Faber V and Gunzburger M. Centroidal Voronoi tessellations: applications and algorithms. SIAM Review, 1999, 41: 637-676

[3] Du Q, Gunzburger M and Ju L. Constrained centroidal Voronoi tessellations on general surfaces. SIAM J Sci Comput, 2003, 24: 1488-1506

[4] Du Q, Wang D. Anisotropic centroidal Voronoi tessellations and their applications. SIAM J Sci Comput, 2005, 26: 737-761

[5] Gersho A. Asymptotically optimal block quantization. IEEE Trans Inform Theory, 1979, 25: 373–380

[6] Lloyd S. Least square quantization in PCM. IEEE Trans Info Theory, 1982, 28: 129-137

[7] Barnes E, Sloane N. The optimal lattice quantizer in three dimensions. SIAM J Alg Disc Meth, 1983, 4: 30-41

[8] Du Q, Wang D. On the optimal centroidal Voronoi tessellation and the Gersho's conjecture in the three dimensional space. Comp Math Appl, 2005, 49: 1355-1373

[9] Emelianenko M, Ju L and Rand A. Nondegeneracy and weak global convergence of the Lloyd algorithm in $mathbbR^d$. SIAM J Numer Anal, 2008, 46: 1423-1441

撰稿人：杜　强
Pennsylvania State University

凸多面体的 d-步猜想

The d-step Conjecture for Convex Polytopes

凸多面体的 d- 步猜想是关于凸多面体结构最基本的公开问题之一, 它在 Hiriart-Urruty[1] 提出的非线性分析和优化十四个公开问题中名列第一.

设 P 是 R^d 中的一个凸多面体, $\delta_P(x,y)$ 表示 P 中两个顶点 x 和 y 之间的距离, 即连接 x 和 y 的所有路径中边数的最小值. 凸多面体 P 的直径就是所有顶点之间的距离 $\delta_P(x,y)$ 的最大值. 对于 $n > d \geqslant 2$, 记 $\Delta(d,n)$ 为 R^d 中所有正好有 n 个面 ($d-1$ 维的边界) 的凸多面体 P 的直径的最大值.

凸多面体的 d- 步猜想 对任意 $d \geqslant 2$ 有 $\Delta(d,2d) = d$.

该猜想在 $d \leqslant 5$ 已被证明是成立的[3], 但对于 $d > 5$ 依然悬而未决. 比 d- 步猜想更强的一些猜想已被反例证明是不成立的[2]. d- 步猜想还和高斯消去法有密切的联系[4].

d- 步猜想是 Hirsch 猜想的一个特例.

Hirsch 猜想 对任何 $n > d \geqslant 2$ 有 $\Delta(d,n) \leqslant n-d$.

考虑 R^d 中单位超立方体 $[0,1]^d$, 我们显然有 $\Delta(d,2d) \geqslant d$. 从而 Hirsch 猜想成立就必定有 d- 步猜想成立.

Hirsch 猜想是 1957 年 Hirsch 给 Dantzig 的一封信中提出的, 该猜想的提出是为了对线性规划中单纯法的计算复杂性有更好的理解[1]. 关于 Hirsch 猜想和 d- 步猜想的详细介绍可见文献 [5].

参 考 文 献

[1] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization. SIAM Review, 2007, 49: 255-273

[2] Holt F, Klee V. Counterexamples to the strong d-step conjecture. Discrete Comput Geom, 1998, 19: 34-46

[3] Klee V, Walkup D W. The d-step conjecture for polytopes of dimension $d < 6$. Acta Mathematica, 1967, 133: 53-78

[4] Lagrias J C, Prabhu N, Reeds J A. The d-step conjecture and Gaussian elimination. Discrete Comput Geom, 1997, 18: 53-82

[5] Ziegler G M. Lectures on Polytopes. New York: Springer-Verlag, 1995

撰稿人：袁亚湘
中国科学院数学与系统科学研究院

有限个二次函数最大值的极小化问题

Minimizing A Maximum of Finitely Many Quadratic Functions

给定两个 $n \times n$ 对称矩阵 A, B, 可以证明[6] 以下两点是等价的:

(1) $\max\{\langle Ax, x\rangle, \langle Bx, x\rangle\} > 0$ 对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的 $x \neq 0$ 都成立 (或 $\geqslant$ 对 $\mathbb{R}^n$ 中所有 x 都成立);

(2) 存在 $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, 使得 $\mu_1 \mathrm{A} + \mu_2 B$ 正定 (或半正定).

该结果被称为 Yuan's Lemma[2,3], 等价于著名的 S-Lemma. 后者由于在半定规划中的广泛应用近年来受到了极大的重视[4]. Hiriart-Urruty[2] 提出的非线性分析和优化的十四个公开问题中的最后一个就是考虑如何推广 Yuan's Lemma:

设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个 $n \times n$ 对称矩阵. 如何将如下条件:

$$(\mathrm{Cm}) \max\{\langle A_1x, x\rangle, \langle A_2x, x\rangle, \cdots, \langle A_mx, x\rangle\} > 0$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的 $x \neq 0$ 都成立 (或 $\geqslant$ 对 $\mathbb{R}^n$ 中所有 x 都成立) 等价地用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 表示出来?

该问题在 $m = 2$ 就是 Yuan's Lemma. 对于 $m > 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的凸组合正定显然是充分条件, 但不必要[3].

定义函数 $q(x) = \max\{\langle A_1x, x\rangle, \langle A_2x, x\rangle, \cdots, \langle A_mx, x\rangle\}$, 则条件 (Cm) 就是要求 $q(x)$ 在 $x = 0$ 处达到最小. 于是问题的本质就是如何将 $q(x)$ 的二阶最优性条件等价地用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 表示出来. 这个问题的更一般形式就是考虑形如 $f = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}$ 的非光滑函数的二阶近似模型和广义黑塞算子. 而极大极小问题的二次近似模型以及算法是近年来非光滑优化十分关注的问题[1,5].

参 考 文 献

[1] Hiriart-Urruty J B, Lemarechal C. Convex Analysis and Minimization Algorithms II. Berlin: Springer-Verlag, 1996

[2] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization. SIAM Review, 2007, 49: 255-273

[3] Martinez-Legaz J E, Seeger A. Yuan's alternative theorem and the maximization of the minimum eigenvalue function. J Optimization Theory and Applications, 1994, 82: 159-167

[4] Polik I, Terlaky T. A survey of the S-Lemma. SIAM Review, 2007, 49: 371-418
[5] Rockafellar R T, Wets R J B. Variational Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998
[6] Y Yuan. On a subproblem of trust region algorithm for constrained optimization. Math Programming, 1990, 47: 53-63

撰稿人：袁亚湘
中国科学院数学与系统科学研究院

推广的 Lax 猜想：双曲锥能表示为半定锥的一个截面

Generalized Lax Conjecture: All Hyperbolic Cones can be Expressed as A Slice of A Positive Semidefinite Cone

在 2006 年国际数学家大会上, Arkadi Nemirovski 作了题为 “Advances in Convex Optimization: Conic Programming” 的 1 小时报告[4], 他指出锥优化作为一类最具代表性的凸规划问题, 通过转化为半定规划 (被称为 “21 世纪的线性规划”) 并应用强大的内点法求解将是一种重要的途径.

双曲锥是目前已知凸锥中最具有良好特征的一类锥. 它的定义为：如果齐次多项式 $p(x):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ 沿给定方向 h 是双曲的 (即满足 $p(h)>0$ 且对任意 x 关于 t 的多项式 $p(x+th)$ 只有实根, 此时的多项式 $p(x)$ 也称为双曲多项式), 那么集合 $K_{p,h}:=\{x\in\mathbb{R}^n:p(x+th)\neq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}_+\}$ 称为双曲锥 (参见文献 [2] 或 [7]), 并把关于 λ 的多项式 $p(\lambda h-x)$ 称为 x 的特征多项式, 对应的根称为特征根. 此时双曲锥 $K_{p,h}$ 又可表示为$\{x\in R^n:\lambda_{\min}(x)>0\}$, 其闭包 $\mathrm{cl}(K_{p,h})=\{x:\lambda_{\min}(x)\geqslant 0\}$, 其中 $\lambda_{\min}(x)$ 表示 x 最小的特征根 (参见文献 [6]).

双曲锥存在包含关系 “对称锥 $\subset$ 齐次锥 $\subset$ 双曲锥”(“$\subset$” 为严格包含). 我们熟知的非负锥 $\mathbb{R}^n_+$、二阶锥 (Lorentz 锥)、半正定矩阵锥 $S^{n\times n}_+$ 分别对应的双曲多项式 $p(x)$ 和特定方向 h (h 可能不唯一) 为：

1) $x_1x_2\cdots x_n, (1,\cdots,1,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$;

2) $x_n^2-(x_1^2+x_2^2\cdots+x_{n-1}^2), (0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$;

3) $\det(x)$, 单位矩阵 $I\in S^{n\times n}$.

C.B.Chua[1] 于 2003 年证明了齐次锥与半定锥的截面同构, 从而在理论上保证了齐次锥优化问题可以转化为半定规划求解. 那么, 双曲锥能否用半定锥表示呢? 即是否存在 $\mathrm{S}^{m\times m}$ 的子空间 N 使得 $\mathrm{S}^{m\times m}_{++}\cap\mathrm{N}$ 与 $K_{p,h}$ 同构?

Peter Lax[5] 于 1958 年首先提出 $n=3$ 时对该问题的猜想, 即 “Lax 猜想”, 直到 2003 年才由 Lewis 等人[3] 证实. 所以, 此问题又称为 “推广的 Lax 猜想”.

参 考 文 献

[1] Chua C B. Relating homogeneous cones and positive definite cones via T-algebras. SIAM Journal on Optimization, 2003, 14: 500-506

[2] Güler O. Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming. Math Oper Res, 1997, 22 (2): 350-377

[3] Lewis A S, Parrilo P A and Ramana M V. The Lax conjecture is true. Proc Amer Math Soc, 2005, 133 (9): 2495-2499

[4] Nemirovski A. Advances in Convex Optimization: Conic Programming//Marta Sanz-Sol, Javier Soria, Juan L Varona, Joan Verdera. Proceedings of International Congress of Mathematicians, Madrid, August 22-30, 2006, Volume 1. EMS -European Mathematical Society Publishing House, 2007, 413-444

[5] Lax P D. Differential equations, difference equations and matrix theory. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1958, 6: 175-194

[6] Renegar J. Hyperbolic Programs and their Derivative Relaxation. Found Compt Math, 2005, 6 (1): 59-79

[7] Tunçel L. Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization. Fields Institute Monograph Series, AMS, 2008

撰稿人：修乃华
北京交通大学

DFP 拟牛顿法的收敛性

Does The DFP Quasi-Newton Method Converge for Strongly Convex Functions

DFP 方法是由 W.C.Davidon[2] 在 1959 年提出, 后由 R. Fletcher & M.J.D.Powell[4] 于 1963 年整理和修正的求解优化问题的第一个拟牛顿法. 由于 DFP 方法不需计算函数的黑塞矩阵, 同时具有快速 (超线性) 的收敛性质, 它的提出给非线性优化领域带来了革命性的进步, 并使得拟牛顿法成为非线性优化方法中数学理论最为丰富的一类方法, 也是最被广泛应用的优化方法之一. L.Trefethen 认为拟牛顿法的提出是 20 世纪数值分析领域十三个经典工作之一. 目前公认最好的拟牛顿法是 BFGS 方法, M.J.D.Powell[6] 在 1976 年开创性地证明了采取 Wolfe 搜索的 BFGS 方法对凸光滑函数的收敛性, R.H.Byrd, J.Nocedal 和 Y.Yuan[1] 在 1987 年将此结果推广到了以 DFP 方法和 BFGS 方法为端点的整个 Broyden 凸族 (DFP 方法除外). 迄今为止, "对强凸光滑函数, 采取 Wolfe 搜索的 DFP 方法是否收敛" 的问题至今悬而未决. 美国西北大学 J.Nocedal[5] 与 R.Fletcher[3] 在 20 世纪 90 年代初都将该问题列为无约束优化中的第一个公开问题.

DFP 方法的基本思想是计算搜索方向 $d_k = -H_k \nabla f(x_k)$, 其中 H_k 称为拟牛顿矩阵, 在沿方向 d_k 作某种搜索得到合适的步长 α_k 后, 计算新的迭代点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. 如果 H_k 是目标函数 $f(x)$ 黑塞矩阵的逆, 这就是传统的牛顿方法. DFP 方法不计算函数的黑塞矩阵, 而要求 H_k 满足拟牛顿条件 (又称割线关系式) $H_k y_{k-1} = s_{k-1}$, 其中 $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$. 具体地, DFP 方法由如下迭代公式产生 H_k:

$$H_k = H_{k-1} - \frac{H_{k-1} y_{k-1} y_{k-1}^{\mathrm{T}} H_{k-1}}{y_{k-1}^{\mathrm{T}} H_{k-1} y_{k-1}} + \frac{s_{k-1} s_{k-1}^{\mathrm{T}}}{s_{k-1}^{\mathrm{T}} y_{k-1}}.$$

DFP 方法收敛性公开问题 考虑 DFP 方法, 其中步长 α_k 由 Wolfe 搜索得到, 即满足如下两个条件:

$$\begin{aligned} &f(x_k + \alpha d_k) \leqslant f(x_k) + c_1 \alpha d_k^{\mathrm{T}} \nabla f(x_k), \\ &d_k^{\mathrm{T}} \nabla f(x_k + \alpha d_k) \geqslant c_2 d_k^{\mathrm{T}} \nabla f(x_k), \end{aligned}$$

其中 $c_1 \leqslant c_2$ 是 (0,1) 中的两个常数. 假设目标函数 $f(x)$ 为强凸光滑函数 (此时

$f(x)$ 具有唯一极小点 x_*). 对任意的初始点 x_1 以及任意的对称正定矩阵 H_1, 由 DFP 方法的点列是否收敛到 x_*?

这个问题的难度之一在于 Powell 处理 BFGS 方法的技巧在这里很难利用. 对一些特殊情形这个问题已有进展[7], 但现在看来, 离问题的彻底解决还十分遥远.

参 考 文 献

[1] Byrd R H, Nocedal J and Yuan Y. Global convergence of a class of quasi-Newton Methods. SIAM J Numer Anal, 1987: 24: 1171-1190

[2] Davidon W C. Variable metric methods for minimization. Argonne National Lab Report (Argonne, IL), 1959

[3] Fletcher R. An overview of unconstrained optimization//Spedicato E. Algorithms for Continuous Optimization, the state of the art. Kluwer, 1993, 109-143

[4] Fletcher R, Powell M J D. A rapidly convergent descent method for minimization. Comput J, 1963, 6: 163-168

[5] Nocedal J. Theory of algorithms for unconstrained optimization. Acta Numerica, 1992: 199-242

[6] Powell M J D. Some global convergence properties of a variable metric algorithm for minimization without exact line searches//R W Cottle and C E Lemke. Nonlinear Programming, SIAM-AMS Proceedings, Vol IX. Philadephia: SIAM, 1976, 53-72

[7] Yuan Y. Convergence of DFP algorithm. Science in China, Ser A 1995, 38: 1281-1294

撰稿人：戴　虹
中国科学院数学与系统科学研究院

最小阻力凸体问题

Convex Bodies of Minimal Resistance

牛顿最早于 1686 年提出了最小阻力凸体问题, 并在要求几何体径向对称时解决了该问题. 然而, 近年来有研究[1] 指出, 存在非径向的凸体比牛顿的径向情形产生更小的阻力. 一般形状的最小阻力凸体问题的理论性质以及它们的有效逼近至今仍是一个富有挑战性的公开问题, 它在 Hiriart-Urruty[2] 提出的非线性分析和优化十四个公开问题中名列第九.

等底限高的空间几何体具备什么形状时能使其在某流体中以恒速运动时受到最小的阻力? 早在 1686 年, 牛顿就提出了这样一个问题：等底限高 (底为半径 $R>0$ 的圆盘, 高的上限 $L>0$ 给定) 的空间几何体具备什么形状时能使其在某流体中 (流体物理特性给定) 以恒速运动时受到最小的阻力?

牛顿当时仅考虑了回转体 (即函数 $r|\to u(r)$ 的图像绕水平轴旋转而成的几何体), 并假设了该问题的物理背景. 最终问题归结为如下一维变分问题：

$$
\text{(P)}\qquad \begin{cases} \min & J(u) := \displaystyle\int_0^R \frac{r}{1+|\dot u(r)|^2}dr \\ u(0)=L, & u(R)=0 \\ \dot u(r)\leqslant 0, & r\in[0,R] \end{cases}
$$

牛顿给出的最优几何体出人意料地在尾部有一个扁平底. 如今, 解决问题 (P) 的一个标准途径[3,story8] 是借助最优控制的方法.

大多数数学家认为牛顿的最小阻力几何体问题已经解决了. 如果假设几何体具有径向对称性质时, 确实如此. 然而, 最近有研究[3] 指出, 存在非径向的凸体比牛顿的径向情形产生更小的阻力. 这一发现推进了该论题新的研究, 参见文献 [4]~[6] 和 Lachand-Robert 网站 (http://www.lama.univ-savoie.fr/~lachand/). 读者可以在此网站上找到许多合适的参考文献. 从数学角度来看, 一般的变分问题具有如下形式：

$$
\text{(P}'\text{)}\qquad \begin{cases} \min & J(u) := \displaystyle\int_{B(0,R)} \frac{1}{1+|\nabla u(x)|^2}dx \\ u\in C \end{cases}
$$

其中 $C:=\{u\in W^{1,\infty}_{loc}|0\leqslant u\leqslant L, u \text{ 凹}\}$ (u 是二维变量 x 的函数).

u 的凹性条件足够强, 可以导出一个紧性假设, 该假设暗含了问题 (P′) 解的存在性. 牛顿考虑的情形对应于同一个变分问题, 但约束集却缩小为

$$C_{\mathrm{rad}} := \left\{ u \in C \,\middle|\, u\text{径向对称} \right\}$$

如前所述, 新的事实是

$$\inf_{u \in C} \quad J(u) < \inf_{u \in C_{\mathrm{rad}}} J(u)$$

总结关于该论题最新的研究工作以及尚未解决的问题, 可以说我们正面临着一种奇怪的数学情景:

• 变分问题 (P′) 确实存在解 (除了一些非常特殊的情形, 其最优解是未知的).

• 变分问题 (P′) 有无穷多解 (问题 (P′) 的解是非径向对称的, 故将其绕轴旋转会得到另一个解).

• (通常的) 数值方法不能解问题 (P′)(所需的几何体的凹性在数值上是一个很难处理的约束).

人们猜测, 问题 (P′) 的最优解是带有许多扁平面的钻石状的几何体. 事实上, 对于极小曲面, 不存在子集使得问题 (P′) 在其上的最优几何体是严格凸的. 特别地, 在高斯曲率有限的地方, 它是空集. 目前, 通过特殊方法[5] 得到的数值剖面要优于以往任何猜想的最优形状. 总之, 问题 (P′) 解的理论性质以及它们的有效逼近至今仍是一个没有解决的富有挑战性的问题.

参 考 文 献

[1] Guasoni P. Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi. Tesi di Laurea, Pisa, 1996

[2] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization. SIAM Review, 2007, 49: 255-273

[3] Tikhomirov V M. Stories about Maxima and Minima. Math World 1, AMS, Providence, RI, 1990

[4] Buttazzo G, Kawohl B. On Newton's problem of minimal resistance. Math Intelligencer, 1993, 15: 7-12

[5] Brock F, Ferone V and Kawohl B. A symmetry problem in the calculus of variations. Calc Var Partial Differential Equations, 1996, 4: 593-599

[6] Lachand-Robert T. Minimisation sous contraintes de convexite ou globales. Applications au problem de resistance minimale de Newton. Memoire d'Habilitation a Diriger des Recherches, Universite de Paris VI, 2000

[7] Lachand-Robert T, Oudet E. Minimizing within convex bodies using a convex hull method. SIAM J Optim, 2005, 16: 368-379

撰稿人：戴　虹
中国科学院数学与系统科学研究院

是否存在求解性线性规划的强多项式时间算法?

Is There A Strongly Polynomial Time Algorithm
for Linear Programming?

线性规划的一般形式于第二次世界大战中被提出, 并被用于优化军事调度、后勤配备以及生产安排. 之后线性规划被广泛应用于各个领域. 标准的线性规划可以表述为

$$\begin{aligned}&\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

其对偶问题:

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 是 m 维向量, $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 维矩阵, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 n 维向量, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是决策变量. 问题的输入字长 L 定义为输入该问题所需的计算机字符串长度. 一般情况下只考虑 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 中的数据都为整数 (或有理数) 的情形, 此时每个数据的长度是其二进制表示的长度 (为原数据的对数量级), 而 L 相当于所有数据长度的总和. 我们称某一算法的时间复杂度为 $O(f(n, m, L))$ 是指存在常数 $C > 0$(与问题的数据无关), 使得此算法在任何情况下在 $Cf(n, m, L)$ 单位时间内总能得到该问题的最优解或者确认该问题无解. 当 $f(n, m, L)$ 为多项式函数的时候, 则此算法被称为多项式时间算法. 当一个算法能在 $O(f(n, m))$ 步内求解线性规划, 而其中每一步都为至多 $O(g(n,m,L))$ 长的数据的四则运算, 而且 f 和 g 均为多项式函数, 那么这个算法就被称为强多项式时间算法[7,10].

1947 年 G. Dantzig[1,2] 提出了求解线性规划的单纯形法, 并基于 J. von Neumann 建立的矩阵博弈理论确立了线性规划的对偶理论. 1979 年 L. Khachiyan[3] 第一次提出了求解线性规划的基于椭球算法 [4] 的多项式时间算法, 1984 年 N. Karmarkar[5] 提出了被称为内点法的新的多项式时间算法. E. Tardos[8] 于 1986 年首次提出一个求解组合线性规划的强多项式时间方法, 而 S. Vavasis 和叶荫宇[9] 在 1996 年提出了步数与 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的数据无关的多项式时间内点算法. S. Vavasis 和叶荫宇的方法已经相当接近强多项式时间算法, 其所需计算步数只与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种条件数有关, 而 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 本身甚至可以是任何实矩阵、向量 (其元素不必是有理数).

是否存在多项式时间的单纯形转轴规则, 目前仍是悬而未决的问题. L. Khachiyan 的椭球算法[3] 在最坏情形下需 $O(n^4L)$ 步 (每步为字长不超过 $O(L)$ 的数据的四则运算) 来求解线性规划问题, 相应的时间复杂度为 $O(n^4L^2 \ln L \ln \ln L)$. N. Karmarkar 的内点法[5] 在最坏情形下亦需 $O(n^4L)$ 步 (每步为字长不超过 $O(L)$ 的数据的四则运算) 求解线性规划问题, 但是其总体的时间复杂度可改进为 $O(n^{3.5}L^2 \ln L \ln \ln L)$, 并且其在通常情形中的表现远胜于其在最坏情形下的预测. J. Renegar[6] 提出的路径跟踪法只需 $\mathrm{O}(n^{3.5}L)$ 步就可求解线性规划问题, 进而其总体时间复杂度为 $O(n^3L^2\ln L\ln \ln L)$. 类似的 (原有对偶) 路径跟踪法在实际应用中表现出色. 目前流行的内点法正是基于障碍函数所改进而得的路径跟踪算法. D. Spielman 及 S. Teng[11] 在 2004 年证明了两阶段影子顶点单纯形算法的平均时间复杂度为多项式.

E. Tardos[8] 于 1986 年首次提出关于组合线性规划的强多项式算法 (组合线性规划是指线性规划的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素的规模被关于 n, m 的某一给定多项式函数所界住). S. Vavasis 和叶荫宇[9] 于 1996 年提出基于分层最小二乘法的原有对偶内点法, 算法所需的步数不超过 $O(n^{3.5}c(\boldsymbol{A}))$, 其中 $c(\boldsymbol{A})$ 为关于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种条件函数.

以上算法的步数都与问题的数据输入字长有关. 至于是否存在运算步数与问题输入字长无关, 而只与问题的维数 (如 m, n 等) 有关的多项式时间算法 (强多项式时间算法) 是目前线性规划研究领域最基础与最重要的问题, 也是能否解决超大规模线性规划问题的关键所在.

参 考 文 献

[1] Dantzig G B. Programming of interdependent activities. II. Mathematical model, Econometrica, 1949, 17: 200-211

[2] Dantzig G B. Linear Programming and Extensions. Princeton: Princeton University Press, 1963

[3] Khachian L G. A polynomial algorithm in linear programming. Dokl Akad Nauk SSSR, 1979, 244: 1093-1096

[4] Yudin D B, Nemirovsky A S. Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization. New York: Wiley, 1983

[5] Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, 1984, 4: 373-395

[6] Renegar J. A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming. Mathematical Programming, 1988, 40: 59-93

[7] Schrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & Sons, 1998

[8] Tardos E. A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programming. Operations Research, 1986, 34: 250-256

[9] Vavasis S A, Ye Y. A primal-dual interior point method whose running time depends only on the constraint matrix. Mathematical Programming, 1996, 74: 79-120

[10] Grötschel M, Lovász L and Schrijver A. The Ellipsoid Method and Combinatorial Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1988

[11] Spielman D A, Teng S H. Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time. Journal of ACM, 2004, 51(3): 385-463

撰稿人：张树中　何斯迈
香港中文大学

组合优化反问题的计算复杂性

Relationship Between Inverse Problem and Direct Problem of Combinatorial Optimization

组合优化反问题是给定组合优化问题的一个可行解, 修改该组合优化问题的描述参数, 使得给定的可行解在新的参数下变成最优解, 并且参数的修改尽可能地小. 相对于反问题, 组合优化的原问题被称为正问题. 一般而言, 新旧参数差的加权 1 范数、加权 2 范数、加权无穷范数、加权哈明 (Hamming) 距离作为度量参数修改值的目标函数. 组合优化反问题在交通规划、地质勘探、医学图象重构、同位回归、关联分析等很多领域有着广泛的应用前景.

对于绝大多数经典的组合优化问题, 例如最短路、最小割、最小支撑树、最大流、两个拟阵的交、子模流函数最大化等等, 都分别被证明这些问题的反问题是多项式时间可解的. 进一步 Yang 和 Zhang[4], Ahuja 和 Orlin[1] 分别独立地证明了对于一个目标函数是线性和形式而且满足可分离条件的组合优化问题, 如果其正问题是多项式时间可解的, 那么反问题也是多项式时间可解的. 一个自然的问题就是一般情况下, 这个结论是不是成立?

对于这个问题的回答是否定的. Cai, Yang 和 Zhang[2] 证明了中心选址问题的反问题是强 NP 困难的, 尽管其正问题有很快的组合强多项式时间算法.

Heuberger[3] 于是提出了一个新的公开问题：如果一个组合优化反问题是多项式时间可解的, 那么是否有其正问题一定是多项式时间可解的? 这一问题的解决, 无疑可以帮助加深对组合优化反问题的计算复杂性的理解.

参 考 文 献

[1] Ahuja R K, Orlin J B. Inverse optimization, part I: linear programming and general problem. Operations Research, 2000, 35: 771-783

[2] Cai M C, Yang X G and Zhang J Z. The complexity analysis of the inverse center location problem. J Global Optim, 1999, 15: 213-218

[3] Heuberger C. Inverse optimization, a survey on problems, methods and results. Journal of Combinatorial Optimization, 2004, 8(3): 329-361

[4] Yang C, Zhang J Z. Two general methods for inverse optimization problems. Appl Math Lett, 1999, 12: 69-72

撰稿人：杨晓光
中国科学院数学与系统科学研究院

旅行商问题是否存在性能比小于 1.5 的近似算法

Better Approximation Algorithm for
Traveling Salesman Problem

旅行商问题是一个经典的组合优化问题, 它可以表述为：给定一个无向完全图 $G=(V, E)$, 即顶点集 V 中的每两个顶点 u 和 v 都有一条边 $e=(u, v) \in E$; 另给边集 E 中的每条边 e 赋一个正整数 $d(e)$, 用来表示 u 和 v 之间的距离. 求 G 的一条最短哈密尔顿路, 即经过 V 中每一个顶点恰好一次的一条简单闭路, 且路上相邻两个顶点之间的距离之和最小. 因为 Karp[1] 在 1972 年证明该问题是 NP- 完备的, 所以有许多学者先后提出了求解该问题的各种各样的启发式算法和近似算法.

针对距离函数满足三角不等式的情形, Christofides[2] 在 1976 年给出了一个性能比为 1.5 的近似算法, 即该算法可在多项式时间内求出一条哈密尔顿路, 其路长不会超过最短哈密尔顿路长的 1.5 倍. 然而, 对于一般的情形 (距离函数不满足三角不等式), Sahni 和 Gonzalez[3] 在 1976 年证明除非 P=NP, 旅行商问题不存在具有常数性能比的近似算法.

近三十年来, 人们一直都在试图改进 Christofides[2] 的结果. 对于欧式平面上的旅行商问题, Arora[4] 在 1996 年通过几何划分等技巧, 给出了一个性能比可任意接近 1 的近似算法系列方案. 但是在距离函数仅仅满足三角不等式时, 人们还不知道旅行商问题是否存在一个性能比小于 1.5 的近似算法. 它也成为组合优化领域中的一个著名的公开问题.

参 考 文 献

[1] Karp R M. Reducibility among combinatorial problems//Complexity of Computer computations. Plenum Press, 1972, 85-103

[2] Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1976

[3] Sahni S K, Gonzalez T F. P-complete approximation problems. Journal of ACM, 1976, 23: 555-565

[4] Arora S. Polynomial time approximation scheme for Euclidean TSP and other geometric

problems. Proc 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, 1996, 2-11

撰稿人：胡晓东

中国科学院数学与系统科学研究院

k-服务器猜想

k-Server Conjecture

k- 服务器猜想源于人们对 k- 服务器问题的研究. 该问题是 Manasse 等人[1] 于 1990 年首先提出的, 它在网络设计优化中有着非常广泛的应用.

k- 服务器问题可以描述为：给定一个有 n 个顶点的图 G, 每条边有一个非负的权值, 每一个顶点处都有一个服务对象, 它可以提出任意多次的服务请求; 另有 $k(< n)$ 个相同的服务器, 它们开始时位于图 G 的 k 个顶点处, 随后在一些服务对象之间移动, 以满足服务对象提出的服务请求. 假设到达服务对象的任意一个服务器都可以满足它提出的服务请求. 问题是如何调度这 k 个服务器, 使得它们能满足服务对象提出的所有服务请求, 而且尽可能地减少它们在顶点之间移动的总费用.

这个问题有两个研究模型. 在线 (online) 模型假定, 服务请求是一个一个先后产生的, 在依次完成所提出的服务时, 只知道在此之前提出过的服务请求及服务过程, 而不知道哪一个服务对象会提出下一个服务请求. 而离线 (online) 模型假定, 在给任意一个服务请求分配服务器时, 已经知道要考虑的所有服务请求产生的顶点位置和次序. 求解这两个模型的算法分别称为在线算法和离线算法.

因为离线问题通常要比在线问题容易处理, 所以为了评判一个在线算法的好坏, 目前一般是把它的性能与最优离线算法的性能进行比较. 考虑求解在线 k- 服务器问题的一个在线算法 A 和一个含有限多个服务请求的序列 R, 用 $C_A(R)$ 和 $C_{\rm opt}(R)$ 分别表示 A 和离线最优算法满足 R 中服务请求的费用. 若对于任意 R 都有 $C_A(R) \leqslant \alpha\ C_{\rm opt}(R)+\beta$, 其中 α 和 β 都与 R 无关, 则称 A 是一个 α- 竞争算法[1]. 显然, α 越小, 在线算法 A 的性能越接近离线最优算法的性能.

k- 服务器猜想是：存在求解在线 k- 服务器问题的 k- 竞争算法. 目前该猜想的在以下两种情形下被证明是正确的[1,2]：

(1) k=2 或 $k = n - 1$;

(2) 图 G 是一棵树.

另外对于一般的图 G, 已经证明对任何 $a < k$, 不存在求解在线 k- 服务器问题的 a- 竞争算法[1], 但是存在 $(2k-1)$- 竞争算法[3]. k- 服务器猜想现已成为组合优化在线问题与竞争策略研究领域中最基本的一个公开问题.

参 考 文 献

[1] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems. Journal of Algorithms, 1990, 11: 208-230

[2] Chrobak M, Larmore L L. An optimal on-line algorithm for K-servers on trees. SIAM Journal on Computing, 1991, 20 (1): 144-148

[3] Koutsoupias Elias, Papadimitriou Christos H. On the k-server conjecture. Journal of the ACM, 1995, 42 (5): 971-983

撰稿人：徐寅峰
西安交通大学

是否存在求解装箱问题的绝对近似算法

Absolute Approximation Algorithms for Bin Packing

装箱问题是组合最优化和近似算法领域中的一个基本问题. 该问题可以描述如下：给定一组在 [0, 1] 之间的正数, 将它们划分成若干子集, 使得每个子集中的正数之和不超过 1 且子集的数目达到最小. 这里我们可以把每个子集都看成一个容量为 1 的箱子.

Johnson 等人[3] 在他们奠基性的工作中对装箱问题的若干近似算法进行了深入的分析. 随后 de la Vega 和 Lueker[2], Karmarkar 和 Karp[4] 分别给出了装箱问题的渐近多项式近似方案和渐近完全多项式近似方案. 另外, Yao[5] 研究了在线装箱问题：需要进行划分的一组正数是一个一个给出的. 在考虑将某一个正数放到哪一个子集的时候, 仅仅知道已经给出的正数的大小 (及它们属于哪个子集), 而不知道下一个要给出的正数的大小. 关于装箱问题的介绍可参见文献 [1].

目前, 装箱问题研究中一个最重要的未解难题是：是否存在求解装箱问题的绝对近似算法？即是否存在一个多项式时间算法 A 和一个常数 m, 使得对装箱问题的任意实例 I, 算法 A 所需要的箱子个数 $A(I)$ 与最优算法所需要的箱子数 OPT (I) 之差不超过 m? 即 $A(I)-\mathrm{OPT}(I)\leqslant m$. 更进一步地, 是否存在这样的多项式时间算法使得 m=1?

参 考 文 献

[1] Coffman E G, Garey M R and Johnson D S. Approximation algorithms for bin packing: A survey//D S Hochbaum. Approximation Algorithms for NP-Hard Problems, PWS, 1997

[2] Fernandez W de la Vega and Lueker G S. Bin packing can be solved within 1+ε in linear time. Combinatorica, 1981, 1: 349-355

[3] Johnson D S, Demers A J, Ullman J D, Garey M R, Graham R L. Worst-Case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms. SIAM J on Computing, 1974, 3: 299-325

[4] Karmarkar N, Karp R M. An efficient approximation scheme for the one-dimensional bin-packing problem. Proc 23rd Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science (FOCS), 1982, 312-320

[5] Yao A C C. New algorithms for bin packing. Journal of the ACM, 1980, 27: 207-227

撰稿人：张国川
浙江大学

随机排队网络的遍历性

Ergodicity on Stochastic Queueing Networks

随机排队网络是计算机网络、生产、运输、库存等各项资源共享的随机服务系统的一个基本数学模型.

一个随机排队网络一般由多个节点组成, 每一个节点代表一类服务设施. 每一节点处均可有从网络外部到达的顾客来接受其服务, 而顾客在每一个节点处接受服务之后以一定的概率立刻离开系统或立刻转移到网络其他节点处继续接受服务, 当然也允许以一个正的概率立刻返回到该节点接受另一次服务. 假设从网络外部到达的顾客是随机的, 而顾客在每个节点处的服务时间也是随机的且依赖于该顾客是从网络外部到达还是从哪一个节点处转移而来, 并且每个节点处服务完的顾客以什么样的概率立刻进行转移也依赖于该顾客是以什么途径来到该节点的. 我们用$\{X(t){:}t\geqslant 0\}$来表示包含队长过程在内的描述其排队网络指标的马氏过程, 如果$\{X(t){:}t\geqslant 0\}$这一过程是遍历的, 那么称原排队网络为遍历的.

对一些特殊的排队网络, 人们可用流体模型方法 (见文献 [1] 和 [2]) 或再生过程方法 (见文献 [3]) 得到其遍历性. 对于如何来建立一般随机排队网络的遍历性是人们关注的一个至今未解决的问题.

参 考 文 献

[1] Chen H, Zhang H. Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline. Mathematics of Operations Research, 1997, 22: 691-725

[2] Dai J. On positive harris recurrence of multiclass queueing networks: A unified approach via fluid limit models. Annals of Applied Probability, 1995, 5: 49-77

[3] Sigman K. The stability of open queueing networks. Stochastic Processes and their Applications, 1997, 35: 11-25

撰稿人: 戴建岗　张汉勤
中国科学院数学与系统科学研究院

位相型分布的最小表示

Minimal Representation of Phase-Type Distribution

位相型分布理论是研究随机服务系统的一个主要数学工具. 位相型分布或 PH-分布 (phase-type distribution) 是一个有限状态马氏过程吸收时间的分布. 具体地, 对于一个状态空间为 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$ 连续时间马尔可夫链$\{X(t),\ t \geqslant 0\}$, 状态 m+1 为吸收态, 而其他状态均为瞬态, 无穷小生成元为

$$\begin{pmatrix} T & -Te \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 e 是以 1 为元素的 m 维列向量, 初始分布为 (α, α_{m+1}), 这里 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 令 ξ 表示该马氏链状态 m+1 的吸收时间, 即

$$\xi = \inf\{t \geqslant 0 | X(t) = m+1\},$$

则 $\Pr(\xi \leqslant x) = 1 - \alpha\exp(Tx)e,\ x \geqslant 0$. 将 ξ 称为 PH- 分布, 记 (α, T) 为 ξ 的一个 PH-表示, 称状态$\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$为该 PH- 表示的位相. 人们已经证明了在弱收敛拓扑下, 由所有 PH- 分布组成的集合是定义在 $[0, \infty)$ 上全体概率分布组成的空间上的一个稠密子集 (见文献 [3]). 这说明对给定任何一个定义在 $[0, \infty)$ 上的概率分布函数, 我们都可以构造一个 PH- 分布使之很好地近似这个给定的概率分布函数. 而由 PH- 分布描述的随机模型如排队系统、库存系统、可靠性系统, 其重要权重指标往往能精确地给出. 这使分析和优化该模型成为可能 (见文献 [1]). 然而, PH- 分布的 PH- 表示是不唯一的, 对 PH- 表示 (α, T), 其阶数 m 在分析相应模型时至关重要, 阶数小的表示在人们分布系统以及数值计算时有许多方便之处. 因此人们关注 PH- 分布的最小表示：即对给定 PH- 分布 (α, T) 怎样找到其具有最小阶数的 PH-表示 $(\hat{\alpha}, \hat{T})$, 使对任何 $x \geqslant 0$,

$$1 - \alpha\exp(Tx)e = 1 - \hat{\alpha}\exp(\hat{T}x)e.$$

当 T 具有一些特殊结构时, 如 T 为上三角或下三角, 这类问题已经解决, 见文献 [2] 与 [4]. 但对一般 PH- 分布 (α, T), 如何找其最小表示是几十年来人们关注的一个公开问题.

参 考 文 献

[1] Asmussen S. Applied Probability and Queues. New York: Wiley, 1987
[2] He Q M, Zhang H Q. An algorithm for computing minimal coxian representations. INFORMS Journal on Computing, 2008, 20: 179-190
[3] Neuts M F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithm Approach. Baltimore: The Johns Hopskins University Press, 1981
[4] O' Cinneide C. Characterization of phase-type distributions. Stochastic Models, 1990, 6: 1-57

撰稿人：何启明　张汉勤
中国科学院数学与系统科学研究院

非线性动力系统的模型降阶

Model Order Reduction of Nonlinear Dynamic System

模拟集成电路如射频集成电路、模数/数模转换电路、开关电容/开关电流滤波器电路等包含了大量的非线性元件, 描述这些模拟集成电路的非线性微分方程规模可以达到数万到数十万规模, 采用传统的基于数值积分方法、Newton-Raphson 迭代、LU 分解的电路分析方法对这样的大规模系统进行时域和频域分析效率非常低. 例如, 对一个由两万个非线性微分方程描述的模数转换电路进行瞬态分析, 需要一周时间, 计算它的频域响应则需要数月时间, 这样的时间对电路设计者是无法忍受的. 电路设计者通常希望能在一天内完成电路的分析验证. 因此, 高速模拟集成电路分析对于模拟集成电路设计至关重要. 目前, 提高模拟集成电路分析速度一方面可以通过改善数值积分方法、加快迭代收敛速度和 LU 分解速度来实现, 另一方面可以通过模型降阶的方法将原始的大规模非线性电路降阶到数十、数百阶的电路, 对降阶后的小规模电路进行分析, 从而大幅提高电路分析的速度.

非线性系统模型降阶的科学问题描述如下, 考虑 N 阶非线性系统:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + Bu(t), \\ &y(t) = C^{\mathrm{T}}x(t), \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $x \in R^N$ 表示系统的状态变量, $f: R^N \to R^N$ 表示一个连续的 N 维非线性向量函数, $u \in R^p$, $y \in R^q$ 分别表示系统的输入和输出向量, $B \in R^{N' \times p}$, $C \in R^{N' \times q}$ 矩阵分别表示系统的输入和输出关联矩阵. 非线性系统的模型降阶建立在投影理论的基础上, 首先构造一个正交投影矩阵 $Q \in R^{N' \times n}$, 利用正交投影矩阵 Q 对原始系统 (1) 进行正交投影, 得到非线性系统 (1) 的 n 阶降阶系统 (2), 降阶后系统的阶数 n 远远小于原始系统阶数 N:

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = Q^{\mathrm{T}}f(Q\tilde{x}(t)) + Q^{\mathrm{T}}Bu(t), \\ &y(t) = C^{\mathrm{T}}Q\tilde{x}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $\tilde{x}(t) = Q^{\mathrm{T}}x$, 且 $\tilde{x}(t) \in R^n$. 非线性系统模型降阶需要着重解决的科学问题是如何构造正交投影矩阵 Q 和更高精度地逼近非线性向量函数 $f(\cdot)$, 使得在相同的输入信号的激励下, 降阶后的非线性系统 (2) 的输出响应可以很好地逼近原始非线

性系统 (1) 的输出响应. 需要说明的是非线性向量函数 $f(\cdot)$ 的有效逼近对非线性系统降阶非常重要. 假设 $N=10000, n=10$, 在降阶系统 (2) 中, 如果不对 $f(\cdot)$ 进行逼近, 计算 $Q^{\mathrm{T}}f(Q\tilde{x}(t))$ 时, 由于 $Q\tilde{x}(t)$ 的维数是 10000, 所以仍然需要 $O(10000)$ 的复杂度来计算非线性向量函数 $f(Q\tilde{x}(t))$, 显然没有达到通过降阶减少计算复杂度的目的.

非线性系统的模型降阶方法的发展围绕着弱非线性系统和强非线性系统分别展开. 对于弱非线性系统, 非线性向量函数 $f(\cdot)$ 可以通过在平衡点附近的泰勒展开来逼近. 1999 年麻省理工学院 Y. Chen 等人对 $f(\cdot)$ 在平衡点作二阶泰勒展开进行逼近, 但在构造正交投影矩阵时仅考虑了 $f(\cdot)$ 的一阶泰勒展开, 采用线性系统模型降阶的方法来构造正交投影矩阵[1]. 这一方法仅仅是对线性系统降阶理论的简单扩展. 2000 年, 麻省理工学院 J. R. Phillips 对 $f(\cdot)$ 在平衡点进行高阶泰勒展开, 然后对高阶泰勒展开的非线性系统进行双线性化, 并通过非线性控制理论中的 Volterra 展开理论来实现对双线性系统的模型降阶[2]. 这一方法的问题在于双线性化后的系统规模要远远大于原始非线性系统的规模. J. R. Phillips 等人后来又尝试通过扰动分析的方法来对弱非线性系统进行降阶. 扰动分析的方法通过扰动理论将原始的非线性系统转化为若干个线性系统来表示, 通过对各线性化子系统分别进行降阶就可以实现对原始非线性系统的降阶 [3]. 但是这一方法的高阶扰动得到的线性系统输入数目会随着扰动阶数的增加而指数增加, 最终导致无法对原始系统进行有效降阶.

强非线性系统的模型降阶的基本思想是首先对 $f(\cdot)$ 在各个展开点上进行泰勒展开, 将所有展开点处的泰勒展开系统通过合适的权重函数组合在一起, 形成对原始非线性系统的逼近系统. 然后在各展开点对泰勒展开后的系统分别构造投影矩阵, 并将这些投影矩阵组合成一个正交投影矩阵, 利用该正交投影矩阵对原始非线性系统的逼近系统进行正交投影, 就得到了原始非线性系统的降阶模型. 由于非线性系统的状态空间维数庞大, 不可能在整个状态空间上去选择大量的展开点. 因此, 选择展开点时, 首先对非线性系统输入特定的 “训练” 信号获得系统状态 “轨迹”, 然后在这些系统状态 “轨迹” 上选择若干展开点. 2003 年, 麻省理工大学 J. White 等人提出的方法在每个展开点对 $f(\cdot)$ 进行线性逼近, 并通过线性系统降阶方法在每个展开点上构造投影矩阵[4,5]. J. Roychowdhury 等人提出的方法则是在每个展开点对 $f(\cdot)$ 进行高阶泰勒展开, 但是在每个展开点构造投影矩阵时, 仅考虑一阶泰勒展开, 通过线性系统的降阶方法来构造投影矩阵[6]. 基于 “轨迹” 的强非线性系统降阶方法的缺陷在于, 通过这一方法得到的降阶系统仅仅当输入信号与 “训练” 输入相似时, 降阶系统输出响应才能较好地逼近原始系统的输出响应.

目前的非线性系统降阶方法无法得到原始非线性系统的精确维数低的降阶模型, 其中的主要困难在于对非线性函数 $f(\cdot)$ 的有效逼近. 对于弱非线性系统, 需要

对 $f(\cdot)$ 进行高阶的泰勒展开才能保证逼近精度, 但是 $f(\cdot)$ 的高阶泰勒展开项数会随着展开阶数的增加成指数增加, 这会导致模型降阶复杂度的急剧增加. 对于强非线性系统, 则需要对 $f(\cdot)$ 进行多点泰勒展开, 如何选择展开点既保证对非线性函数 $f(\cdot)$ 的逼近精度, 又保证降阶系统输出响应逼近原始系统的输出响应, 还存在很大困难. 非线性系统的模型降阶方法尚需要进一步的深入研究.

参 考 文 献

[1] Chen Y. Model order reduction for nonlinear systems. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1999

[2] Phillips J R. Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems. IEEE/ACM DAC, 2000, 184-189

[3] Phillips J R, Jose S. Automated extraction of nonlinear circuit macromodels//Custom Integrated Circuits Conference, 2000, 451-454

[4] Rewienski M, White J. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. IEEE Transactions On Computer-Aided Design Of Integrated Circuits And Systems, 2003, 22(2)

[5] Vasilyev D, Rewienski M and White J. A TBR-based trajectory piecewise-linear algorithm for generating accurate low-order models for nonlinear analog circuits and MEMS. IEEE/ACM DAC, 2003

[6] Dong N, Roychowdhury J. Piecewise polynomial nonlinear model reduction. IEEE/ACM DAC, 2003

撰稿人: 苏仰锋　曾　璇

复旦大学

水分子多尺度建模与计算

Multiscale Modeling and Computation of Water Molecular

水是用得最普遍的物质, 水作为一种溶剂对生物至关重要, 没有水就没有生命. 尽管水的行为复杂又独特, 它却是又小又简单的分子, 它由两个氢原子分别和氧原子键合而成. 水也可以是艺术品, 雪是固态水的一种, 其形状美丽迷人, 是自然界最精美的图案之一. 雪片的结构完全开放, 就是说, 雪晶体有许多大孔. 雪的密度比普通的冰低得多 (众所周知, 冰的密度又比液态水低). 水妙不可言, 实际上是奇妙分子的妙不可言.

水分子看似简单, 但是要建立质量高、计算量小的模型并不是一件容易的事. 在水分子的典型尺度上 (0.3 纳米), 量子效应已经不能忽略. 所以, 基于量子力学的第一原理计算对于水分子的模拟来说是必须的. 但是量子模型的计算量太大, 目前报告的模拟体系中水分子个数都不超过 100. 由于体系太小, 常常无法得到有意义的统计量. 而真实世界中 1 克水中分子的个数是 10^{22} 量级的, 模拟中分子个数当然是越接近这个量级越好, 在计算资源有限的情况下, 体系要多大才能较好地反映水的性质, 这个问题至今没有确切的答案, 但至少可以肯定, 100 个分子是远远不够的.

目前最常用的水分子计算模型是经典原子模型. 典型的原子模型中氢原子带正电, 氧原子带负电, 原子间的静电相互作用模拟了氢键. 此外氧原子间还存在 Lennard-Jones 作用. 原子模型的特点是计算简单, 量子作用被经典原子间作用等效表达, 计算两个水分子之间的相互作用只需计算 10 次原子之间的相互作用. 并且由于不考虑三体作用, 这样的模型在模拟中可以高效率地计算, 目前的模拟规模可以达到 10^5 量级个分子. 但是, 原子模型的建模是一件十分困难的工作. 首先, 如何确定模型中的参数 (譬如, 氢氧原子的带电量、Lennard-Jones 势能参数、氢氧键长、键角等等) 就是一个很有讲究的问题. 目前很多模型的做法是在设定参数的时候以某些物理量的试验结果为根据, 比如密度温度曲线、径向分布函数、气化热等等. 这里面存在的问题是, 虽然模拟结果对于建模参考的那些物理量来说比较精确, 但是, 对其他物理量的精度就不能保证, 甚至给出完全错误的结果. 文献 [5] 对于截至 2001 年的水分子模型做了一个非常详细的综述. 令人无奈的是, 文章中所列的 46 种水的原子模型没有一种能够同时正确地给出水的所有物理性质. 要想得到"真实"的水模型还有很长一段路要走.

此外, 随着计算机模拟中粗粒化技术的发展[7,10], 粗粒化水模型在最近十多年得到了较快的发展. 粗粒化水分子模型是对原子模型的进一步简化：不考虑水分子内部的所有细节, 而把整个分子当成一个小球看待, 小球彼此之间通过一定的作用力相互作用. 由于粗粒化模型是根据特定的原子模型简化得到的, 所以原来原子模型的不精确性粗粒化模型照样存在. 文献 [6] 指出, 粗粒化模型的模拟结果不可能重复出原来原子模型的所有的物理结果. 所以我们在进行模拟之前一定要搞清楚问题是什么, 如果我们关注的物理量粗粒化模型可以达到精度, 那么使用粗粒化模型会有很大收益. 所以, 我们需要发展具有严格数学基础的粗粒化模型[1,2].

近年来, 自适应模拟技术作为一种新兴的模拟技术发展起来[8]. 这种技术的思想是, 在需要高精度、高分子细节的地方使用原子模型, 在模拟精度和分子细节不重要的地方使用粗粒化模型. 对于水的自适应模拟的最初尝试是文献 [9]. 这种技术还处在开发阶段, 相信不久的将来会得到广泛的应用. 这种自适应模拟实质上就是多尺度模拟. 但是目前较成熟的多尺度模拟方法如拟连续介质方法 (quasicontinuum method)[3], MAAD (Macro atomistic Ab initio dynamics)[4] 尚未应用到水分子的模拟中.

总的来说, 无论量子模型、原子模型、粗粒化模型还是自适应多尺度模型都远没有达到完善的地步. 对特定的问题发展合适、可靠的模型及其数学理论, 并利用这些模型来模拟真实的体系, 特别是研究水的相变的微观机制、水分子与固体界面的相互作用及其对生物大分子的影响是今后努力的方向. 实际上软物质和材料的分子都比水分子大很多, 面临的困难都是相同的或者更大.

参 考 文 献

[1] Le Bris C, Lions P L. From atoms to crystals: a mathematical journey. Bulletin of the American Mathematical Society, 2005, 42: 291-363

[2] Yau H T. Asymptotic solutions to dynamics of many body systems and classical continuum equations//Current Development in Mathematics. Somerville, MA: International Press, 1999, 155-236

[3] Tadmor E B, Ortiz M and Phillips R. Quasicontinuum analysis of defects in solids. Phil Mag, 1996, A73: 1529-1563

[4] Abraham F F, Broughton J Q, Bernstein N and Kaxiras E. Spanning the continuum to quantum length scales in a dynamic simulation of brittle fracture. Europhys Lett, 1998, 44(6): 783-787

[5] Guillot B. A reappraisal of what we have learnt during three decades of computer simulations on water. Journal of Molecular Liquids, 2002, 101(1-3): 219-260

[6] Johnson M E, Head-Gordon T and Louis A A. Representability problems for coarse-

grained water potentials. The Journal of Chemical Physics, 2007, 126: 144509

[7] Lyubartsev A P, Laaksonen A. Calculation of effective interaction potentials from radial distribution functions: A reverse Monte Carlo approach. Physical Review E, 1995, 52(4): 3730-3737

[8] Praprotnik M, Delle L Site and Kremer K. Adaptive resolution molecular-dynamics simulation: Changing the degrees of freedom on the fly. The Journal of Chemical Physics, 2005, 123: 224106

[9] Praprotnik M, Matysiak S, Delle Site L, Kremer K and Clementi C. Adaptive resolution simulation of liquid water. Journal of physics. Condensed matter, 2007, 19(29): 292201

[10] Reith D, Puetz M and Mueller-Plathe F. Deriving effective mesoscale potentials from atomistic simulations. Journal of Computational Chemistry, 2003, 24(13): 1624-1636

撰稿人：张平文
北京大学

编　后　记

《10000个科学难题》系列丛书是教育部、科学技术部、中国科学院和国家自然科学基金委员会四部门联合发起的"10000个科学难题"征集活动的重要成果，是我国相关学科领域知名科学家集体智慧的结晶. 征集的难题包括各学科尚未解决的基础理论问题，特别是学科优先发展问题、前沿问题和国际研究热点问题，也包括在学术上未获得广泛共识、存在一定争议的问题. 这次试点征集的数理化学科的难题，正如专家们所总结的"一些征集到的难题在相当程度上代表了我国相关学科的一些主要领域的前沿水平". 当然，由于种种原因很难做到在所有研究方向都是如此，这是需要今后改进和大家见谅的.

"10000个科学难题"征集活动是由四部门联合组织在国家层面开展的一个公益性项目，这是一项涉及我国教育界、科技界众多专家学者，为我国教育和科学技术发展、创新型国家建设，特别是科技文化建设添砖加瓦，功在当代、利在千秋、规模宏大、意义深远的工作. 从这个意义上说，此次征集活动也是新中国教育与科技发展史上一项具有开创性的工作，没有任何现成的经验、模式和操作方法可供参考和借鉴，所有的工作都是在不断探索中推进的，期间我们克服了诸多困难，也积累了许多宝贵的经验，因此，征集活动本身作为一个新生事物，我们也希望能得到全社会的广泛认同.

征集活动开展以来，我们得到了教育部、科学技术部、中国科学院和国家自然科学基金委员会有关领导的大力支持，教育部赵沁平副部长亲自倡导了这一活动，教育部科学技术司、科学技术部条件财务司、中国科学院院士工作局、国家自然科学基金委员会计划局和教育部科学技术委员会秘书处为本次征集活动的顺利开展提供了有力的组织和条件保障. 由于此活动工程浩大，线长面广，人员众多，篇幅所限，书中只列出了部分领导、专家和同志的名单，还有许多提出了难题但这次未被收录的专家没有提及，还有很多同志默默无闻地做了大量艰苦细致的工作，如教育部科学技术委员会秘书处厉伟、陈丁华、牛一丁和科学出版社胡凯、黄海、范庆奎、喻红艳、王飞龙、刘凤娟、袁琦、周强以及北京邮电大学任晓敏、杨放春、刘元安、李冬梅同志等. 总之，系列丛书的顺利出版是参加这项工作的所有同志共同努力的成果. 在此，我们一并深表感谢！

"10000个科学难题"丛书数、理、化编委会

2008年12月